



200 Interesting Point Set Questions for Russia

$$\theta \text{Adj} \binom{v}{w} = \{k : 1 \leq k \leq n-1, a_k > a_{k+1}, b_k \leq b_{k+1}\}.$$

200个

俄罗斯趣味点集问题

© 刘培杰数学工作室 编译



$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n (1-t)^n z^n \sum_{i \geq a_1 > a_2 > \dots > a_n \geq 0} q^{\|i\|} \sum_{j \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0} p^{\|j\|}$$

数学主要地是一项青年人的游戏。它是智力运动的练习，只有具有青春与力量才能做得满意。——诺伯特·维纳

为了激励人们向前迈进，应使所给的数学问题具有一定的难度，但也不可难到高不可攀。因为望而生畏的难题必将挫伤人们继续前进的积极性。总之，适当难度的数学问题，应该成为人们揭示真理奥秘之征途中的路标，同时又是人们在问题获解后的喜悦感中的珍贵的纪念品。——大卫·希尔伯特



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

$$\sum_{\binom{v}{w} \in T_{N_i \times N_j, \theta}} (-1)^{i \binom{v}{w}} (1-t)^{j \binom{v}{w}} W \binom{v}{w} = J_0^{(n)}(z(1-t); q, p)$$

200 Interesting

Questions for Russia

200个

俄罗斯趣味点集问题

© 刘培杰数学工作室 编译



数学主要地是一项青年人的游戏。它是智力运动的练习，
只有具有青春与力量才能做得满意。——诺伯特·维纳

为了激励人们向前迈进，应使所给的数学问题具有一定的难度，
但也不可难到高不可攀，因为望而生畏的难题必将挫伤人们继续前进的积极性。总之，
适当难度的数学问题，应该成为人们揭示真理奥秘之征途中的路标，
同时又是人们在问题获解后的喜悦感中的珍贵的纪念品。——大卫·希尔伯特



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书介绍了 200 个俄罗斯趣味点集问题. 问题较为新颖, 富有启发性. 通过对点集问题的分析和解答来启发提高读者的数学学习能力, 培养良好的数学思维.

本书可供广大数学爱好者及数学研究者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

200 个俄罗斯趣味点集问题/刘培杰数学工作室编译. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社, 2018. 11

ISBN 978-7-5603-7524-3

I. ①2… II. ①刘… III. ①点集—题解
IV. ①O144-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 164620 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 丁浩洋
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 12 总字数 223 千字
版 次 2018 年 11 月第 1 版 2018 年 11 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-7524-3
定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读, 我社负责调换)

目 录

0	引 言	(1)
1	点的集合	(9)
	线簇及其运动	(13)
	作图问题	(15)
	问题集	(18)
2	几何学 ABC	(25)
	一圆和一对圆弧	(28)
	距离的平方	(31)
	到诸直线的距离	(40)
	关于几何学 ABC 中的全部点集	(46)
3	逻辑组合	(48)
	共点问题	(48)
	交集和并集	(55)
	“乳饼”问题	(60)
4	极大与极小	(63)
	这一点应置于何处	(67)
	“摩托艇”问题	(70)
5	水平曲线	(75)
	“公共汽车”问题	(75)
	定义在一平面上的函数	(78)
	水平曲线	(79)
	函数的图形	(79)
	函数的图	(82)

边界线	(83)
函数的极值	(85)
6 二次曲线	(90)
椭圆,双曲线,抛物线	(90)
焦点与切线	(95)
抛物线的焦点性质	(98)
作为直线簇的包络的一些曲线	(103)
曲线的方程	(104)
去根式	(108)
最后一个命题	(109)
代数曲线	(115)
7 转动与轨线	(119)
心脏线	(119)
转动的合成	(121)
关于两个圆的定理	(130)
速度和切线	(134)
参数方程	(142)
结束语	(147)
附录 I 圆内正多边形滚动中某顶点轨迹长度的探究	(150)
参考文献	(158)
编辑手记	(159)

引 言

江苏省丹阳市第五中学的王海东对湖北省 2015 年高考数学第 21 题做了鉴赏与反思.

试题 一种画椭圆的工具如图 0.1 所示. O 是滑槽 AB 的中点, 短标 ON 可绕 O 转动, 长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动, 且 $DN = ON = 1$, $MN = 3$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内做往复运动时, 带动 N 绕 O 转动一周 (D 不动时, N 也不动), M 处的笔尖画出的曲线记为 C . 以 O 为原点、 AB 所在的直线为 x 轴建立如图 0.2 所示的平面直角坐标系.

(1) 求曲线 C 的方程; (2) 略.

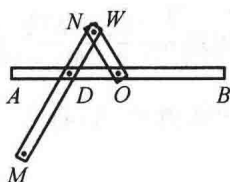


图 0.1

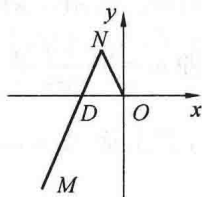


图 0.2

解析 (1) 设点 $D(t, 0)$ ($|t| \leq 2$), $N(x_0, y_0)$, $M(x, y)$, 依题意, $\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{DN}$, 且 $|\overrightarrow{DN}| = |\overrightarrow{ON}| = 1$, 所以 $(t - x, -y) = 2(x_0 - t, y_0)$, 且 $\begin{cases} (x_0 - t)^2 + y_0^2 = 1 \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} t - x = 2x_0 - 2t \\ y = -2y_0 \end{cases}$, 且 $t(t - 2x_0) = 0$. 由于当点 D 不动时, 点 N 也不动, 所以 t 不恒等于 0, 于是 $t = 2x_0$, 故 $x_0 = \frac{x}{4}$, $y_0 = -\frac{y}{2}$, 代入 $x_0^2 + y_0^2 = 1$, 可得 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, 即所求的曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

第(1)问用坐标转移法求出曲线的方程, 一般学生只要正确理解题意, 都可以做出答案, 难度适中. 在文科卷中进一步降低了试题难度, 题中直接说明曲线

轨迹为椭圆,因此文、理科有一定的区分度.题目背景源于荷兰数学家舒腾(F. van Schooten)的椭圆作图工具,但与课本上“猫的运动轨迹”和达·芬奇(L. da Vinci)椭圆仪都非常相似,它们之间应有一定的相通性.

• 猫的运动轨迹

一架立在光滑地板上的梯子抵墙下滑,一只猫在梯子的正中间不动,试求在梯子下滑过程中猫的运动轨迹.在这一生动有趣的叙述后面,我们可见到下面的数学问题.

已知一个直角,一条长度为 $2a$ 的线段的两个端点分别在这个直角的两边上滑动,求线段中点的轨迹.

例题如下:长为 $2a$ (a 为正常数)的线段 AB 的两端点 A, B 分别在相互垂直的两条直线上滑动,求线段 AB 的中点 M 的轨迹.

易求动点 M 的轨迹是以两条直线的交点为圆心、 a 为半径的圆.如果这只猫没有坐在梯子的正中间,那么在梯子的下滑过程中,它沿怎样的一条路线运动?下面我们用解析法求猫的运动轨迹.

以直角的两边所在直线分别作为 x 轴和 y 轴,建立直角坐标系(图0.3),作 $MC \perp AO$ 于 $C, MD \perp BO$ 于 D .设 $BM = a, AM = b, M(x, y), A(m, 0), B(0, n)$. 则根据 $\triangle BMD \sim \triangle BAO$,得 $\frac{x}{m} = \frac{a}{a+b}$,即 $m = \frac{(a+b)x}{a}$. 同理 $n = \frac{(a+b)y}{b}$. 因为 $m^2 + n^2 = (a+b)^2$,将上面的 m, n 代入并化简,得 $\frac{x^2}{a^2} +$

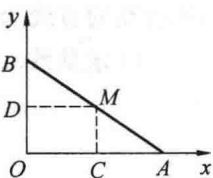


图 0.3

$\frac{y^2}{b^2} = 1$,其中 x, y 均为正数.因此,这只猫沿着一段椭圆弧运动.

• 达·芬奇椭圆仪

上面的结果与用来作椭圆的“达·芬奇椭圆仪”的工作原理非常相似,制作椭圆仪的方法如下:用两根木条钉成十字架,木条中间挖一道槽,在另一活动木条 PBA 的 P 处钻一小孔,可以容纳笔尖, A, B 是两个螺钉,可以放松移动以配合 $AP = a, BP = b$ 的长度.当 A, B 各在一条槽内移动时, P 处笔尖就画出一个椭圆(图0.4).

原理如下:以十字架的两边所在直线分别作为 x 轴和 y 轴,建立直角坐标系(图0.5).设 $A(0, y_0), B(x_0, 0), P(x, y)$,由 $\vec{AB} = \frac{a-b}{a} \vec{AP}$,得 $(x_0, -y_0) =$

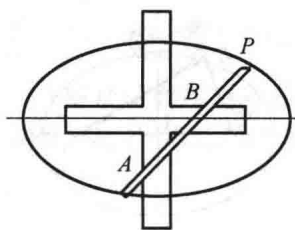


图 0.4

$$\frac{a-b}{a}(x, y-y_0), \text{ 即 } \begin{cases} x_0 = \frac{a-b}{a}x \\ -y_0 = \frac{a-b}{a}(y-y_0) \end{cases}, \text{ 化简得 } \begin{cases} x_0 = \frac{a-b}{a}x \\ y_0 = \frac{a-b}{-b}y \end{cases}. \text{ 由题意得}$$

$AB = a - b$, 所以 $x_0^2 + y_0^2 = (a - b)^2$, 将上式代入化简得 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 达·芬奇椭圆仪画出的椭圆是以 AP 为长半轴, BP 为短半轴的椭圆.

在图 0.6 中, 当 M 在线段 AB 上运动时就是猫的运动轨迹模型, 当 P 在直线 AB 除线段 AB 的两条射线上运动时就是达·芬奇椭圆仪模型.

若在图 0.6 中取 AB 中点 M , 连 OM 得图 0.7, 会发现图 0.7 和图 0.1 相似, 即达·芬奇椭圆仪与舒腾的椭圆作图工具原理相同. 可能舒腾在达·芬奇的基础上做了进一步的简化, 将达·芬奇椭圆仪中的两条滑槽变为一条滑槽, 工具省料且携带方便, 而且舒腾生活的年代比达·芬奇晚 100 多年, 很有可能是在达·芬奇椭圆仪的基础上做的进一步的改进.

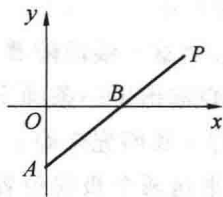


图 0.5

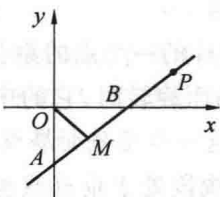


图 0.6

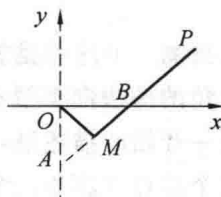


图 0.7

其实舒腾给出了椭圆的三种作图工具(图 0.8), 第 1 种局部与梯子上猫的运动轨迹原理相同, 第 2 种即利用了焦半径之和为常数的性质, 第 3 种就是 2015 年高考题的背景.

若考查此问题来源, 可以追溯到 20 世纪中叶苏联数学课外培训教材中的问题.

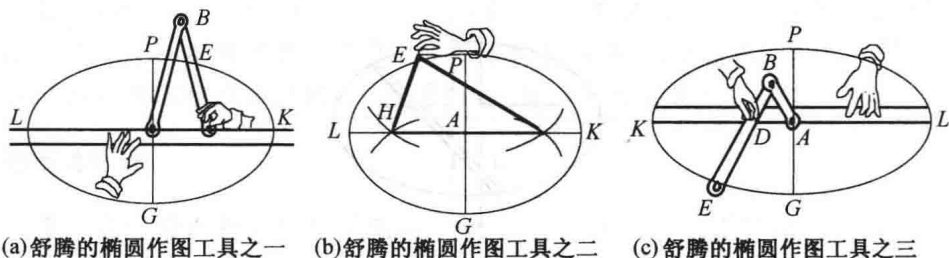


图 0.8

- ① 一架立在光滑地板上的梯子抵墙下滑. 一只猫正好坐在这架梯子的中间 (图 0.9). 试问这只猫在梯子下滑时会沿怎样的一条路线运动?

假设这只猫安稳地卧着不动. 那么, 从这一生动有趣的叙述后面, 我们能见到下面的数学问题:

已知一个直角, 找出长度为 d 、两端在此直角两边上的所有线段的中点 (图 0.10).

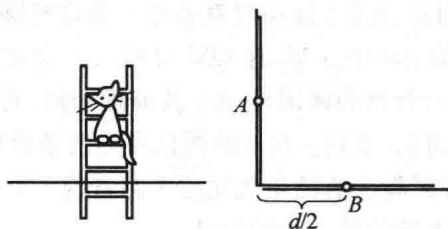


图 0.9

图 0.10

我们来猜测一下这将是怎样的一个点的集合. 当这一线段随着它的两个端点沿直角的两边向下滑动而旋转时, 它的中心描出了一条确定的曲线 (从本问题一开始的描述里, 这一点是显而易见的). 我们先来确定一下这条曲线的两个端点在哪里. 当线段处于垂直或水平这两个极端位置时, 它们的中点就是这条曲线的端点位置. 这就是说, 此曲线的端点 A, B 位于角的两边上, 并且与顶点 O 的距离为 $\frac{d}{2}$.

让我们来画出这条线的几个中间点. 如果你能精确地把它们描绘出来, 你就会发现它们都落在离直角顶点相等距离的地方. 因此, 我们可以说, 这条未知曲线是一条圆弧, 其圆心在 O , 半径为 $\frac{d}{2}$. 我们现在就来证明这一点.

我们先来证明已知线段 KL ($|KL| = d$) 的中点总是落在离点 O 的距离为

$\frac{d}{2}$ 的地方(图 0.11, 图 0.12). 这是由于 $\text{Rt}\triangle KOL$ 的中线 OM 的长度等于斜边 KL 的长度的一半(你自己能相当容易地确定这一结论是正确的: 只要将 $\triangle KOL$ 向上扩展成矩形 $KOLT$, 则有矩形的对角线 KL 和 OT 相等, 且被交点 M 所平分(图 0.13)).

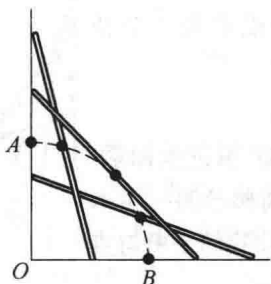


图 0.11

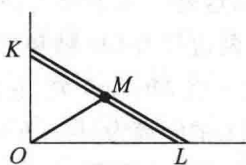


图 0.12

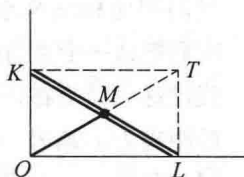


图 0.13

这样, 我们就证明了线段 KL 的中点总是位于以 O 为圆心的圆弧 $\widehat{AB}$ 上. 这段圆弧正是我们所要找的点的集合.

严格地讲, 我们还必须证明 $\widehat{AB}$ 上任意一点也一定在所要求的集合中. 要做到这一点是容易的. 通过 $\widehat{AB}$ 上任一点 M , 我们可以引出一条射线 OM , 沿此射线作出线段 $|MT| = |OM|$, 从点 T 向直角的两边作垂线 TL 和 TK , 这就构成了所要求的线段 KL . 它的中点就是 M (图 0.14).

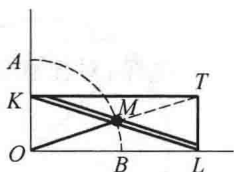


图 0.14

这一证明的第二部分初看起来似乎是不必要的. 因为, 我们可以清楚地看到, 线段 KL 的中点描出了以 A, B 为端点的一条“连续的曲线”. 这就意味着点 M 走过了整个 $\widehat{AB}$ 而不只是其中的一部分. 这一分析是完全可信的, 但要给出它的严格的数学形式却不是一件容易的事.

现在我们从另一角度来考虑梯子的运动问题(见问题 1). 设想线段 KL (即“梯子”) 是固定的, 直线 KO 和 LO (即“墙”和“地板”) 相应地绕着点 K 和点 L 旋转(图 0.15). 这样, 两条直线之间的夹角总是一个直角. “从线段中点到直角顶点的距离总保持不变”这一个事实, 可归结为一个熟知的定理: 设若在平面上有两个已知点 K, L , 则 $\angle KOL$ 为 90° 的所有的点的集合是一个直径为 KL 的圆. 这一定理及其推广, 通常有助于我们解

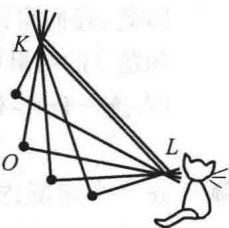


图 0.15

决一些问题. 现在, 我们再回到问题 1, 并考虑更一般性的问题.

- ② 如果这只猫没有坐在梯子的中间, 那么, 在梯子下滑时, 它将沿怎样的一条路线运动?

在图上作出这条线的若干个点的. 我们能清楚地看到, 它既不是一条直线, 也不是一个圆, 它对我们来说将是一个新的曲线(图 0.16).

我们用坐标法来求出这是一条怎样的曲线.

我们把这一个直角的两边作为 Ox 轴和 Oy 轴, 引进坐标系. 假设这只猫坐在任意一点 $M(x, y)$ 处, 它在离梯子的一端 K 的距离为 a , 离另一端 L 的距离为 $b(a+b=d)$. 我们来求与点 M 的坐标 (x, y) 相联系的方程(图 0.17).

如果线段 KL 与 Ox 轴斜交成角 φ , 则有

$$y = b \sin \varphi$$

及

$$x = a \cos \varphi$$

这样, 对任意角度 $\varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$ 有

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

坐标满足这一方程的点的集合是一个椭圆. 因此, 这只猫将沿着椭圆运动(图 0.18).

请注意, 当 $a=b=\frac{d}{2}$ 时, 即猫坐在梯子的中间时, 方程(1) 就变成一个圆的方程

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

因此, 我们得出了问题 1 的另一种解法.

问题 2 的结果可用来解释一种画椭圆的装置的工作原理. 这一装置, 如图 0.19 所示, 称为达·芬奇椭圆仪.

- ③ 在一个定圆内, 有一个直径为其一半的小圆在做无滑动的滚动(图 0.20). 试问动圆上的点 K 将会画出一条怎样的线来? 这个问题的答案简单得使人吃惊: 点 K 沿着一条直线运动——更准确地说, 点

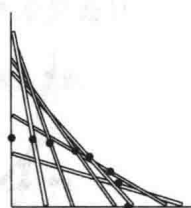


图 0.16

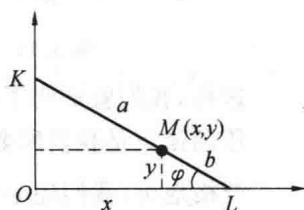


图 0.17

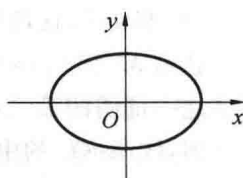


图 0.18

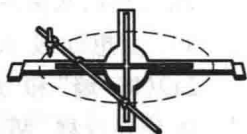


图 0.19

K 是沿着定圆的一条直径运动(图 0.21). 这一结果称为哥白尼定理.

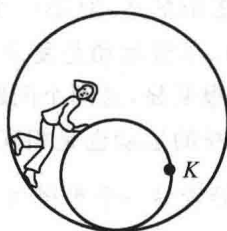


图 0.20

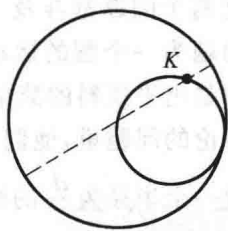


图 0.21

试着用你自身的经验来验证这一定理的合理性(在这里, 内圆只是滚动而无滑动这一点是重要的, 亦即, 内外圆相互滚过的弧长是相等的). 我们只需回忆一下有关圆的圆周角的定理, 就不难给出证明.

假设点 A 是定圆上的一个定点. 在开始时与点 A 相重合的动圆上的那个点, 后来移动到位置 K , 而点 T 是现在这一瞬时两圆的接触点. 由于 $\widehat{KT}$ 和 $\widehat{AT}$ 相等, 动圆的半径是大圆的一半, 所以 $\widehat{KT}$ 的度数是 $\widehat{AT}$ 的两倍(图 0.22). 因此, 若 O 是定圆的圆心, 那么按照圆周角定理, 有

$$\angle AOT = \angle KOT$$

由此可知点 K 落在半径 AO 上.

这一证述对动圆在整个大圆的四分之一上滚动时一直成立(最后, 两圆在大圆的点 B 处接触, 此时 $\angle BOA = 90^\circ$, K 与 O 重合, 见图 0.23). 从此之后, 运动以完全同样的方式继续进行下去——整个图形将是关于直线 AO 的简单的反射对称. 在点 K 达到直径 AA' 的另一个端点 A' 后, 内圆将沿定圆的下半部滚动, 点 K 便回到 A (图 0.24, 图 0.25).

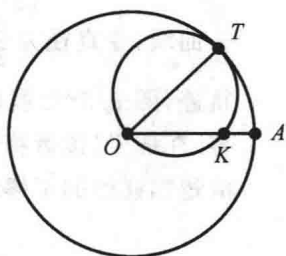


图 0.22

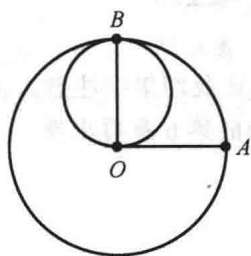


图 0.23

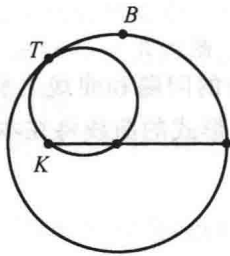


图 0.24

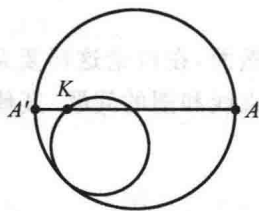


图 0.25

让我们来比较一下问题1和问题3的结果. 由于下面的理由, 它们或许是引人入胜的. 这两个问题都涉及了图形的运动(第一个问题为一段线段的运动, 第二个问题为一个圆的运动). 尽管运动是复杂的, 但对一个特定点的路径来说, 却是出乎预料的简单. 很明显, 这两个问题不仅在表面上有着联系, 而在所讨论的问题里, 他们自身的运动也是相互一致的.

事实上, 假设一个半径为 $\frac{d}{2}$ 的圆沿着另一个半径为 d

的圆滚动, 再假设 KL 是动圆上一条定直径. 按照哥白尼定理, K 和 L 两点沿固定的直线运动(分别沿大圆的直径 AA' 和 BB'). 因此, 直径 KL 随它的两端点, 沿着互相垂直的两条直线滑动(图 0.26), 亦即, KL 的运动与在问题1中线段的运动一样.

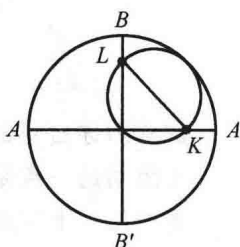


图 0.26

与线段 KL 的运动相联系的一个更有趣的问题是: 被这一运动着的线段所覆盖的是什么样的点的集合? 或者, 线段 KL 在其运动时的所有可能出现的位置的并集是什么? 这一集合的边界就是所谓的星形线(图 0.27). 可以用下面的方法来构成这一曲线: 令直径为 $\frac{d}{2}$ 的圆在直径为 $2d$ 的圆内滚动, 画出此滚圆上任一点的轨迹(图 0.28). 我们将在本书的第7章讨论这一曲线以及与之有关的内容. 在那里, 读者将会对已经讨论过的各问题之间的内部联系, 有一个更为清楚和详细的了解.

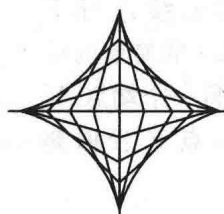


图 0.27

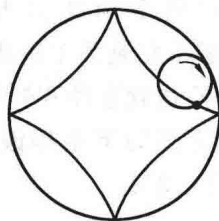


图 0.28

然而, 在讨论这样复杂的问题和曲线之前, 让我们集中注意力来处理有关直线和圆的问题. 其他形式的曲线将在本书的第6章再出现.

点的集合

在这一章里,我们将通过一些例子来讨论并说明本书所涉及的一些问题的基本提法,进而提供用于解决这些问题的一系列的概念和方法.

首先,我们来讨论在本书中常常要用到的,且居于首位的一些术语.

“点的集合”的概念是一个极普通的概念.一个点的集合可以是任何一个图形,一个或几个点,一条直线或平面上的一個区域.

在本书的许多问题里,要求找到满足一定条件的点的集合.这些问题的答案通常就是从学校里几何学中所得知的一些图形(例如直线簇、圆簇,或者,有时是平面为这些线所划分成的一些区域).人们所面临的任务,是去推测问题的答案究竟是哪一种类型的图形(图 1.1).这样,在引言中问题 1 关于猫的问题里,我们已经推测出这一答案——是一个圆.而在引言问题 3 里,已经弄清楚其答案是一条直线.

在求解某些问题时,我们必须要对它进行全面的,以确定如下的问题:

- (a) 满足已知条件的所有的点都在这一图形上.
- (b) 图形上的所有的点都满足已知条件.

有时,正反两个方面的阐述都是显而易见的,但是,有时却只能弄清楚其中的一个方面,有时甚至于难以推测其答案.

下面,我们来研究几个典型的问题.

① 一点 O 位于一线段 AC 上. 求点 M 的集合,使之满足 $\angle MOC = 2\angle MAC$ (图 1.2).

〔答〕 M 的集合为一个圆和一射线 OC 的并集(点 O 除外),此圆圆心为 O ,半径为 $|AO|$ (点 A 除外),见图 1.3.



图 1.1

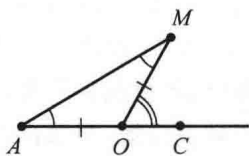


图 1.2

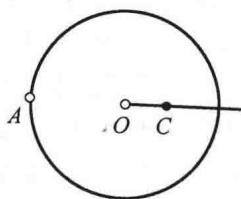


图 1.3

我们来证明这一点. 设未知集合上的点 M 不在直线 AO 上. 我们来证明从点 M 到点 O 的距离 $|MO|$ 等于 $|AO|$. 作 $\triangle OAM$. 按照三角形的外角定理, $\angle MOC$ 等于其不相邻的两个内角之和(图 1.4), 即

$$\angle OAM + \angle AMO = \angle MOC = 2\angle MAO$$

由本问题所给的条件, 可直接得出 $\angle OAM = \angle AMO$. 因此, $\triangle AMO$ 是一个等腰三角形, 亦即, $|OM| = |AO|$. 我们把这个问题表述成如下形式:

圆上的任意一点 M 都满足 $\angle MOC = 2\angle MAC$ (图 1.5).

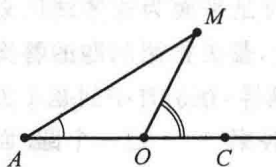


图 1.4

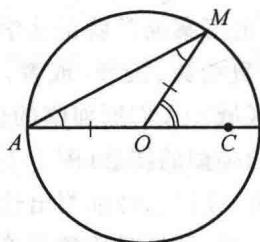


图 1.5

我们来证明它的正确性.

事实上, $\triangle AMO$ 是一个等腰三角形, 它的两个底角 $\angle A$ 和 $\angle M$ 相等. 同样地, 用关于外角的定理, 则有

$$\angle MOC = 2\angle MAC$$

现在假设点 M 在射线 OC 上, 而 $M \neq O$. 那么 $\angle MOC = 2\angle MAC$, 因此, 这一情形也得到了满足.

直线 AO 上的其他点不属于这个未知点集. 对它们来说, $\angle MOC$ 和 $\angle MAC$ 中的任一角, 当其中的一个角为 0° 时, 另一个角为一个夹角.

- ② 半径为 r_1 和 r_2 ($r_1 > r_2$) 的两个轮子沿着一条直线 l 滚动. 试求其内公切线的交点的集合(图1.6).

〔答〕 两圆内公切线交点的集合为一条平行于 l 的直线.

注意到点 M 位于两圆的公共轴上, 亦即位于直线 O_1O_2 上. 此处, O_1 和 O_2 都是圆心. 因而, 我们能求出直线 O_1O_2 与切线 T_1T_2 的交点的集合(图 1.7).

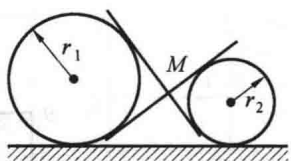


图 1.6

我们来考虑这两个圆的一种任意的组合情况, 并作出到切点 T_1, T_2 的半径 O_1T_1 和 O_2T_2 . 可以看出, 按 r_1/r_2 的比例, 点 M 把线段 O_1O_2 分成两部分 ($\text{Rt}\triangle MO_1T_1$ 和 $\text{Rt}\triangle MO_2T_2$ 是相似三角形). 很明显, 圆心 O_1 的集合和圆心 O_2 的集合是两条直线, 它们都平行于直线 l (图 1.8). 因此, 以固定的比例 r_1/r_2 将线段 O_1O_2 (其两端点在上述两条直线上) 分成两段的点 M 的集合, 本身就是一条平行于 l 的直线.

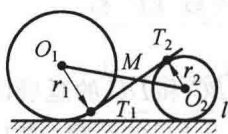


图 1.7

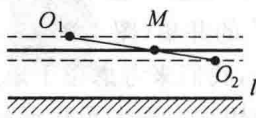


图 1.8

因此, 两切线交点的集合是一条平行于 l 的直线, 它们于离 l 线 $2r_1r_2/(r_1 + r_2)$ 处.

下一个问题要求更为周密的研究. 我们必须把平面分成若干部分, 并对其中的每一部分分别进行讨论.

- ③ 已知一个矩形 $ABCD$. 求此平面上满足下述条件的所有的点: 从每一点到直线 AB 和 CD 的距离之和等于它到直线 BC 和 AD 的距离之和(图 1.9). 我们用 a 和 b 来表示此矩形的两边的边长. 我们先考虑这是一个矩形, 而不是正方形, 亦即设 $a < b$.

位于矩形内的点, 以及在较长边的延展区内的点, 肯定不满足本题的要求. 这是因为这些点到矩形两边的距离之和, 一个为 a , 而另一个大于或等于 b (图 1.10).

现在令点 M 位于矩形较短边的延展区内(图 1.11). 用 y 表示该点到矩形较近长边的距离. 那么, 点 M 到对边的距离为 $y + a$. 这一点要满足本问题的要求, 等式

$$y + (y + a) = b$$

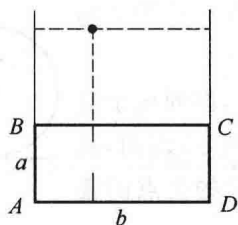


图 1.9

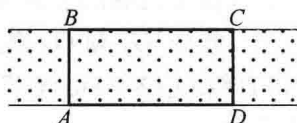


图 1.10

必须成立. 由此得知

$$y = \frac{b-a}{2}$$

因而, 在位于矩形短边延展区内的各点中, 仅仅是那些离矩形最近的长边为 $\frac{b-a}{2}$ 的点满足这一条件. 在这一范围内的点集, 就是线段 EF 和 $E'F'$ 的并集(图 1.12).

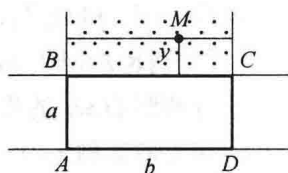


图 1.11

最后, 我们来考虑位于矩形两相邻边 BC 和 DC 的延展区内任一点的情况. 分别用 x, y 来表示从点 M 到直线 CD 和 BC 的距离(图 1.13). 那么, 我们就能把问题的要求表示成

$$x + (x + b) = y + (y + a)$$

或

$$y = x + \frac{b-a}{2}$$

的形式.

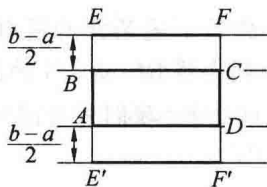


图 1.12

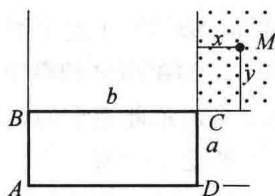


图 1.13

注意到数 x 和 y 可视为以 Cx 和 Cy 为轴的坐标系内点 M 的坐标. 在此坐标系内, 方程

$$y = x + \frac{b-a}{2}$$

表示一条直线, 该直线平行于 $\angle xCy$ 的角平分线. 这样, 我们就证明了: 在所考虑的角的内部的各点中, 仅仅是位于直线