

$1+1=2, 1+2=3$

$2-1=1, 1-1=0$

$0-1=-1$

$1-2=-1, (1+1)=1-1-1=0-1=-1$

$2+2=$

$6/2=\frac{6}{2}=$

$1/2=0.5$

$2 \times 2=2^2=$

4开平方

根号2= $\sqrt{2}=1+4/10+1/10=$

$\approx 1+0.4+0.01+0.004=1.414$

0加任何数a等于这个数, $0+a=a$

两个数相加, 顺序颠倒和数不变, $a+b=b+a$

$(a+b) \times (a+b)=a^2+2ab+b^2$



勾股定理:

$b/c=c_1/b$

$c_1/c, b^2=c_2c$

$a^2+b^2=c^2$

$\Delta x=a, \text{ 或 } x=b$

Mathematics

数学一点通

(上册)

黄风义 著

函数积分: 覆盖面积

抛物线函数 $y=kx^2$

函数导数 (变化率): P 点切线倾斜程度

Q 趋近 P 点, $k=\Delta y/\Delta x=\tan(\alpha)$



数学一点通

(上册)

黄风义 著



上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学一点通/黄风义著. —上海:上海财经大学出版社,2019.1
ISBN 978-7-5642-3087-6/F·3087

I. ①数… II. ①黄… III. ①数学-普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 176988 号

- ☐ 策划编辑 刘光本
- ☐ 责任编辑 廖沛昕
- ☐ 编辑电话 021-65904890
- ☐ 封面设计 张克瑶

数学一点通

黄风义 著

上海财经大学出版社出版发行
(上海市中山北一路 369 号 邮编 200083)
网 址: <http://www.sufep.com>
电子邮箱: webmaster@sufep.com
全国新华书店经销
上海华业装璜印刷厂印刷装订
2019 年 1 月第 1 版 2019 年 1 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16 27.25 印张 530 千字
定价:78.00 元(上下册)

前 言

本书是从零基础起步的一本数学教本,希望在逐步完善以后,成为小学、初中、高中的系统教材。本书希望让绝大多数普通中小學生(包括今后希望从事专业科技工作的學生),可以利用传统教育一半的时间和精力投入,获得比传统教育更多的系统知识和思维方法(包括传统大学本科的微积分基本知识),从而把基础数学教育的总体效率提高到两倍以上,使大家获得比传统教育更系统、广泛、深入的知识以及思维方法,包括发现问题、分析问题、解决问题的能力,并促进智商发育,提高智慧水平和创新力。本书的某些高级知识也可以作为本科一年级学生的参考读物。

笔者的教育背景是理论物理以及半导体物理,后来从事微电子和集成电路芯片领域的科研、技术研发、高等教育以及高科技创业。笔者通过数十年亲身经历和思考,针对传统基础数学教育存在的某些缺陷和弊病,总结出了一套高效率的传授和学习方法。

传统教育的主要缺陷包括:过度灌输和背诵细枝末节式的结论和习题,而不注重思维方法的传授,考完试后很快会忘掉;把某些系统化的知识碎片化之后,把本来简单、易懂的知识,搞得烦琐和复杂;在大量低层次的习题、作业中耗费学生的时间、精力,不但浪费资源,而且不利于智慧的更好成长;传授的某些内容以应试为目的,与今后的生活、工作、科研脱节,用处不大。

本书的主要特点包括:结合具体问题,着重介绍知识背后的本质和思维方法,不但使大家更容易掌握目前知识,不需要大量去背诵,而且不容易忘记,一旦今后需要,可以按照相关思维方法,结合辅助资料,自己很容易想起来;在不同方面、不同层次的基础知识之间,发现了背后思维方法的相似性(称为知识或思维方法的同构性),在掌握某些正确、简洁、高效的思维方法之后,大家可以举一反三去推论其他相关知识,从而提高今后学习以及创造后续高深知识的能力;注重传授对生活、工作、科研具有更大价值的知识;另外,在传授知识以及思维方法的过程中,启发大家不断感受和发现新问题,强化创新意识和能力的培养。

中国社会千百年来具有重视教育的优秀传统。过去半个多世纪,中国在普及教育方面取得了巨大成就,某些教育方法也逐步被国际上其他国家所重视。但传统教育在内容以及模式上具有很大缺陷,总体上存在投入、产出不成比例的问题,学生、家长、社会的资金、精力、时间的投入太大,和获得的结果不相称。传统教育的低效率是一个国际性问题,并不只限于中国。把教育内容、模式进行优化之后,将可以用更少的投入,使学生获得更多的知识和方法。

学习首先应该是快乐的,在让学生增长智慧、掌握技能的同时,享受学习的乐趣。但传统教育却误导大家,大量灌输、背诵细枝末节式的结论和习题,给学生、家长、老师以及整个社会添加了很多额外负担,不但造成社会资源的巨大浪费,而且降低了学习效率。以最简洁、容易、高效的方式,用尽量少的时间精力投入,让学生掌握更多、更有用、更益智的高层次知识和方法,是教育的首要目标,也是衡量教育水平的主要标准。而传统教育在很多方面却背离了这个目标。

高科技的发展使现代社会产生了巨大变化。当代教育却落后于科技发展和学生智慧发育的步伐。未来教育的内容以及传授形式,将从传统的知识灌输转变到思维方法的传授,从而大幅度提高普通人的学习效率以及创造能力。

当今的信息时代正处于社会变革的临界点,各种信息以及知识都在爆炸式增长。今后数十年间,将产生一场席卷全球的教育革命,从内容、形式以及思维方法上颠覆传统的教育模式,形成引领下一轮社会发展的新浪潮。在此基础上,人工智能创新(AI²)的能力将得到快速提升,并最终可能超越人类,科学认知也将提升到一个全新层次。

自从工业革命以来,科技成为社会进步的最大动力。而教育是科技的基础,也是影响大部分个体命运,以及族群和国家发展的主要因素。大约三百年前,牛顿创立的运动学、莱布尼茨(及牛顿)创立的微积分学,奠定了近代科学体系的基础,并构成工业革命以及随后电力、电子革命的重要基础。数学、物理学也成为推动当代微电子、计算机、互联网、通信技术发展的基本动力。未来的高智能化时代,将对社会群体的科学素质提出更高的要求和挑战。

科学是人类理性和智慧的重要体现,数学、物理学是科学皇冠上两颗璀璨的明珠。随着社会进步,科学的普及使大多数民众可以享受人类智慧的伟大成果。科学是真与美的和谐,不但可以作为爱好和兴趣,让大家享受学习的快乐,科学以及在此基础上发展起来的技术,也是一种职业,使大家在追求个体价值、美好生活的同时,为社会创造财富,促进社会的和谐与进步。



前言/001

绪论/001

第一部分 算 术

第一章 数、对应/021

第一节 算术知识的简单概括/021

第二节 个位数、对应/023

第三节 练习/025

第四节 数的顺序、含义/028

第五节 基本数字:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9/029

第六节 基本数字的组合:10(十)/031

第二章 数字运算:加法/034

第一节 十位数/034

第二节 百位数、多位数加法/041

第三节 加法运算的几个应用/055

第三章 算术运算:减法/061

第一节 数量减少、拆分剩余、差额比较/061

第二节 减法运算法则/063

第三节 多项式加减运算:销售、成本、利润/066

第四节 等号、不等号、数字换位/069

第五节 零的两种含义:没有、温度及海拔高度的零点/070

第六节 负数的理解和简单应用/073

第四章 乘法/077

第一节 多次相加:倍数/077

第二节 乘法运算法则/078

第三节 多项式混合运算/083

第四节 乘法的应用:总价=单价 $\times$ 数量(倍数)/086

第五章 除法、分数/092

第一节 除法、分数:把数值等分成几等份/092

第二节 乘法、除法的关系:倍数和分数的关系/098

第三节 除法计算的最大可除法:横行算式、竖列算式/100

第四节 具体应用:数列、平均数/105

第五节 等比例关系:密度=质量/体积/108

第六节 简单的分数运算/112

第六章 乘方/115

第一节 为什么需要引入乘方运算/115

第二节 乘方运算法则/117

第三节 乘方的应用:10的乘方、数量级/119

第七章 开方/122

第一节 如何能想到发明开方运算/122

第二节 开方运算的方法:区间套法/124

第三节 开方运算的方法:从下逼近法/128

第四节 开方运算法则/130

第五节 混合运算/131

第八章 小数、分数、负数:混合运算/133

第一节 $\sqrt{2}$ 的小数表达/133

第二节 分数和小数的关系、变化率、百分比/138

第三节 无限循环小数、无限不循环小数/142



- 第四节 小数的应用:历法、银行利息、利率/143
- 第五节 小数运算法则、误差、有效数字/148
- 第六节 分数运算:因数分解、公倍数、公因数、通分/153
- 第七节 负数运算/154
- 第八节 单位(量纲)的运算/159

第九章 实数、集合、逻辑/161

- 第一节 数的分类、实数集合/161
- 第二节 实数和直线上点的对应、坐标/165
- 第三节 概念、逻辑/170
- 第四节 因果关系、推理/172
- 第五节 逻辑完备性/176
- 第六节 微分、积分思想的简单介绍/178
- 第七节 数论:自然数的性质(高级知识)/183



绪 论

(一)

当今社会已经进入了信息时代,当代基础教育却还在沿用千百年来的传统模式,注重的仍然是如何把前人积累的结论灌输给学生,这种方式已经不适应当代科技的飞速发展。

不同于传统教材,本书针对大部分基础知识,总结出了系统性的思考模式或思维方法,包括不同方面、不同层次、不同领域的知识之间及背后的某些相近或相同的思维方式。大家在掌握了这些基本思维方法后,可以很容易掌握目前的知识,不需要花费太大精力反复去背诵,能够做到举一反三,甚至“一通百通”,并应用于相关的后续高深知识,从而大幅度提高学习效率,促进智慧开发,提高自主创新能力。作为对比,传统教育过分注重灌输和记忆很多支离破碎、细枝末节式的具体结论或知识,在十数年间背诵了大量公式、定理和结论,很多内容考完试之后很快就忘记了。

笔者经历简介:高考物理 98 分、化学 97 分(均是百分制)、数学 104 分(120 分制)。初中阶段一般晚上九点前睡觉,高中时晚上十点前睡觉,早晨六点多起床后跑步。中学阶段的科学智商属于上等,但与本科时北大物理系同年级前五名的学霸相比,自我感觉智商偏低。另外,高中时学的是日语,高考也是日语。进入北大后,从零基础开始学英语。三年后参加全英语的物理学留美考试(CUSPEA),通过了校内初选,但最后落榜。

笔者在本科时感到学习压力较大,量子力学、电子学都是补考才通过,但并不影响毕业后对量子力学的理论研究以及对微电子技术研发方面的兴趣,并取得了一些小的成果。笔者从小养成的习惯,是对感到困惑或没想明白的问题,会在随后的很多年里断断续续地反复思考。因为在科研、技术、产业方面的亲身经验,笔者对本书



的实用性具有较大把握。作为一种幽默表述:缺少工程技术经验的物理学家,也许很难写出好的中小学课本。

笔者在本科时曾经有过读书读不懂、上课听不懂以及考试不及格的切身体验,也曾产生过这样的困惑,就是看书本的字都认识,但连起来却不知道某些内容在讲什么、更不理解如何让自己能想到那些知识。某些困惑甚至可以回溯到小学阶段。这也是作者从零基础开始,一字一句去写中小学数学、物理课本的原因。我相信本书会让大家感觉大部分内容很容易理解,读起来比较轻松、不伤脑筋。

通过几十年的科研和思考,笔者认为传统教育存在的一大主要缺陷,是从小学一年级学数数开始就存在某种倾向,不给大家解释很多概念或结论背后的道理,而是让大家去大量记忆、背诵定义和结论。

实际上,详细解释基础概念的定义或基本原理是如何想到的,让大家了解并掌握背后的思维方法,不但有助于学习目前的知识,还可以大幅度提高今后学习高深知识的效率,因为背后的思维方法是类似的。

另外,传统教科书的某些基础内容并没有深刻领会知识背后的思维方式,而是摘录前人的结论,拼凑起来灌输给大家。如果不是已经学过的人包括老师去详细讲解,而只依靠学生自己去阅读、学习,大部分普通人很难读懂。

本书的一个重要目标,也是区别于传统教育方法的一大特点,是希望让没有基础的人,自己能够读懂基础数学的大部分知识,不但知道结论,更关键的是能系统地理解并掌握产生这些概念、结论背后的想法,而所花费的时间、精力比传统教育还少,获得的知识和方法却比传统教育多。

本书总结的思维方法是笔者本人从小学接受基础教育开始,结合随后数十年的科研、工作经验,针对自己感到困惑或者比较有价值的问题,按照自己最容易想到、最容易理解的方式,汇总整理而成。在思考、整理、写作过程中的一个基本出发点,是把自己当作只会认字、数数的小学生(通俗点讲,就是把自己当成一个比较迟钝的学生),不借助任何参考书或高深知识,也不需要背诵任何复杂、难懂的概念、公式,而是从最简单的知识开始,依靠一些基本方法,让自己搞明白并且让自己能想到前人提出的那些概念、计算方法、符号、算式、定理。既然我自己能很容易地想到,那么90%以上的普通人读了之后,同样也可以很容易地想到。这种方式不但可以使大家更容易掌握传统知识,还可以启发大家去发现、思考传统知识或教育模式隐含的某些缺陷,并不断完善。

作为对比,传统教科书并不注重去解释,大多数学生也不了解很多知识和结论

背后的思维方法,而且有些内容的传授方式也没有顺着大多数人的思维习惯,更没有把如何让学生自己能很容易地想到这些知识作为首要目标。

(二)

我们对传统教育的某些缺陷做详细分析。针对中小学数学教育,传统模式的主要缺陷包括知识的碎片化、离散化、烦琐化,过度注重细枝末节式结论或技巧的灌输、背诵和记忆,在“下游”的低层次习题、作业里耗费大量时间、精力和智慧资源,却很少解释基础知识背后的思维方法。传统的某些教育方式割裂了不同领域、不同分支、不同难易层次的知识之间的有机联系,不但降低了学习效率,也会抑制学生智商的更好发育,压抑大家学习的乐趣、好奇心以及发现、分析、解决问题的能力。相关缺陷主要体现在以下几个方面。

(1)重结论、轻方法,“只知其然,而不知其所以然”。传统教育花费大量精力,灌输很多概念、定理、习题等结论性知识,却不注重告诉学生,这些结论性知识自己如何能想到。从小学算术开始,传统教育就有一种潜在倾向,认为学生不需要理解,或者目前无法理解某些基本概念或基本原理的来龙去脉,大家只要背诵、记住、会做习题就可以了。

养成这种习惯之后,随后十多年间会不断地灌输、背诵数十个甚至上百个定律、定理、概念。这种方式不但浪费时间和精力,降低学习效率,还会抑制学生的自主思考 and 创新能力。过度注重结论的背诵,导致大家只能就事论事,遇到一种现象或问题就要背诵一堆概念或公式。

(2)碎片化。传统教育淡化了基础知识背后的某些本质,割裂了不同层次和领域之间某些内在联系,疏忽了不同层次、分支的知识背后思维方法的相似性或同构性,甚至把某些系统性的完整知识(如几何学)打散成碎片化的概念、定理、结论,穿插在不同阶段的其他知识中,把本来简单的知识搞得很烦琐。在十多年间,几十遍地让学生背诵各种支离破碎、细枝末节的碎片化结论,让学生感觉很复杂、很高深。

传统教育具有“只见树木、不见森林”,或者一叶障目的倾向,每隔一段时间,告诉大家某些天才又发明了一批不同于以往的新概念、新定理,然后让大家背诵、做作业。实际上,如果传授了正确的思维方法,很多高深知识自己很容易就能想到。

(3)在低层次的结论、技巧里纠结,而不传授更高级、更简洁、更有用的知识和思

维方法。这种缺陷在初等教育里尤其严重。

很多小学、初中课本里的烦琐作业、考题,如果采用稍微高层次的方法或知识,会更简单。传统教育首先假设学生无法理解这些高深知识,而是介绍一些低层次的“脑筋急转弯”式烦琐、复杂的方法或概念。而很多低层次知识、技巧与后续的高级知识并没有多大关系,在今后的工作、学习中也很少用到。与其花费那么多的时间精力去思考、记忆低层次的技巧,不如花一点时间,传授给他们更高级、更有用的解决方法。即使某些高级知识无法一下子全都理解或掌握,至少可以先简单了解大概的思想或主体轮廓,今后再慢慢逐步领会,这比把时间、精力耗费在对今后用处不大的结论和习题里更有价值。

(4)过分注重灌输、记忆、背诵,却忽视更重要的感受、发现、思考、创新。传统教育很少传授如何去感受、发现、提出问题以及分析、思考和解决实际问题方法。很多学生能背诵大量公式,会做大量作业,但对与生活、工作相关的具体问题却缺少感受,也不知道如何去思考、分析和解决。

在掌握思维方法的基础上,本书希望让学生学会如何自己去想出或构造出那些习题、作业,并知道如何去求解。在学习了软件语言之后,作为练习,中学生甚至可以编写软件程序让计算机去构造、求解习题。

形象比喻:迄今的数学基础教育,似乎还停留在没有计算机时代的那个层次,灌输给大家很多概念和公式,让大家学会如何计算。这种方式在半个多世纪前,当大家还在使用数学用表、用计算尺去计算乘方、开方、指数或对数运算的时候,让学生学会相应的公式和计算方法,能够去做各种计算,那是很大的一门学问或本事,是基础教育的重要目的,也是千百年来传承下来的教育方式。

但科技已经在快速发展,人的智商也在飞速进步,当代的计算机不但可以进行复杂的数字计算,专业的软件程序还可以做函数、微积分运算。未来的教育需要提升到一个全新层次,从而适应科技以及智商的进步。

(5)低层次的题海战术。很多习题、考题对今后工作、学习、科研、生活用处不大,或者根本没用,对促进思维、智商发育也用处不大。大量细枝末节式的习题,不但浪费大量时间、精力,也可能阻碍儿童大脑、智慧的更好发育,如同过度食用某些缺少营养的快餐式“垃圾”食品,会导致肥胖症,并损害身体健康。基础教育阶段需要做习题,但应该找更简单、更有用、更益智、更高效、更高级的知识。基础教育也需要背诵,但应该记忆背诵更有用的基础思维方法和知识。

(6)思维自我设限、压抑学生思考。大家普遍都有如下经历:在刚学会加法、减



法,还没学负数之前,对于1减2等于多少的问题,书本或老师的答案是不能减。在刚学会乘法、除法,还没学分数之前,对于1除2等于多少的问题,书本或老师的答案是不能除。2015年前后,笔者曾经对不同地区、不同年级的十多个小学生做过统计,都还是这样回答。

随后,等学到高深知识时却告诉大家,以前说不能减、不能除是错的,因为那时候的知识量不够,然后再告诉大家正确的方法,让大家继续背诵、做作业。

在数学、物理学的传统教科书中,有多处案例是把某个具体结论或片面结论当作正确答案甚至基本原理灌输给大家,过几年再否定以前的结论,再把另外某个具体结论当作基本原理灌输给大家。

例如,中学时学平面几何曾经有一道习题,利用平行线的同位角相等证明三角形内角和等于180度(定理A)。以上的证明过程隐含了,或者会让大家认为,这个结论是一个正确的定理。笔者初中时读了一本课外读物,是采用欧几里得的《几何原本》的形式表述平面几何,发现三角形内角和等于180度也被当作一个基本假设(或公设、公理)。后来,读了介绍亚诺什创立非欧几何的科普读物,才知道一百多年前,亚诺什在无法根据更基本原理来证明定理A的情况下,天才地运用反证法,假设三角形内角和不等于180度,也可以得到一个完全自治的几何学体系。人们后来知道,这种几何对应了曲面几何。

虽然科学经历了将近两千年的发展才产生了非欧几何的突破,但作为科学认知或科学教育,不能把重复历史作为主要的传授方式或过程,因为不符合教育以及思维方式的最优化以及高效率的要求。

大家可以自己判断,本书的如下思考和表达,是否是一种更直接、简洁、高效,也更容易促进初中生或小学生创新意识的教育方式:把三角形内角和等于180度作为衡量几何面是否是平的基础判据(必要条件)之一,当任意三角形的内角和等于180度,结合其他的几个判据,将说明对应的几何面是平面;而如果三角形内角和不等于180度,对应的几何面是曲面。在平面上,过直线外一点有且仅有一条直线与这条直线平行(并且平行线同位角相等,定理B),定理B和三角形内角和等于180度这个结论,二者具有某种程度的等价性,可以认为互为因果。

采用以上的思考、解释和表述方式,不但不需要过度灌输具体结论,不需要依靠学习天才大师的突破才能了解非欧几何的新知识,避免因为片面理解而带来的混淆或困惑,而且更顺着大多数人的思维方式,后续的非欧几何大家顺理成章自己就能想到。

以上不是淡化创立非欧几何学的大师们(亚诺什、罗巴切夫斯基、高斯)的伟大贡献,而是说明,科学发展的历史和科学认知、教育的效率不完全是一回事,不能一直沿用传统的照抄历史发展的那种方式,灌输给学生前人的结论,那种方式效率太低。

更高效的方式是找到一大类知识的思维最短程,把如何能让自己以及没有基础的学生,更容易想到那些知识的思维方法作为主要内容,解释给学生,让大家花几十分钟自己去思考、并很容易想到前辈的大师依靠灵感以及几十年心血甚至千百年的积累才创立的那些知识,使学生花费大约半年时间,自己就可以构造那些知识体系,并可能得到前人没有想到的新知识。

形象比喻:未来科学教育的一个主要目标,是把神奇化为平庸,就是把历史上天才的灵感和神奇转化为学生思维操作的流程和日常的习题。

对于以上具体问题,只要对1减2等于多少提供更准确的回答,并启发大家自己思考,不但更容易理解负数概念,而且这种思维方法还可以应用于很多类似问题。

(7)传统教科书存在的另外一个主要缺陷,是没有把很多基础知识解释清楚,而是需要已经学过并理解的人去讲解。传统教育对某些基础知识的解释,存在一种“只可意会,不可言传”的倾向,只能依靠已经理解的人费劲地去告诉没有学过的人是什么意思,大家理解了之后才知道是什么意思。这也是传统教育必须依靠老师讲解并过度依赖灌输、背诵的一个原因。这种方式大大增加了学习过程中的负担,上课时,老师需要呕心沥血地去讲解,学生必须聚精会神地去听讲,否则,通过自己看书去学将更吃力。

形象比喻:传统教育之所以大部分内容需要老师苦口婆心去讲解,背后很大原因是教科书没写明白。在学会认字之后,结合某些语音、视频课件,基础数学的很多知识学生自己就应该能读懂。

幽默表述:传统教育隐含某种自我烦琐甚至自残倾向。很多基础科学知识是前人在几百年前甚至上千年前已经创立出来,后人学习时本应该是一件简单、快乐的事情,传统教育却把学习搞得太复杂、太累。

教育改革的基础,是教科书的内容、传授方式以及思维方式的改革。过去三十多年间,随着生活水平和信息化程度的提高,大多数儿童的智商(包括理解力、接受力、表达力),可以说从生理上进化到了全新层次。人的智商在过去三十多年间实现了飞跃,形象比喻就是已经进化成一种新的智慧人种,社会文明已经步入超级智慧时代。而传统教育却停留在数百年来几乎不变的古旧模式上,已经跟不上社会发展



以及学生的智慧、能力、知识、情感进化的步伐。

一百多年前,数学大师赫米特(Hermite)曾对当时的数学教育提出质疑,认为数学教育扼杀学生天分。他随后在数学领域取得了巨大成就,并培养出几位数学大师。对当代的数学教育,持有类似观点的人估计也很多,教育已经到了必须改革的地步。

笔者通过亲身经历,体会到物理学、数学的某些知识和思维方法,可以应用到科技、工程、产业以及社会等多个领域。有些人或许会认为数学、物理学就是套用公式然后做计算。这是一种片面理解。数学、物理学是传授给大家如何高效、严谨、准确地发现问题、思考问题、解决问题,以及如何进行创新和创造的方法,而不只是背诵、套用公式。未来教育将需要充分发挥数学、物理学的特点,与工程技术、产业经济以及科学研究更加紧密地结合在一起。数学、物理学不只是象牙塔上的明珠,也是支持科技列车奔跑的车轮。

从普遍意义上讲,数学、物理学、工程技术,以及某些社会行为、经济行为,背后具有一定程度的相通性。数学、物理学等学科的精髓,不只是背诵或应用定律、公式、模型,而是高效、简洁、严谨、明确的思维方法和行为方式,如何去感受、发现、观察、表达、分析、理解并解决自然现象、社会现象中的各种问题;如何利用最少投入,以最高效的方式,达到特定的目标;如何去创新、创造。

(三)

本书希望通过如下几个方面的改进,有效避免传统教育模式的潜在缺陷。

(1)知识结合方法、方法重于知识。结合基础概念、定理等具体知识的介绍,详细说明相关的思维方法,从而学生自己能很容易理解这些知识是如何想到的,在掌握了这些方法之后,不但更容易理解、记忆相关知识,也有助于自己去思考或者推导后续的很多高级知识,而没必要大量背诵碎片化的结论或定理。

(2)创新、创造是更好的学习。教育本身是随时促进学生大脑思维发育,并自我创新、创造的过程。教育更应该是自我创造知识、提高智慧的过程,而不是机械地、一遍一遍重复灌输、背诵前人的知识和结论。

传统教育存在某些低效率的习惯,首先假设小学生不理解某些思维方法,也不会自主创新,所以,不告诉大家背后的方法,而是让大家背诵结论。更合理、高效的



方式是,从第一堂算术课开始,一边学数数,一边传授给大家创新、创造的方法,如果一次无法完全理解和掌握,可以花三年时间反复多次去理解。实际上,很多高级知识如果掌握了背后的思维方法,很容易自己就能想出来,并不需要背诵。

(3)科学体系具有相似性、同构性。把不同层次、不同分支以及不同领域的知识进行融会贯通,并总结背后的思维方法。

本书不同于传统教育的一大特点,是把不同分支、领域的某些知识,进行有机融合与贯通,详细解释背后思维方法和模式的相似性,从而,通过理解和掌握一个问题的思考方法,就可以更快、更容易地理解其他分支、领域的类似知识。

很多类似的现象或规律,会出现在不同的分支领域。传统的教育方式是每出现一次,大家都需要背诵一大堆相互割裂、缺少联系的概念、定律、公式,却很少有人把某些相同或类似的现象归纳在一起,告诉大家相关知识所具有的类似思维方式以及处理方法(称为思维构型或定式),深刻理解了一种知识和方法之后,可以同时掌握或自己创造多种不同的知识。

(4)全息化、系统化。学习是自我构造或创造知识的过程。本书试图把数学建立在系统性的思维方法基础上,避免传统教育的碎片化。很多简单知识的背后,可能包含了深层次的思维方法论,结合简单知识的介绍,让学生逐步了解、掌握相关的思维方法,就不需要机械背诵大量结论,而且,可以大大提高随后学习高级知识的效率,因为背后的思维方法是相同的或者类似的。

“麻雀虽小,五脏俱全”“万川印月”“一滴水,映射大千世界”。从基础层次考虑,简单事物可能蕴含世界万象。反映不同事物、现象背后的规律以及思维方式的相似性称为思维同构性,类似于几何图形的分形结构,也称为全息性(借鉴光学全息照相原理)。

数学体系的构造法:数学体系如同物理学是一个开放的,不断发展、完善的体系。学习数学知识的主要目的,是领会、掌握数学的思维方法,包括如何去感受思维领域以及自然和生活中的现象,发现问题、描述现象、归纳概念、分析问题、总结规律,并培养自己构造数学知识和体系的能力。这种教育方式不但可以提高学习效率,还有利于今后的应用和创新。

(5)实用化,数学知识与实用、方法、能力相结合。通过千百年的发展,数学以及物理学积累了大量知识。一个人即使穷尽一生,都无法了解更不要说全面掌握这些知识。过去近半个世纪以来,社会进入了信息化时代,通过网络可以获取巨量的知识和信息,信息量之大,人们用“大爆炸”来形容。



大家可以做一个统计采样：面向那些今天已经有一定科学、工程技术、企业管理或工厂操作经验的成年人，包括科学家、工程师、企业家、商人、工人，调查一下迄今的数学课本以及做过的大量习题、考题，对他们自己的生活、工作、发明、科研到底有多少作用，大家会发现，一半以上的人，对大约一半以上的作业、考题会产生困惑，除了考试以外，说不清为什么要出那样的考题或习题。作为一种形象比喻，当代应试教育过度背诵和记忆碎片化结论的方式，某种程度上已经成为摧残儿童身心健康，耗费社会资源，降低大多数家庭以及整个社会幸福度的一种手段。

基础数学教育需要以有用为导向，包括传授与工作、生活、科研相关的知识和方法，以及培养抽象思维能力和创造力。

(6)自己读了就能懂，提高书本内容的明确化、流程化、易懂性。通过完善思维方法和表达方式，本书的大部分内容可以让大家自己读了就能懂，避免传统教育必须依赖已经学过的人进行详细讲解的模式。

针对传统教科书在基础知识层次存在的某些“只可意会不可言传”的内容，本书注重把内容明确化，就是用语言详细解释清楚。如果某些内容暂时无法明确、简洁地解释清楚，我们首先把问题提出来，启发大家今后多思考，并逐步完善。

本书整体风格的一个特点是类似于计算机软件程序，只要输入简单的定义、语句、思维流程，大多数学生自己读几遍，并不需要花费太多的心血和脑力，就可以轻松地理解本书的大部分内容，并且学会背后的思维方法，利用相关方法可以更容易地学习甚至自己想到后续的高级知识或创造新的知识。

幽默表述：如果把普通中学生的学习过程类比成软件程序，当把传统教科书的内容转化成计算机程序语言之后，大多时候计算机只能去背诵、计算，而无法进行自我学习或创造，有时候甚至无法执行相关程序，因为读不懂。

本书的一个重要目标，是让学会认字和数数的小学生，花几年时间自己就能学会大部分基础数学知识，并掌握科学思维的基本方法。

人工智能创新：如果把本书的相关内容和思维方法编成软件程序，计算机将不但可以学会代数运算以及推导函数公式的技巧，而且可以创造新的知识。把教科书的知识以及思维方法明确化、流程化之后，除了可以大幅度提高学生的学习和创新效率，也为今后提升高级机器智能的创新能力奠定基础。

(7)避免烦琐，提倡简洁、准确、高效。以最简洁、准确、严谨、高效的方式，尽快介绍有更大应用价值的高级、深层次知识的基本概念和思维方法。当简洁和准确之间无法同时达到最优化，则在二者之间选择均衡。另外，避免大量做低层次的习题，