高等院校经济管理类专业　经济数学基础系列教材

总主编　赵新泉

# 概率论与数理统计

李政兴　主　编
杜薇薇　副主编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

高等院校经济管理类专业
经济数学基础系列教材
总 主 编　赵新泉

# 概率论与数理统计

李政兴　主　编
杜薇薇　副主编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计 / 李政兴主编．—北京：中国财政经济出版社，2016.8
高等院校经济管理类专业经济数学基础系列教材 / 赵新泉总主编
ISBN 978－7－5095－6833－0

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①概率论－高等学校－教材 ②数理统计－高等学校－教材　Ⅳ.①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 151911 号

责任编辑：杜　剑　　　　责任校对：张　凡
封面设计：思梵星尚

中国财政经济出版社 出版
URL：http：//www.cfeph.cn
E－mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100142
营销中心电话：88190406　北京财经书店电话：64033436　84041336
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092 毫米　16 开　16.5 印张　401 000 字
2016 年 8 月第 1 版　2016 年 8 月北京第 1 次印刷
印数：1—5 000　定价：36.00 元
ISBN 978－7－5095－6833－0/O·0050
（图书出现印装问题，本社负责调换）
本社质量投诉电话：010－88190744

# 《概率论与数理统计》编写说明

由王明华、汪家义两位老师主编的《概率论与数理统计》第二版自2013年1月出版以来，通过在中南财经政法大学连续四届本科生中的使用，教师和学生都提出了一些中肯的意见或建议。本书在参考该版本的基础上，根据各方面的建议对该书许多章节进行了改写，对例题和习题做了重新选编，为便于学生学完一章有一个提纲挈领的认识，在各章最后增加了“重要术语及主题”，为了保持内容的连贯性，将Excel在数理统计中简单应用作为附录2置于书的末尾。目前，越来越多的学生有阅读外语文献的需要，为了满足这部分学生的需求，我们对全书的主要名词和术语都作了英文标注。

《概率论与数理统计》由李政兴担任主编，杜薇薇担任副主编，编写分工为：李政兴编写第一、第二、第三章；赵焰编写第四、第七章；杜薇薇编写第五、第六章；姚宏善编写第八、第九章。

# 目　录

## Contents

# 第1章

# 随机事件及其概率

大千世界，气象万千。自然界和人类社会各种事物的现象纷繁复杂，人们总是在不断探索各种现象发生的规律。从条件和结果的关系来说，这些现象可分为不同性质的两类：一类是在一定条件下必然发生的现象，称为**必然现象**，例如，在标准大气压下，液态水的温度超过100℃时就会汽化；在同样的气压条件下，高于4℃的水一定不会结冰，等等。另一类是在一定条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，且我们事先不能准确判断会出现哪一个结果的现象，这类现象称为**随机现象**。例如，掷一颗骰子，观察出现的点数；保险公司一年的赔偿金额；一亩试验田施肥量一定时的产量；等等。

对于随机现象，虽然在一次试验中无法准确预料试验的结果，但是进一步研究就会发现，如果在相同条件下大量重复试验，这些结果的出现会呈现一定的规律性。例如，掷一颗骰子的试验中，可能会出现1至6当中的任何一个点数，掷出一次出现哪个点数是随机的，但是如果反复掷出多次，那么1至6当中的每一个点数出现的机会几乎是均等的，即每一个点数出现的次数与掷出总次数之比几乎都是6分之1。这种在大量重复试验中呈现出的规律，我们称之为随机现象的**统计规律性**。

上面两种现象性质上的差异，决定了人们要用不同的方法来研究它们。概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，它被广泛应用于自然科学和社会科学的许多领域之中，是近代数学的一个重要组成部分。

概率论与数理统计与其他数学学科一样，有其自身的一套严格的概念体系和严密的逻辑结构，本章将介绍概率论的一些基本概念，包括概率、条件概率、事件的独立性、全概率公式和贝叶斯公式等。

# §1.1 随机事件

### 1.1.1 随机试验和样本空间

为了研究随机现象，我们要对随机现象进行观察或实验。例如，我们掷一颗骰子，观察出现的点数。这个试验具有下面三个特点：

(1) 在相同的条件下可以重复进行（重复性）；

(2) 每次试验可出现不同的结果（1 至 6 点之一），而究竟出现哪一个结果，在试验之前，我们不能准确预言（随机性）；

(3) 试验之前可以预知试验中一切可能的结果（6 种结果），每次试验中出现且只出现可能结果中的一个（明确性）。

我们把具有上述三个特点的试验称为随机试验，简称为**试验**（**Experiment**），用 $E$ 表示。随机试验中的每一个可能的结果称为**样本点**（**Sample Point**），用 $\omega$ 表示。样本点的特点是每次试验必出现一个且只能出现一个，任何两个样本点都不可能同时出现。一个随机试验的所有可能的结果（样本点）是明确的，通常把所有样本点组成的集合称为**样本空间**（**Sample Space**），用 $S$ 表示。一般可以根据随机试验所观察到的内容来写出样本空间。

**例 1.1** 试验 $E$：掷一颗骰子，观察其出现的点数，则试验的所有的可能结果有 6 种：1 点，2 点，…，6 点，样本空间为 $S=\{1$ 点，2 点，…，6 点$\}$，若用 $\omega_i$ 表示出现 $i$ 点，$i=1,2,\cdots,6$，则样本空间也可表示为 $S=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$。

**例 1.2** 试验 $E$：记录某城市 120 急救中心一昼夜接到的呼叫次数，则试验的所有的可能结果为全体自然数，样本空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$。

**例 1.3** 试验 $E$：抽取一个新灯泡观察其寿命，用 $t$ 表示"灯泡的寿命为 $t$ 小时"，则样本空间可表示为 $S=\{t\,|\,0\leqslant t<+\infty\}$。

**例 1.4** 试验 $E$：观察某地区一年当中的最低温度和最高温度，分别用 $x$ 和 $y$ 表示，则样本空间可表示为 $S=\{(x,y)\,|\,T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里设 $T_0$ 和 $T_1$ 是该地区气温的下限和上限。

只有有限个样本点的样本空间称为有限样本空间，如例 1.1，包含无穷多个样本点的样本空间称为无限样本空间，如例 1.2 等。

关于样本空间的记号，如果用 $\omega$ 表示任一样本点，则样本空间抽象地记作 $S=\{\omega\}$。

### 1.1.2 随机事件

在随机试验中，人们通常关心什么结果会发生，例如，在例 1.3 中，若规定寿命小于 500 小时为次品，否则为合格品。我们关心 $t\geqslant 500$ 这个结果是否发生，满足这一条件的样本点组成 $S$ 的一个子集：$A=\{t\,|\,t\geqslant 500\}$，我们称 $A$ 为该随机试验 $E$ 的一个随机事件，当且仅当 A 中某个样本点出现时，有 $t\geqslant 500$，表示抽取的灯泡为合格品。

一般地，我们称试验 $E$ 的样本空间 $S$ 的子集为 $E$ 的随机事件（**Random Event**），简称

**事件**。通常用大写英文字母 $A,B,C$ 等表示。当且仅当随机事件 $A$ 中某个样本点出现时，称事件 $A$ 发生。例如在例1.1中，$A=\{2,4,6\}$ 表示“出现偶数点”，例1.3中，$A=\{t \mid t\geqslant 500\}$ 表示“合格”（这里规定寿命大于等于500小时为合格品）。有时也将一个事件表示为｛样本点满足的条件｝，如｛偶数点｝，｛合格品｝等。

特别地，由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**（**Elementary Event**），如例1.1中有6个基本事件 $\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}$。除基本事件外，一般是由若干个样本点组成的事件，相对于基本事件，我们称这种事件为**复合事件**（**Compound Event**），如例1.1中事件 $\{2,4,6\}$ 等。

样本空间 $S$ 包含所有的样本点，它在每次试验中一定发生，$S$ 称为**必然事件**。空集 $\varnothing$ 不含任何样本点，它在每次试验中一定不会发生，$\varnothing$ 称为**不可能事件**。显然 $S$ 和 $\varnothing$ 都是 $S$ 的子集，为统一起见，仍然把它们称为随机事件，但是本质上它们的发生不是随机的。

总之，样本空间是随机试验的所有样本点构成的集合，而随机事件是样本空间的任意子集。

### 1.1.3　事件的关系与运算

根据上面的定义，事件是一个集合，而集合的关系和运算我们在集合论中已经讨论过，因而事件的关系和运算自然运用集合的关系和运算来处理。下面根据“事件发生”的含义，定义事件的关系与运算，并用集合论中的方式表示出来。

（1）事件的包含和相等

如果事件 $A$ 的发生必然导致事件 $B$ 的发生，即属于 $A$ 的每个样本点也都属于 $B$，则称事件 $A$ 包含于事件 $B$，或称事件 $B$ 包含事件 $A$，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。显然，对于任意随机事件 $A$，有 $\varnothing\subset A\subset S$。

例如，在例1.1中，若记 $A=\{3,5\}$，$B=\{$奇数点$\}=\{1,3,5\}$，则有 $A\subset B$。

如果事件 $A$ 包含事件 $B$，且事件 $B$ 也包含事件 $A$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 相等。即事件 $A$ 与事件 $B$ 的样本点完全相同。记作 $A=B$。

例如，在例1.1中，若记 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{$奇数点$\}$，则有 $A=B$。

（2）事件的并（或和）

若 $A$ 和 $B$ 是两个随机事件，则“事件 $A$ 和 $B$ 中至少有一个发生”也是一个随机事件，这一事件称作事件 $A$ 与 $B$ 的并（或和）事件，记作 $A\cup B$（或 $A+B$）。和事件 $A\cup B$ 是由 $A$ 和 $B$ 的样本点合并在一起构成的集合。

例如，在例1.1中，若记 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{$点数大于4$\}=\{5,6\}$，则有 $A\cup B=\{1,3,5,6\}$。

（3）事件的交（或积）

若 $A$ 和 $B$ 是两个随机事件，则“事件 $A$ 和 $B$ 都发生”也是一个随机事件，这一事件称作事件 $A$ 与 $B$ 的交（或积）事件，记作 $A\cap B$（或 $AB$）。积事件 $A\cap B$ 是由 $A$ 和 $B$ 的公共样本点构成的集合。

例如，在例1.1中，若记 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{5,6\}$，则有 $A\cap B=\{5\}$。

类似地，可定义 $n$ 个事件的并 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 和 $n$ 个事件的交 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$

$=\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 的运算。

(4) 事件的差

若 $A$ 和 $B$ 是两个随机事件，则"事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生"也是一个随机事件，这一事件称作事件 $A$ 与 $B$ 的差事件，记作 $A-B$。差事件 $A-B$ 是由属于 $A$ 但不属于 $B$ 的那些样本点构成的集合。

例如，在例 1.1 中，若记 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{5,6\}$，则有 $A-B=\{1,3\}$。

(5) 互不相容事件

如果事件 $A$ 与 $B$ 不能同时发生，也就是说，$A\cap B$ 是不可能事件，即 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 $A$ 与 $B$ 是**互不相容**的（或**互斥**的）。显然，任意两个基本事件是互不相容的。

(6) 对立事件

若 $A$ 是一个随机事件，则"事件 $A$ 不发生"也是一个随机事件，这一事件称作事件 $A$ 的**对立事件**（或**逆事件**），记作 $\overline{A}$。$A$ 的对立事件 $\overline{A}$ 是由那些不属于 $A$ 的样本点构成的集合。$A$ 与 $\overline{A}$ 互为对立事件。

例如，在例 1.1 中，若记 $A=\{1,3,5\}=\{$奇数点$\}$，则 $\overline{A}=\{2,4,6\}=\{$偶数点$\}$。

$A$ 和 $\overline{A}$ 有如下关系：

$$\overline{A}=S-A,\ \overline{\overline{A}}=A,\ A\cap\overline{A}=\varnothing,\ A\cup\overline{A}=S。$$

(7) 完备事件组

若 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，满足以下两个条件：

① $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j(i,\ j=1,2,\cdots,n)$，

② $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=S$，

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个**完备事件组**。

同样，若可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$满足

① $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j(i,\ j=1,2,\cdots)$，

② $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=S$，

则称可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 构成一个**完备事件组**。完备事件组也称为 $S$ 的一个**划分**。

例如，全体基本事件构成一个完备事件组。在例 1.1 中，若用 $A_i$ 表示"出现 $i$ 点"，即 $A_i=\{i\},i=1,2,\cdots,6$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 构成一个完备事件组。显然，对任一事件 $A$，$A$ 和 $\overline{A}$ 构成完备事件组。

事件的关系和运算常用图形（文氏图）来直观表示，如图 1－1 所示。

### 1.1.4 事件的运算律

由于事件的关系和运算是根据集合的关系和运算来定义的，因此事件的运算律与集合的运算律完全相同。

(1) **交换律**：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) **结合律**：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

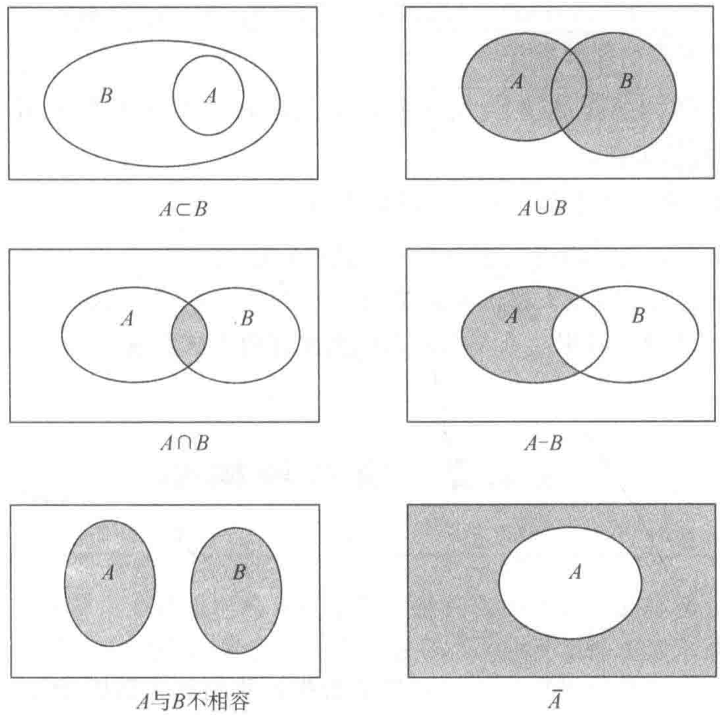


图 1-1　事件的关系与运算文氏图

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

（3）**分配律**：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

（4）**差化积**：$A-B=A\overline{B}=A-AB$；

（5）**德摩根（Augustus de Morgan）律**：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

以上运算律的证明完全可以按照集合论中的方法进行。

**例 1.5**　在产品质量的抽样检验中，每次抽取一个产品，记事件 $A_n=\{$第 $n$ 次取到正品$\}$，$n=1$，2，3，用事件的运算式表示下列事件。

（1）前两次取到正品，第三次未取到正品；

（2）三次都未取到正品；

（3）三次中只有一次取到正品；

（4）三次中至多有一次取到正品；

（5）三次中至少有一次取到正品。

**解**：（1）$A_1A_2\overline{A_3}$；

（2）$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ 或 $\overline{A_1+A_2+A_3}$；

（3）$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$；

（4）$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ 或 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}+\overline{A_1}\,\overline{A_3}+\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；

（5）$A_1+A_2+A_3$。

**例 1.6** 甲、乙、丙三人各进行一次试验，事件 $A_1, A_2, A_3$ 分别表示甲，乙，丙试验成功，说明下列运算式表示何种事件：

$$\overline{A_1};\ A_1+A_2;\ \overline{A_2A_3};\ \overline{A_2}+\overline{A_3};\ A_1A_2A_3;\ A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3。$$

**解：** $\overline{A_1}=\{$甲试验失败$\}$；

$A_1+A_2=\{$甲、乙两人中至少有一人试验成功$\}$；

$\overline{A_2A_3}=\overline{A_2}+\overline{A_3}=\{$乙、丙两人至少有一人试验失败$\}$；

$A_1A_2A_3=\{$甲、乙、丙三人均试验成功$\}$；

$A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3=\{$甲、乙、丙三人中至少有两人试验成功$\}$。

## §1.2 频率与概率

### 1.2.1 频率

随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生，我们研究随机事件，总是希望弄清楚随机事件在一次试验中发生的可能性有多大。例如，学校决定 4 月 30 日召开运动会，希望知道这一天下雨的可能性有多大，只要查一查历年的气象资料就知道了，如果在过去 50 年中只有 5 年的 4 月 30 日下过雨，那么这一天下雨的可能性就是十分之一，这就是频率的概念。

**定义 1.1** 设随机事件 $A$ 在 $n$ 次重复试验中发生了 $n(A)$ 次，则称比值 $\frac{n(A)}{n}$ 为随机事件 $A$ 在 $n$ 次重复试验中发生的**频率**（**Frequency**），记为 $\mu_n(A)$，即

$$\mu_n(A)=\frac{n(A)}{n}。$$

由频率的定义不难得到频率具有下述基本性质：

（1）**非负性**（**Nonnegativity**）：对任何事件 $A$，有 $\mu_n(A)\geqslant 0$；

（2）**规范性**（**Normativity**）：对于样本空间 $S$，有 $\mu_n(S)=1$；

（3）**有限可加性**（**Finite Additivity**）：对任意 $m$ 个两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，有

$$\mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\mu_n(A_i)。$$

频率 $\mu_n(A)$ 表示事件 $A$ 在 $n$ 次试验中发生的频繁程度，频率越大，事件 $A$ 发生越频繁，意味着 $A$ 在一次试验中发生的可能性就越大。因而可以设想用频率来表示事件 $A$ 在一次试验中发生的可能性的大小。

下面是龚德恩教授的试验结果：掷一枚硬币，观察事件 $A=\{$正面朝上$\}$ 发生的频率，试验次数 $n$ 分别取 10，100 和 600，每一种次数各掷 10 遍，结果如表 1-1 所示。

表 1－1　　频率稳定性试验

| 试验序号 | $n=10$ | | $n=100$ | | $n=600$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $n(A)$ | $\mu_n(A)$ | $n(A)$ | $\mu_n(A)$ | $n(A)$ | $\mu_n(A)$ |
| 1 | 2 | 0.2 | 64 | 0.64 | 315 | 0.525 |
| 2 | 4 | 0.4 | 47 | 0.47 | 296 | 0.493 |
| 3 | 3 | 0.3 | 46 | 0.46 | 302 | 0.503 |
| 4 | 7 | 0.7 | 59 | 0.59 | 312 | 0.520 |
| 5 | 9 | 0.9 | 49 | 0.49 | 300 | 0.500 |
| 6 | 5 | 0.5 | 60 | 0.60 | 306 | 0.510 |
| 7 | 3 | 0.3 | 56 | 0.56 | 294 | 0.490 |
| 8 | 8 | 0.8 | 56 | 0.56 | 314 | 0.523 |
| 9 | 5 | 0.5 | 40 | 0.40 | 302 | 0.503 |
| 10 | 4 | 0.4 | 48 | 0.48 | 295 | 0.492 |

从试验结果可以发现，当试验次数 $n$ 较小时，随机事件 $A$ 发生的频率 $\mu_n(A)$ 在 0 到 1 之间的波动幅度较大，当试验次数 $n$ 逐渐增大时，频率的这种波动性在逐渐减小，并且随着 $n$ 的不断增大，$A$ 发生的频率总在一确定的数值附近摆动，有稳定于一常数值的趋势。这种性质称为**频率的稳定性（Stability）**。

历史上人们进行过投掷硬币的试验，来观察“正面朝上”这一事件发生的统计规律，其试验结果如表 1－2 所示。

表 1－2　　频率的稳定值

| 实验者 | $n$ | $n(A)$ | $\mu_n(A)$ |
|---|---|---|---|
| 德·摩根 | 2048 | 1061 | 0.5181 |
| 蒲　丰 | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| 皮尔逊 | 12000 | 6019 | 0.5016 |
| 皮尔逊 | 24000 | 12012 | 0.5005 |
| 维　尼 | 30000 | 14994 | 0.4998 |

从表 1－2 可以看出，随着试验次数 $n$ 的无限增大，正面出现的频率 $\mu_n(A)$ 逐渐稳定于确定的常数值 0.5。这一常数就是事件 $A$ 在一次试验中发生的可能性大小的度量，称为事件 $A$ 发生的概率。

### 1.2.2　概率

（1）概率的统计定义

**定义 1.2**　在相同的条件下，重复进行 $n$ 次试验，事件 $A$ 发生的频率稳定地在某一确定的常数 $a$ 附近摆动，且一般说来，$n$ 越大，摆动的幅度越小。则称常数 $a$ 为事件 $A$ 发生的**概率（Probability）**，记为 $P(A)$。

一个事件发生的频率与试验次数 $n$ 有关，而一个事件发生的概率却是与试验次数 $n$ 无关

的，它完全由事件本身决定，是先于试验而客观存在的。因此，频率与概率是两个完全不同的概念。但是，根据频率的稳定性，当试验次数 $n$ 较大时有 $\mu_n(A)\approx P(A)$。因此，在实际计算中，经常用试验次数较大时事件 $A$ 发生的频率来近似计算事件 $A$ 发生的概率。

（2）概率的公理化定义

概率的统计定义表明，我们可以利用事件发生的频率来表征事件发生的可能性的大小，但是在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，得到事件发生的频率。同时，为了理论研究的需要，我们必须给概率一个更明确的定义。我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出概率的公理化定义。

**定义 1.3** 设 $E$ 是随机试验，$S$ 是它的样本空间。对于随机试验 $E$ 的每一个随机事件 $A$ 赋予一个实数，记为 $P(A)$，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列三条公理：

**公理 1 非负性**：对任意事件 $A$，有 $P(A)\geqslant 0$；

**公理 2 规范性**：$P(S)=1$；

**公理 3 可列可加性（Countable Additivity）**：对于任意可列个两两互不相容的事件 $A_1$，$A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\text{。} \tag{1.1}$$

则称此实数 $P(A)$ 为事件 $A$ 的**概率**。

由定义 1.3 我们可以看到，概率公理化定义并没有考虑每一个事件 $A$ 对应的概率 $P(A)$ 是怎样确定的，值为多大，而是要求集合函数 $P(\cdot)$ 应满足一些必要的条件，这些条件被总结为三个公理，它是对概率的现实直观进行的抽象。利用这三个公理，我们可以对概率进行进一步研究，得到概率的许多有用性质。

### 1.2.3 概率的性质

从概率的公理化定义出发，可以推导出概率的许多性质，这些性质有助于我们进一步理解概率的概念，同时，它们也是概率计算的重要基础。

**性质 1** 不可能事件 $\varnothing$ 的概率等于零，即 $P(\varnothing)=0$。

**证**：令 $A_i=\varnothing(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$。由公理 3 知

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing),$$

由公理 2 知 $P(\varnothing)\geqslant 0$，故必有 $P(\varnothing)=0$。

**性质 2（有限可加性）** 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\text{。} \tag{1.2}$$

（1.2）式也称为加法公式。

**证**：令 $A_i=\varnothing\ (i=n+1,n+2,\cdots)$，由公理 3 及性质 1，得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\text{。}$$

特别地，对于两个互不相容的事件 $A$ 与 $B$，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\text{。} \tag{1.3}$$

**性质3（对立事件的概率）**　对于任意事件 $A$，有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)。\tag{1.4}$$

**证：** 因为 $\overline{A} \cup A = S$,，且 $\overline{A} \cap A = \varnothing$，由（1.3）式，得

$$P(\overline{A}) + P(A) = P(\overline{A} \cup A) = P(S) = 1,$$

移项，得证。

**性质4（减法公式）**　设 $A,B$ 是两个随机事件，则

$$P(A-B) = P(A) - P(AB)。\tag{1.5}$$

特别地，若 $B \subset A$，则有

$$(1)\ P(A-B) = P(A) - P(B)\ ;\tag{1.6}$$

$$(2)\ P(B) \leqslant P(A)。\tag{1.7}$$

**证：** 因为 $(A-B) \cup (AB) = A$，且 $(A-B) \cap (AB) = \varnothing$，由（1.3）式，得

$$P(A-B) + P(AB) = P[(A-B) \cup (AB)] = P(A),$$

移项，得（1.5）式。当 $B \subset A$ 时，有 $AB = B$，得（1.6）式。

由（1.6）式及概率的非负性，有 $P(A-B) = P(A) - P(B) \geqslant 0$，移项，得（1.7）式。

下面性质的证明留给读者自己证明。

**性质5**　对于任一事件 $A$，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$。

**性质6（广义加法公式）**　对于任意两个随机事件 $A,B$，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)。\tag{1.8}$$

对于任意三个随机事件 $A,B,C$，有

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &- P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)。\end{aligned}\tag{1.9}$$

一般地，对任意 $n$ 个随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = &\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) \\ &+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)。\end{aligned}\tag{1.10}$$

**例1.7**　设事件 $A,B$ 互不相容，已知 $P(A) = a$，$P(B) = b$。求 $P(A+B)$；$P(\overline{A}+B)$；$P(\overline{A}B)$；$P(\overline{A}\,\overline{B})$。

**解：** 由于 $AB = \varnothing$，故 $B \subset \overline{A}$，从而

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = a + b,$$

$$P(\overline{A}+B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - a,$$

$$P(\overline{A}B) = P(B) = b。$$

再由德摩根律，得

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = 1 - a - b。$$

**例1.8**　已知 $P(\overline{A}) = 0.5, P(\overline{A}B) = 0.1, P(B) = 0.4$，求（1）$P(AB)$；（2）$P(A\overline{B})$；（3）$P(\overline{A}\,\overline{B})$。

**解**：(1) 因为 $P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)$，所以

$$P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.4-0.1=0.3;$$

(2) $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.3=0.2$;

(3) $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A}-B)=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=0.5-0.1=0.4$。

**例 1.9** 设事件 $A$ 与 $B$ 的概率都大于 0，比较概率 $P(A)$，$P(AB)$，$P(A+B)$，$P(A)+P(B)$的大小（用不等号把它们连接起来）。

**解**：由于对任何事件 $A$，$B$ 均有

$$AB\subset A\subset A+B,$$

由性质 4，得 $P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A+B)$;

又 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant P(A)+P(B)$,

所以 $P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A+B)\leqslant P(A)+P(B)$。

# §1.3 古典概型与几何概型

### 1.3.1 古典概型

例 1.1 中掷一颗骰子的试验有两个特点，一是样本空间是有限的，二是每一个基本事件发生的可能性相同。具有上述两个特点的试验是大量存在的，这种随机试验形式直观，容易理解，曾是概率论发展初期的主要研究对象，一般称为古典概型。

**古典概型（Classical Models of Probability）**是指满足下列两个条件的概率模型：

(1)（有限样本空间）随机试验只有有限个可能结果，即基本事件总数为有限个；

(2)（等可能性）每一个基本事件发生的可能性相同。

对于一个随机试验 $E$ 来说，以上两个条件在数学上可表述为：

(1) 样本空间有限，即 $S=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$;

(2) $P\{\omega_1\}=P\{\omega_2\}=\cdots=P\{\omega_n\}$。

设事件 $A$ 包含 $m$ 个样本点，下面推导事件 $A$ 的概率公式。

根据概率的公理化定义，知

$$1=P(S)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\}\right)=\sum_{i=1}^{n}P\{\omega_i\}=nP\{\omega_i\},$$

所以

$$P\{\omega_i\}=\frac{1}{n},\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

设 $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}=\bigcup\limits_{k=1}^{m}\{\omega_{i_k}\}$，由于$\{\omega_{i_1}\},\{\omega_{i_2}\},\cdots,\{\omega_{i_m}\}$两两互不相容，由概率的有限可加性得

$$P(A)=\sum_{k=1}^{m}P(\omega_{i_k})=\frac{m}{n},$$