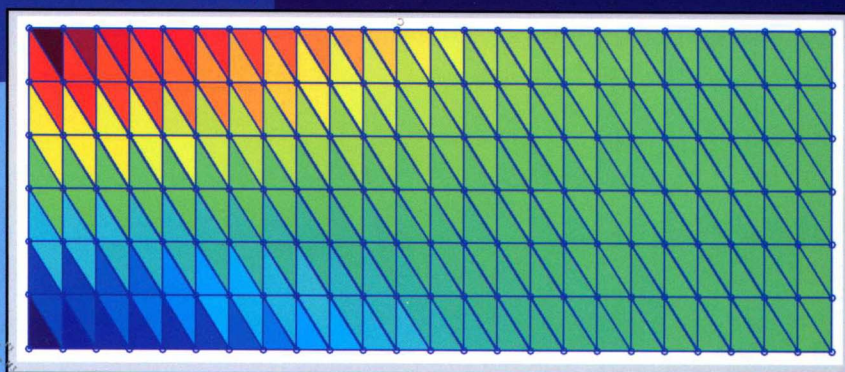


有限单元法——编程与软件应用

The Finite Element Method

Programming and Application

崔济东 沈雪龙 编著



MATLAB
ABAQUS
midas Gen
SAP2000



- 公式推导+编程+软件应用
- 图书+微信订阅号+学习网站
- 学习网站: www.jdcui.com



SINCE 2015
www.jdcui.com

中国建筑工业出版社

有限单元法——编程与软件应用

**The Finite Element Method
Programming and Application**

崔济东 沈雪龙 编著

中国建筑工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

有限单元法——编程与软件应用/崔济东, 沈雪龙编著. —北京: 中国建筑工业出版社, 2018. 12
ISBN 978-7-112-22820-1

I. ①有… II. ①崔…②沈… III. ①有限元法-程序设计
IV. ①O241.82-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 234523 号

本书分为四个部分, 共 11 章: 第一部分为“弹性力学有限单元法基础”, 包括第 1 章。主要介绍弹性力学基本公式及有限元分析的一般步骤。第二部分为“杆件有限元编程与软件应用”, 包括第 2~5 章, 主要介绍杆系有限元的编程方法与软件应用, 具体包括 2D 桁架单元、欧拉梁单元、剪切修正梁单元及 Timoshenko 梁单元。第三部分为“平面及实体有限元编程与软件应用”, 包括第 6~9 章, 主要介绍平面及 3D 实体有限元的编程方法与软件应用。第四部分为“综合分析专题”, 共包括 10、11 章, 基于以上部分中的有限元基本原理进行延伸, 介绍了模态分析和屈曲分析的基本原理, 同样设计了算例, 给出了 MATLAB 编程计算代码, 并与 SAP2000 和 midas Gen 两款软件进行结果对比。

本书适合土木工程和工程力学专业的本科生或研究生, 从事结构、桥梁设计的工程师及相关设计人员参考学习。

责任编辑: 李天虹 刘瑞霞

责任校对: 焦 乐

有限单元法——编程与软件应用

崔济东 沈雪龙 编著

*

中国建筑工业出版社出版、发行 (北京海淀三里河路 9 号)

各地新华书店、建筑书店经销

北京科地亚盟排版公司制版

天津翔远印刷有限公司印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 18 字数: 448 千字

2019 年 2 月第一版 2019 年 2 月第一次印刷

定价: 58.00 元

ISBN 978-7-112-22820-1

(32931)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

To all the people we love and the people who love us, for your endless support of all our crazy thoughts.

序

自 20 世纪五六十年代提出并发展至今，有限单元法已成为结构分析中必不可少的重要工具，有限元领域的理论研究和科技发展对结构分析技术的进步和工程建设做出了重要贡献。

随着建筑结构越来越复杂，对广大结构工程师和设计人员而言，掌握有限元法的原理和应用十分必要。优秀的分析与设计软件可以帮助工程师更好地实现自己的方案，得到满意的结果，了解并熟悉软件背后的理论背景则往往被工程师们所忽视。“兵马未动，粮草先行”，工程师们若要进一步提高自身的技术水平，必须要以扎实的理论知识为基础。然而有限单元法涵盖了丰富的知识内涵，非鸿篇巨制不能讲解全面，对于学习者而言，则需要花费大量的时间和精力，这也是部分工程师不愿深究该方法的一个客观原因。

崔济东博士的这本《有限单元法——编程与软件应用》，则通过公式推导、编程求解以及软件对比的方式，另辟蹊径，提供了一套切实有效的学习有限元法的思路，读者在学习有限元理论知识的同时，又可以从中了解当下流行的通用有限元软件的计算原理和相关操作，具有一举两得之功效。本书介绍了多种常用的基本单元类型，其中公式翔实，代码完整，软件操作则简明扼要，实为作者用心之作，读者倘能认真阅读，定可从中体会一场不一样的学习历程。

在熟悉理论的基础上，借助软件进行结构受力分析，应成为广大工程师们一种合理的工作方式。midas Gen 作为建筑领域通用的结构分析及优化设计系统，其人性化的操作界面、丰富的单元类型、多样化的分析功能和国内外规范，提供了结构分析和建设领域最优的解决方案。相信本书与软件的有机结合，定能为广大读者学习掌握有限元法提供有力的帮助，达到事半功倍的效果。

进入中国十余载，MIDAS 系列软件已经在建筑结构领域形成了完整的产品线，midas Building、midas Gen、midas FEA 共同组成了建筑结构领域的整体解决方案。工程师可根据工程的需要，灵活选用不同软件的组合，取长补短，发挥软件的最大优势，满足业主和工程本身提出的各种高端分析需求。通过与岩土（midas GTS 等）、桥梁（midas Civil 等）系列软件的有机结合，MIDAS 正着力为大土木的快速发展提供更加有力的技术支持。

高德志
MIDAS IT 中国区 总工程师
高级工程师
国家一级注册结构工程师

前 言

作为工科专业的学生，在研究生阶段甚至大学阶段，已经学习了“有限单元法”及相关课程，对于彼时的我们，这门课也算是一门压轴大课了。相信不少人对有限元的课程有这种感觉，乍一看看不下去，看下去了学不懂，学懂了又不会用，及至毕业工作，便彻底把这门课留在象牙塔里了。

如今，有限单元法已成为工程分析和设计中必不可少的重要手段，各种分析和设计软件进行结构受力分析，莫不是以有限元法及相关原理为基础的。作为结构工程师，了解和掌握有限元法的基本原理及应用方法，是十分有用和必要的。尤其随着结构越来越复杂，很多时候必须借助有限元分析软件进行受力分析，倘若不了解软件背后的分析原理，则有可能因建模分析中的毫厘之差，而得出谬以千里的结果，更无法对分析结果的正确性做出准确的判断。

理论是指导工程实践的基础，长期以来，作者不敢忘记基础理论的学习与知识总结，在不断学习有限元法的过程中，将学习成果归纳整理，本书也是作者不断学习和积累的成果。在学习、应用有限元方法时，作者切身感受到，最有效的方法就是动手推导公式、编制简单的有限元分析程序，故而本书从基本单元的公式推导出发，通过在 MATLAB 中编制计算程序来进行有限元分析，同时借助多款有限元软件对编程分析的结果进行独立验证，从而更加深入理解并掌握有限单元法的原理和应用过程。

有限单元法博大精深，前辈大师们有关有限单元法的鸿篇巨制，其深厚的理论功底和丰富的知识内涵，着实让本书难以望其项背。限于篇幅和水平，本书未对有限元法理论进行系统讲解，而是本着“学以致用”的原则编写此书。纵然如此，期间作者仍夙兴夜寐，不敢丝毫懈怠。诚然希望本书能够为广大在校学生、工程技术人员学习、应用有限单元法提供有益的帮助，作者也希望借此机会，与各位读者一起学习，共同进步。

读者对象

本书主要面向有限单元法的初学者，适用对象包括：土木工程和工程力学专业的本科生或研究生，从事结构、桥梁设计的工程师及相关设计人员，也可作为对有限单元法感兴趣的相关人员的参考书目。

本书特点

本书具有以下主要特点：

(1) 公式推导详细：有限单元法虽然理论统一，但不同单元的刚度矩阵及其推导和求解各有不同，本书中尽量将这些公式的推导讲得翔实，旨在帮助读者深入理解有限元分析的过程。

(2) 单元类型丰富：书中采用 MATLAB 编程，结合实际算例，完整呈现了基于 2D Truss 单元、2D Euler 梁单元、2D 剪切梁单元、2D Timoshenko 梁单元、2D 矩形平面应力单元、2D 三角形平面应力单元、3D 六面体单元、3D 四面体单元等多种基本单元的基

本列式推导及编程过程,且对代码进行了详细介绍。算例丰富,讲解详实。

(3) 多款软件验证:对于各种单元的算例结构,采用两款常用的结构有限元分析软件(SAP2000 和 midas Gen) 分别建模分析,部分单元算例采用通用有限元软件 ABAQUS 进行分析,将分析结果与 MATLAB 编程计算结果进行对比,对算例中采用的单元原理和分析方法的合理性和正确性进行验证。同时帮助读者加深对软件中各种单元原理的理解,理论、软件学习两不误,达到一举两得之功效。

主要内容

本书分为四个部分,共 11 章:

第一部分为“弹性力学有限单元法基础”,包括第 1 章。本部分介绍弹性力学的基本公式及弹性有限元分析的一般步骤。

第二部分为“杆件有限元编程与软件应用”,包括第 2~5 章。本部分主要介绍杆系有限元的编程方法与软件应用,具体包括 2D 桁架单元、欧拉梁单元、剪切修正梁单元及 Timoshenko 梁单元。每一章介绍一种单元类型,在介绍单元原理的基础上,给出应用算例,并采用 MATLAB 编程进行求解,同时在 SAP2000、midas Gen 或 ABAQUS 中建立算例模型,最后将 MATLAB 编程计算结果与软件计算结果进行对比和验证。读者可以在此基础上,很容易将书中的单元扩展为 3D 单元。

第三部分为“平面及实体有限元编程与软件应用”,包括第 6~9 章。本部分主要介绍平面及 3D 实体有限元的编程方法与软件应用。每一章介绍一种单元类型,在介绍单元原理的基础上,给出应用算例,并采用 MATLAB 编程进行求解,同时在 SAP2000 和 midas Gen 中建立算例模型,最后将 MATLAB 编程计算结果与软件计算结果进行对比和验证。

第四部分为“综合分析专题”,共包括第 10、11 章。本部分基于以上部分中的有限元基本原理进行延伸,介绍了模态分析和屈曲分析的基本原理,同样设计了算例,给出了 MATLAB 编程计算代码,并与 SAP2000 和 midas Gen 两款软件进行结果对比。

交流反馈

为方便读者阅读本书,在作者的博客网站(<http://www.jdcui.com>)上专门为本书开设了页面(http://www.jdcui.com/?page_id=9731)。欢迎读者在学习有限元过程中到该网站上提问题、下载相关学习资料及分享学习心得,本书的勘误和相关更新也会及时上传到该网站上,对于网友特别有疑问的问题,作者也可以专门进行处理然后上传到该网站上。希望通过该网站,能将各种学习资源进行汇总整理并共享,为大家提供有益的帮助。

致谢

特别感谢广州容柏生建筑设计事务所(RBS)总裁容柏生院士、李盛勇总经理、周定总工程师、廖耘副总工程师及华南理工大学建筑设计研究院郭远翔副总工程师对本书编写的支持与肯定。

“三十功名尘与土,八千里路云和月;莫等闲,白了少年头,空悲切”。感谢与我一同为出书努力的伙伴沈雪龙,没有你的辛勤付出,该书无法顺利完成,这是继《PERFORM-3D 原理与实例》一书后,我们编写的第二本著作,感谢你对我的信任和认可,愿我们继续一同前行、实现抱负。感谢家人、朋友对我的默默支持,你们的支持和照顾是我写作的动力和创作的灵感。

感谢 <http://www.jdcui.com> 的支持者们,希望读者与我们联系,一同交流,共同进

步。如果有下一版，会增加更多单元的编程算例及综合分析专题。

MIDAS IT 中国区总工程师高德志先生详细阅读了本书的初稿并撰写了序言，还给我们提了许多宝贵的意见和建议，在此表示真挚感谢！此外，北京筑信达工程咨询有限公司董事长李楚舒博士及重庆大学陈朝晖教授指出了初稿中包含的许多问题，让我们受益匪浅，在此也表示真挚的感谢。

批评指正

有限单元法博大精深，限于作者水平，书中难免存在不足、疏漏甚至错误之处，恳请广大读者批评指正！欢迎通过电子邮件（jidong_cui@163.com）进行交流讨论。

崔济东

2018 年 06 月 14 日

于广州容柏生建筑设计事务所（RBS）

目 录

第一部分 弹性力学有限单元法基础	1
第 1 章 弹性力学基本公式及有限元分析的一般步骤	3
1.1 弹性力学基本公式	3
1.1.1 基本变量	3
1.1.2 平衡方程	3
1.1.3 外力边界条件	4
1.1.4 几何方程	4
1.1.5 物理方程	4
1.2 有限元分析的一般步骤	6
1.2.1 问题分析	6
1.2.2 结构离散化	6
1.2.3 单元特性分析	7
1.2.4 结构整体平衡方程	8
1.2.5 引入边界条件	11
1.2.6 求解有限元方程	11
1.2.7 计算单元应变、应力及支座反力	11
1.2.8 分析结果后处理	11
第二部分 杆件有限元编程与软件应用	13
第 2 章 2D Truss 单元	15
2.1 桁架单元介绍	15
2.2 基本列式	15
2.2.1 基本方程	15
2.2.2 局部坐标系下单元刚度矩阵	15
2.2.3 单元的坐标转换矩阵	16
2.2.4 单元的内力	17
2.3 问题描述	18
2.4 MATLAB 代码与注释	18
2.5 SAP2000、midas Gen 有限元分析	26
2.5.1 SAP2000 有限元分析	26
2.5.2 midas Gen 有限元分析	32
2.6 小结	37

第3章 2D 欧拉-伯努利梁单元 38

3.1 2D 欧拉-伯努利梁单元介绍 38

3.2 基本列式 38

3.2.1 基本方程 38

3.2.2 局部坐标系下单元刚度矩阵 39

3.2.3 单元的坐标转换矩阵 41

3.2.4 单元的杆端力 42

3.3 问题描述 43

3.4 MATLAB 代码与注释 43

3.5 SAP2000、midas Gen 有限元分析 53

3.5.1 SAP2000 有限元分析 53

3.5.2 midas Gen 有限元分析 59

3.6 小结 67

第4章 2D 剪切修正梁单元 68

4.1 剪切修正梁单元介绍 68

4.2 基本列式 68

4.2.1 基本方程 68

4.2.2 局部坐标系下单元刚度矩阵 69

4.3 问题描述 72

4.4 MATLAB 代码与注释 73

4.5 SAP2000、midas Gen 有限元分析 82

4.5.1 SAP2000 有限元分析 82

4.5.2 midas Gen 有限元分析 90

4.6 小结 95

第5章 2D Timoshenko 梁单元 96

5.1 Timoshenko 梁单元介绍 96

5.2 基本列式 96

5.2.1 基本方程 96

5.2.2 局部坐标系下单元刚度矩阵 97

5.3 问题描述 99

5.4 MATLAB 代码与注释 100

5.5 ABAQUS 有限元分析 112

5.5.1 建模分析 113

5.5.2 分析结果 121

5.6 小结 122

第三部分 平面及实体有限元编程与软件应用 123

第6章 2D 四节点矩形单元 (Q4) 125

6.1 Q4 单元介绍 125

6.2 基本列式	125
6.2.1 基本方程	125
6.2.2 位移场	126
6.2.3 几何方程与应变矩阵	127
6.2.4 物理方程与应力矩阵	128
6.2.5 单元刚度矩阵	129
6.2.6 单元荷载列阵及等效节点力	129
6.3 问题描述	130
6.4 MATLAB 代码与注释	130
6.5 SAP2000、midas Gen 有限元分析	140
6.5.1 SAP2000 有限元分析	140
6.5.2 midas Gen 有限元分析	146
6.6 小结	151
第7章 2D 三节点三角形单元 (CST)	152
7.1 CST 单元介绍	152
7.2 基本列式	152
7.2.1 基本方程	152
7.2.2 位移场	152
7.2.3 几何方程与应变矩阵	153
7.2.4 物理方程与应力矩阵	154
7.2.5 单元刚度矩阵	154
7.2.6 单元荷载列阵及等效节点力	155
7.3 问题描述	155
7.4 MATLAB 代码与注释	155
7.5 SAP2000、midas Gen 有限元分析	166
7.5.1 SAP2000 有限元分析	166
7.5.2 midas Gen 有限元分析	172
7.6 小结	174
第8章 3D 八节点六面体单元	175
8.1 八节点六面体单元介绍	175
8.2 基本列式	175
8.2.1 基本方程	175
8.2.2 位移场	176
8.2.3 几何方程与应变矩阵	177
8.2.4 物理方程与应力矩阵	178
8.2.5 单元刚度矩阵	179
8.2.6 单元荷载列阵及等效节点力	179
8.3 问题描述	180
8.4 MATLAB 代码与注释	180

8.5	SAP2000、midas Gen 有限元分析	195
8.5.1	SAP2000 有限元分析	195
8.5.2	midas Gen 有限元分析	202
8.6	小结	206
第9章	3D 四面体单元 (TET4)	207
9.1	四面体单元 (TET4) 介绍	207
9.2	基本列式	207
9.2.1	基本方程	207
9.2.2	位移场	207
9.2.3	几何方程与应变矩阵	209
9.2.4	物理方程与应力矩阵	210
9.2.5	单元刚度矩阵	210
9.2.6	单元荷载列阵及等效节点力	210
9.3	问题描述	211
9.4	MATLAB 代码与注释	211
9.5	ABAQUS、midas Gen 有限元分析	223
9.5.1	ABAQUS 有限元分析	223
9.5.2	midas Gen 有限元分析与结果对比	230
9.6	小结	234
第四部分	综合分析专题	235
第10章	模态分析	237
10.1	模态分析原理	237
10.1.1	基本方程	237
10.1.2	求解方法	237
10.2	2D 桁架结构模态分析	238
10.2.1	桁架单元质量矩阵	238
10.2.2	算例: 2D 桁架模态分析	238
10.2.3	SAP2000 分析结果对比	241
10.2.4	midas Gen 分析结果对比	242
10.3	2D 框架结构模态分析	243
10.3.1	梁单元质量矩阵	243
10.3.2	算例: 2D 框架模态分析	243
10.3.3	SAP2000 分析结果对比	246
10.3.4	midas Gen 分析结果对比	246
第11章	屈曲分析	248
11.1	稳定问题分类	248
11.2	最小势能原理	248
11.2.1	系统的平衡	248

11.2.2 稳定平衡 249

11.2.3 弹性稳定问题的有限元列式 249

11.2.4 弹性稳定问题求解 249

11.3 屈曲分析 1：2D 桁架..... 250

11.3.1 MATLAB 代码与注释 251

11.3.2 SAP2000 分析结果对比 253

11.3.3 midas Gen 分析结果对比 255

11.4 屈曲分析 2：2D 框架..... 256

11.4.1 MATLAB 代码与注释 256

11.4.2 SAP2000 分析结果对比 260

11.4.3 midas Gen 分析结果对比 261

11.5 屈曲分析 3：压杆稳定 261

11.5.1 MATLAB 代码与注释 261

11.5.2 SAP2000 分析 266

11.5.3 midas Gen 分析..... 268

附录一 270

附录二 271

附录三 272

附录四 274

参考文献 275

第一部分 弹性力学 有限单元法基础

本部分包括以下章节：

第 1 章 弹性力学基本公式及有限元分析的一般步骤

第 1 章 弹性力学基本公式及有限元分析的一般步骤

有限单元法作为一种通用的数值分析方法，有一套完整的理论基础和分析步骤，由于本书主要讨论小变形弹性有限元问题，因此本章先给出主要的弹性力学基本公式，接着对有限单元法分析的一般步骤进行介绍，至于每一步的具体操作，将在后续章节中针对特定的单元作具体讲解。本书仅介绍应用最为广泛的以节点位移为基本未知量的“位移型”有限元，讨论范围也仅限于最基本的小变形线弹性问题。

1.1 弹性力学基本公式

1.1.1 基本变量

物体内一点的变形由它的三个位移分量来表示：

$$\{u\} = [u \quad v \quad w]^T \quad (1.1-1)$$

物体所受的体积力可用列向量表示：

$$\{f_v\} = [f_{vx} \quad f_{vy} \quad f_{vz}]^T \quad (1.1-2)$$

物体所受的表面力可用列向量表示：

$$\{f_s\} = [f_{sx} \quad f_{sy} \quad f_{sz}]^T \quad (1.1-3)$$

外力边界面外法向量可用它的三个方向余弦来表示：

$$\{n\} = [n_x \quad n_y \quad n_z]^T \quad (1.1-4)$$

物体所受的点荷载可用它的三个分量来表示：

$$\{P\} = [P_x \quad P_y \quad P_z]^T \quad (1.1-5)$$

物体内一点的应力可用列向量表示：

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy}]^T \quad (1.1-6)$$

物体内一点的应变可用列向量表示：

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}]^T \quad (1.1-7)$$

1.1.2 平衡方程

3D 弹性问题单元内任意一点的应力平衡方程表示为：

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_{vx} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_{vy} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_{vz} = 0 \end{cases} \quad (1.1-8)$$

1.1.3 外力边界条件

3D 弹性问题，在外力施加的边界上，应力需满足以下边界条件：

$$\begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = f_{sx} \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = f_{sy} \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = f_{sz} \end{cases} \quad (1.1-9)$$

1.1.4 几何方程

几何方程描述的是应变-位移之间的关系，在小变形情况下，应变-位移关系可以用以下公式描述：

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (1.1-10)$$

1.1.5 物理方程

物理方程描述的是应力-应变之间的关系，对于线弹性材料，应力-应变关系服从广义胡克定律，对于各向同性材料，仅需要两个参数描述胡克定律，即弹性模量 E 和泊松比 μ 。

(1) 对于 3D 线弹性问题，广义胡克定律可用以下公式表示：

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial \tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial \tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial \tau_{xy}}{G} \end{cases} \quad (1.1-11)$$

公式中 G 为剪切模量，公式为：

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (1.1-12)$$