

数学分析与高等代数 考研要点与真题精解

Calculus and Linear Algebra: An Essential Guide

刘博雷 (Bolei Liu) 尹平 (Ping Yin) 编著

航空工业出版社

Calculus and Linear Algebra: An Essential Guide

数学分析与高等代数

考研要点与真题精解

刘博雷 (Bolei Liu) 尹平 (Ping Yin) 编著



航空工业出版社

北京

内 容 提 要

本书分为数学分析篇和高等代数篇,其中,数学分析篇共7章,主要包括:极限、一元函数的连续性、一元函数微分学、一元函数积分学、级数、多元函数微分学、多元函数积分学;高等代数篇共9章,主要包括:多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、 λ -矩阵、欧氏空间、双线性空间与辛空间。书中每章由考研要点指导和名校考研真题精解两部分内容组成。

本书可作为普通高等院校数学各专业的考研教材,还可作为读者的自学参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析与高等代数: 考研要点与真题精解 / 刘博雷, 尹平主编. — 北京: 航空工业出版社, 2018. 11
ISBN 978-7-5165-1761-1

I. ①数… II. ①刘… ②尹… III. ①数学分析—研究生—入学考试—自学参考资料②高等代数—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①017②015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 259671 号

数学分析与高等代数 考研要点与真题精解 Calculus and Linear Algebra: An Essential Guide

航空工业出版社出版发行

(北京市朝阳区北苑2号院 100012)

发行部电话: 010-84936597 010-84936343

北京谊兴印刷有限公司印刷

全国各地新华书店经售

2018年11月第1版

2018年11月第1次印刷

开本: 787×1092

1/16

印张: 22

字数: 508千字

印数: 1—2000

定价: 58.00元

前 言

“数学分析”和“高等代数”是数学专业中最重要的两门基础课，也是数学各专业考研的必考科目。历年的考研真题，除了在内容上具有代表性外，还包含了很多有价值的信息，如：试题的题型、试题的考点、试题的重点和难点、每年的必考知识点、每个知识点的考研命题频率、每个章节的考研命题比例等，因此数学分析和高等代数的考研真题，对数学各专业的考研复习有着至关重要的作用。

为了使数学专业、数学要求较高专业的考生从考研真题中吸取更多的精华，掌握更多的知识、解题技巧和解题方法，作者收集了一些名校多年的数学分析和高等代数考研真题，对其进行了分章节编排，给出详细的解答，并对每章节匹配相关的考研要点指导，以便考生从中抓住考试的重点和难点，从而提高考研的复习效率。

作者在编写本书的过程中遵循如下原则：

一、不罗列教材中的基本内容，根据平时学习和实践的经验和体会，参考数学分析教学大纲、高等代数教学大纲、研究生入学考试大纲等，总结各章节的要点和考查点，并对每章的重点问题和典型问题的常用方法进行了归纳。

二、在挑选和讲解经典考研真题时，不追求大而全、偏而难，只注重对名校考研真题解题思路的分析、解题方法的归纳和解题技巧的提炼，尽量体现出不同题目中的内在逻辑关联。

本书在编写中参考了相关院校全国硕士研究生入学考试的真题，以及数学分析教学大纲、高等代数教学大纲、研究生入学考试大纲等内容，在此对本书所引用试题的相关院校和命题老师，以及相关书目的作者和出版社表示衷心的感谢；同时，还要感谢航空工业出版社对本书出版的大力支持。

由于编者水平有限，加之编写时间紧凑，教材中难免有疏漏之处，恳请各位老师和广大读者批评指正，以不断提高本教材水平。

编 者

2018年10月

目 录

数学分析篇 (Calculus)

第 1 章 极限	2
1.1 考研要点指导	2
1.2 名校考研真题精解	3
1.2.1 数列的极限、函数的极限考研真题精解	3
第 2 章 一元函数的连续性	12
2.1 考研要点指导	12
2.2 名校考研真题精解	12
2.2.1 函数的连续性考研真题精解	12
2.2.2 函数的一致连续性考研真题精解	22
第 3 章 一元函数微分学	28
3.1 考研要点指导	28
3.2 名校考研真题精解	29
3.2.1 导数与微分考研真题精解	29
3.2.2 微分学基本定理及导数的应用考研真题精解	40
第 4 章 一元函数积分学	52
4.1 考研要点指导	52
4.2 名校考研真题精解	54
4.2.1 不定积分的计算考研真题精解	54
4.2.2 函数的可积性与定积分的性质考研真题精解	68
4.2.3 定积分的计算及定积分的应用考研真题精解	84
第 5 章 级数	97
5.1 考研要点指导	97
5.2 名校考研真题精解	100
5.2.1 数项级数、反常积分考研真题精解	100



5.2.2 函数项级数、幂级数、傅里叶级数考研真题精解	108
第 6 章 多元函数微分学	123
6.1 考研要点指导	123
6.2 名校考研真题精解	125
6.2.1 多元函数的极限、连续、偏导数和全微分考研真题精解	125
6.2.2 隐函数存在定理及求偏导、偏导数的应用考研真题精解	131
第 7 章 多元函数积分学	141
7.1 考研要点指导	141
7.2 名校考研真题精解	143
7.2.1 含参变量的积分、重积分考研真题精解	143
7.2.2 曲线积分、曲面积分和各種积分之间的联系考研真题精解	149
高等代数篇 (Linear Algebra)	
第 8 章 多项式	156
8.1 考研要点指导	156
8.2 名校考研真题精解	156
8.2.1 多项式的概念、带余除法和整除考研真题精解	156
8.2.2 多项式的最大公因式、互素考研真题精解	159
8.2.3 重因式、多项式函数和多项式的根考研真题精解	163
8.2.4 复数、实数和有理数域上的多项式的因式分解考研真题精解	169
8.2.5 n 元多项式与 n 元对称多项式考研真题精解	173
第 9 章 行列式	176
9.1 考研要点指导	176
9.2 名校考研真题精解	177
9.2.1 行列式的定义、性质以及行列式的计算考研真题精解	177
9.2.2 代数余子式、行列式的乘法规则和克拉默法则考研真题精解	186
第 10 章 线性方程组	194
10.1 考研要点指导	194
10.2 名校考研真题精解	195
10.2.1 向量的线性相关性、矩阵的秩考研真题精解	195
10.2.2 线性方程组的求解、解的结构和解得判定考研真题精解	200



第 11 章 矩阵	210
11.1 考研要点指导	210
11.2 名校考研真题精解	212
11.2.1 矩阵运算及矩阵的逆考研真题精解	212
11.2.2 矩阵的秩、初等矩阵和矩阵分块考研真题精解	222
第 12 章 二次型	232
12.1 考研要点指导	232
12.2 名校考研真题精解	234
12.2.1 二次型的矩阵、标准形和规范形考研真题精解	234
12.2.2 实二次型的正定、负定、半正定和半负定考研真题精解	240
第 13 章 线性空间	248
13.1 考研要点指导	248
13.2 名校考研真题精解	249
13.2.1 线性空间、基、维数和过渡矩阵考研真题精解	249
13.2.2 子空间、直和及线性空间同构考研真题精解	255
第 14 章 线性变换	266
14.1 考研要点指导	266
14.2 名校考研真题精解	267
14.2.1 线性变换的运算与矩阵、特征值与特征向量考研真题精解	267
14.2.2 对角矩阵、线性变换的值域与核、不变子空间考研真题精解	283
第 15 章 λ -矩阵	300
15.1 考研要点指导	300
15.2 名校考研真题精解	302
15.2.1 λ -矩阵、若尔当标准形和有理标准形考研真题精解	302
第 16 章 欧氏空间、双线性函数与辛空间	317
16.1 考研要点指导	317
16.2 名校考研真题精解	318
16.2.1 欧氏空间、酉空间考研真题精解	318
16.2.2 双线性函数、辛空间考研真题精解	333
参考文献	340

数学分析篇 (Calculus)

第 1 章 极 限

1.1 考研要点指导

1. 本章学习的内容是极限的理论, 主要包括三大部分: 一是初等函数; 二是数列极限; 三是函数极限.

2. 本章重点有八个方面:

(1) 掌握基本初函数的性质和图像特点.

(2) 理解初等函数的概念及其基本性质.

(3) 掌握重要的分段函数的形式及其性质, 如符号函数、取整函数、黎曼函数、狄利克雷函数等.

(4) 熟练掌握函数的复合运算及反函数的求解.

(5) 熟练掌握数列极限的定义与性质.

(6) 熟练掌握求数列极限的常用方法, 掌握由递推公式给出的数列求极限的基本技巧, 这是历年研究生命题的热点, 值得关注.

(7) 熟练掌握函数极限的定义与性质.

(8) 熟练掌握求函数极限的常用方法, 包括两个重要极限、等价无穷小量代换等方法, 这在研究生考题中经常出现, 值得读者重点注意.

3. 求极限或验证极限的常用方法:

(1) 用数列极限定义或函数极限定义验证极限.

(2) 用单调有界数列必有极限定义证明极限的存在性.

(3) 用夹逼定理求极限.

(4) 用柯西收敛准则证明极限的存在性.



1.2 名校考研真题精解¹

1.2.1 数列的极限、函数的极限考研真题精解

1. 设 $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$, 求证:

(1) 对任意自然数 n , 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 内有且仅有一个根;

(2) 设 $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 是 $f_n(x) = 1$ 的根, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{3}$. (北京大学, 1987)

解: (1) 因 $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上是连续的, 且 $f'_n(x) = -\sin x$

$(1 + 2\cos x + \cdots + n\cos^{n-1} x) < 0$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 则 $f_n(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上严格单调递减, 而 $f(0) = n \geq 1$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$, 故方程 $f_n(x) = 1$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 内有且仅有一个根.

(2) 令 $y_n = \cos x_n$, 则 $\frac{1}{2} < y_n \leq 1$. 下证 $\{y_n\}$ 是单调递减的.

假设存在 n , 使得 $y_{n+1} \geq y_n$, 则

$$1 = y_{n+1} + y_{n+1}^2 + \cdots + y_{n+1}^n + y_{n+1}^{n+1} > y_n + y_n^2 + \cdots + y_n^n + y_n^{n+1} = 1 + y_n^{n+1} > 1,$$

矛盾. 故对任意 n , 都有 $y_{n+1} < y_n$, 故 $\{y_n\}$ 是单调递减的, 于是 $0 \leq y_n \leq y_2 < 1$, $n \geq 2$,

故 $0 \leq y_n^n \leq y_2^n \rightarrow 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^n = 0$.

$$1 = y_n + y_n^2 + \cdots + y_n^n = \frac{y_n(1 - y_n^n)}{1 - y_n}, \quad n \geq 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - y_n^n) = 1, \quad \text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{1 - y_n} = 1, \quad \text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{3}.$$

2. 判断下列命题真伪, 不必说明理由.

(1) 对数列 $\{a_n\}$ 作和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 若 $\{S_n\}$ 是有界数列, 则 $\{a_n\}$ 是有界列. ()

(2) 数列 $\{a_n\}$ 存在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的充要条件是: 对任一自然数 p , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0. \quad (\text{北京大学, 1996}) \quad ()$$

1 注: 本节考研真题精解是北京大学历年考研专题部分, 让读者从纵向了解一所名校的考研动态.



解: (1) 真命题. 因 $a_n = \begin{cases} S_1, & \text{当 } n=1, \\ S_n - S_{n-1}, & \text{当 } n=1, \end{cases}$ 且 $\{S_n\}$ 是有界数列, 则 $\{a_n\}$ 是有界列.

(2) 伪命题. 例如: $a_n = \sqrt{n}$, 则对任一自然数 p , 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$, 但数列 $\{a_n\}$ 的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在.

3. 设 $a_n \neq 0 (n=1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 若存在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, 证明: $|l| \leq 1$. (北京大学, 1996)

证: 用反证法假设结论不成立, 则 $|l| > 1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |l| > 1$. 任取 $r \in (1, l)$, 则存在 $N \in \mathbb{N}^+$, 使得对任意正整数 $n > N$, 恒有 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq r$, 即 $|a_{n+1}| \geq r|a_n|$, 故对任意正整数 $n > N$, 有 $|a_n| \geq r|a_{n-1}| \geq r^2|a_{n-2}| \geq \dots \geq r^{n-N-1}|a_{N+1}| \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, 这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 是矛盾的, 故 $|l| \leq 1$.

4. 设 $a_n \geq 0 (n=1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. (北京大学, 1997)

证: 因 $a_n \geq 0 (n=1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则由保号性可知, $a \geq 0$.

当 $a=0$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n < \varepsilon^2$, 于是

$$|\sqrt{a_n} - 0| < \varepsilon, \text{ 故此时 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

当 $a > 0$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$,

$$\text{于是 } |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon, \text{ 故此时 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

5. 计算下列极限 (写出演算过程):

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+a^n} \quad (a > 0); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cot x}{x} \right). \quad (\text{北京大学, 1998})$$

解: (1) 先证命题: 设 $a_1, a_2, \dots, a_k \geq 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} = \max \{a_1, a_2, \dots, a_k\}.$$

令 $A = \max \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 则



$$A \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \leq \sqrt[n]{k} A,$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k} = 1$, 及夹逼定理可知: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = A$, 故原命题成立.

回到本题, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + a^n} = \max\{1, a\}$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cot x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

6. 判断下列命题真伪. 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 若在任一子列 $\{a_{n_k}\}$ 中均存在收敛子列 $\{a_{n_{k_j}}\}$, 则 $\{a_n\}$ 必为收敛列. (北京大学, 1999)

解: 伪命题. 数列 $\{(-1)^n\}$ 的任一子列都有收敛子列, 但该数列不收敛.

7. 求下列极限值 (写出计算过程):

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + a^n} \quad (a > 0); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{\alpha \ln(1-x) + \beta(1 - e^{-x^2})}, \quad a^2 + \alpha^2 \neq 0. \quad (\text{北京大学, 1999})$$

解: (1) 请参见第5题的第(1)小题.

$$(2) \text{ 因 } \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi},$$

$$\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi},$$

$$\text{因此, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

(3) 若 $\alpha \neq 0$, 则 $\alpha \ln(1-x) + \beta(1 - e^{-x^2}) \sim -\alpha x$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{\alpha \ln(1-x) + \beta(1 - e^{-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{-\alpha x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{a \tan x}{\alpha x} - \frac{b(1 - \cos x)}{\alpha x} \right)$$



$$= -\frac{a}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} - \frac{b}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = -\frac{a}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} - \frac{b}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = -\frac{a}{\alpha}.$$

若 $\alpha = 0$, 则 $\beta \neq 0$, $a \neq 0$, $a \tan x + b(1 - \cos x) \sim ax$, $\alpha \ln(1-x) + \beta(1 - e^{-x^2}) \sim \beta x^2$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{\alpha \ln(1-x) + \beta(1 - e^{-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\beta x^2} = \infty.$$

8. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n}}{1 + a^{2n}}$. (北京大学, 2001)

解: 当 $|a^2| < 1$, 即 $|a| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n}}{1 + a^{2n}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$.

当 $|a^2| = 1$, 即 $|a| = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n}}{1 + a^{2n}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$.

当 $|a^2| > 1$, 即 $|a| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n}}{1 + a^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + a^{-2n}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$.

9. 设 $a > \frac{1}{4}$, $x_1 \geq 0$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $n = 1, 2, \dots$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (北京大学, 2002)

解: 令 $f(x) = \sqrt{a + x}$, $x \geq 0$, 则 $f(x) \geq \sqrt{a} > \frac{1}{2} > 0$.

于是 $0 < f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a+x}} < \frac{1}{2\sqrt{a}} < 1$, $f(x)$ 为 $[0, +\infty)$ 到 $[0, +\infty)$ 的压缩映射, 故有唯一

的不动点, 且 $\{x_n\}$ 收敛于该不动点, 解方程 $x = f(x)$, 可得: $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

10. 数列 $\{x_n\}$ ($n \geq 1$), 满足 $\forall n < m$, $|x_n - x_m| > \frac{1}{n}$, 求证 $\{x_n\}$ 无界. (北京大学, 2002)

证: 用反证法. 假设数列 $\{x_n\}$ ($n \geq 1$) 有界, 即存在正常数 M , 使得对所有的 $n \in \mathbf{N}$,

都有 $|x_n| \leq M$. 因对 $\forall n < m$, $|x_n - x_m| > \frac{1}{n}$, 则 $|x_n - x_m| > \frac{1}{n} > \frac{1}{m}$, 于是 $2|x_n - x_m| > \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$,

即 $|x_n - x_m| > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)$, $|x_n - x_m| > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$ 从而若 $n > m$, 有 $|x_m - x_n| > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$, 因

此只有 $m \neq n$, 就一定有 $|x_m - x_n| > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$.

考虑闭区间列 $I_n = \left[x_n - \frac{1}{2n}, x_n + \frac{1}{2n} \right]$, 对任意 $m > n$, 有 $|x_m - x_n| > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$.



(1) 若 $x_m - x_n > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$, 则 $x_n + \frac{1}{2n} - \left(x_m - \frac{1}{2m} \right) = x_n - x_m + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) < 0$, 则 $x_n + \frac{1}{2n} < x_m - \frac{1}{2m}$, 这时 I_n 与 I_m 是不相交的.

(2) 若 $x_m - x_n < -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$, 则 $x_m + \frac{1}{2m} - \left(x_n - \frac{1}{2n} \right) = x_m - x_n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) < 0$, 则 $x_m + \frac{1}{2m} < x_n - \frac{1}{2n}$, 这时 I_n 与 I_m 也是不相交的.

由 m, n 的任意性, $\{I_n\}$ 为两两不相交的闭区间列, 这些区间列的长度为 $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. 另一方面, $I_n = \left[x_n - \frac{1}{2n}, x_n + \frac{1}{2n} \right] \subset \left[-M - \frac{1}{2}, M + \frac{1}{2} \right]$, 又这些区间列两两不相交, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq 2M + 1$, 矛盾. 故数列 $\{x_n\} (n \geq 1)$ 无界.

11. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 为两个有界数列, 满足 $a_{n+1} + 2a_n = 2b_n$, 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 也存在. (北京大学, 2009)

证: 因 $\{a_n\}$ 为有界数列, 则有上极限和下极限, 设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$. 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在, 则可设 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. 由 $a_{n+1} + 2a_n = 2b_n$, 则 $a_{n+1} = 2b_n - 2a_n$, 取极限可得,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2b_n - 2a_n) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - 2 \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2b_n - 2a_n) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

故 $\alpha = 2b - 2\beta$, $\beta = 2b - 2\alpha$, 于是 $\alpha = \beta$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 也存在.

12. $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上连续有界, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 不存在, 证明存在数列 $x_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 使得 $f'(x_n) = 0$. (北京大学, 2011)

解: 用反证法. 假设结论不成立, 则 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f'(x_n)| > 0$, 令 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f'(x_n)| = A$, 则 $A > 0$. 任取 $\alpha \in (0, A)$, 则存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得对任意 $x \in (0, \delta)$, 恒有 $\inf_{t \in (0, x)} |f'(t)| > \alpha$, 故对任意 $x \in (0, \delta)$, 有 $|f'(x)| > \alpha$, 由达布定理, 在 $(0, \delta)$ 上, $f'(x) > \alpha$ 恒成立, 或 $f'(x) < -\alpha$ 恒成立, 故 $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 上是严格单调的. $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上连续有界, 故极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 存在, 与已知矛盾. 故存在数列 $x_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 使得 $f'(x_n) = 0$.



13. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$ 存在. (北京大学, 2011)

证: 因正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则由柯西收敛准则, 可得: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbf{N}^*$,

使得对任意 $n > N$, 有 $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$. 由柯西不等式, 有:

$$(a_{N+1} + a_{N+1} + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_{N+1}} + \frac{1}{a_{N+2}} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq (n - N)^2,$$

故
$$0 < \frac{(n - N)^2}{\frac{1}{a_{N+1}} + \frac{1}{a_{N+2}} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq a_{N+1} + a_{N+1} + \cdots + a_n < \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k < \varepsilon.$$

于是

$$0 < \frac{n^2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} < \frac{n^2}{\frac{1}{a_{N+1}} + \frac{1}{a_{N+2}} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n^2}{(n - N)^2} \frac{(n - N)^2}{\frac{1}{a_{N+1}} + \frac{1}{a_{N+2}} + \cdots + \frac{1}{a_n}} < \frac{n^2 \varepsilon}{(n - N)^2},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n - N)^2} = 1$, 则存在 $N_1 > N$, 使得对任意 $n > N_1$, 有 $\frac{n^2}{(n - N)^2} < 2$, 于是对任意

$n > N_1$, 有 $0 < \frac{n^2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} < 2\varepsilon$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = 0$ 存在.

14. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{4 + 3x_n}$, $n \geq 1$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (北京大学, 2014)

证: 令 $f(x) = \sqrt{4 + 3x}$, $x \geq 0$, 则 $f(x) \geq 2$, 且 $0 < f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{4 + 3x}} \leq \frac{3}{4} < 1$, 故 $f(x)$ 是

$[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 的压缩映射. 由压缩映射原理, $f(x)$ 有唯一的不动点, 且 $\{x_n\}$ 收敛于

该不动点, 求解方程 $x = f(x)$, 可得: $x = 4$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$.

15. 设 $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{3 + 2x_n}{3 + x_n}$, $n \geq 0$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出其极限值. (北

京大学, 2015)

证: 令 $f(x) = \frac{3 + 2x}{3 + x}$, $x \geq 0$, 则 $f(x) \geq 0$, 且 $0 < f'(x) = \frac{3}{(3 + x)^2} \leq \frac{1}{3} < 1$, 故 $f(x)$ 是



$[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 的压缩映射. 由压缩映射原理, $f(x)$ 有唯一的不动点, 且 $\{x_n\}$ 收敛于

该不动点, 求解方程 $x = f(x)$, 可得 $x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

16. 设 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $n \geq 1$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出其极限值. (北京大学, 2016)

解: 因 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $n \geq 1$, 则 $x_n > \sqrt{2}$, $\forall n \geq 1$.

令 $f(x) = \sqrt{2+x}$, $x \geq 0$, 则 $f(x) \geq \sqrt{2}$, 且 $0 < f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$, 故 $f(x)$ 是

$[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 的压缩映射. 由压缩映射原理, $f(x)$ 有唯一的不动点, 且 $\{x_n\}$ 收敛于

该不动点, 求解方程 $x = f(x)$, 可得: $x = 2$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

17. 假设 $x_0 = 1$, $x_n = x_{n-1} + \cos x_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n - \frac{\pi}{2} = o\left(\frac{1}{n^n}\right)$. (北京大学, 2017)

证: 令 $f(x) = x + \cos x$, 则由 $f'(x) = 1 - \sin x > 0$ 可知, $f(x)$ 为严格单调递增函数, $x_0 = 1$. 由题意, $x_n = x_{n-1} + \cos x_{n-1} = f(x_{n-1})$ ($n = 1, 2, \dots$), $x_1 - x_0 = \cos x_0 = \cos 1 > 0$, $x_1 > x_0$, 故 $\{x_n\}$ 为严格单调递增数列. 令 $y_n = x_n - \frac{\pi}{2}$, 则 $\{y_n\}$ 是单调递增数列. 由

$x_n = x_{n-1} + \cos x_{n-1}$, 则有 $x_n - \frac{\pi}{2} = x_{n-1} - \frac{\pi}{2} - \sin\left(x_{n-1} - \frac{\pi}{2}\right)$, 即 $y_n = y_{n-1} - \sin y_{n-1}$.

先证 $y_n < 0$. 事实上, $y_0 = x_0 - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$. 假设 $y_n < 0$, 则 $y_{n+1} = y_n - \sin y_n < 0$,

因此, 对任意 n , 都有 $y_n < 0$, 故 $-\frac{\pi}{2} < 1 - \frac{\pi}{2} \leq y_n < 0$.

于是由单调有界数列必有极限的定理可知, $\{y_n\}$ 是收敛的, 设其极限为 A , 则

$A \in \left(1 - \frac{\pi}{2}, 0\right]$, $A = A - \sin A$, 即 $\sin A = 0$, 亦即 $A = 0$.

18. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可微, $f(a) \neq 0$, 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right]^n$. (北京大学, 1996)

解: 因 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可微, $f(a) \neq 0$, 则



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} - 1 \right] n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a)}{\frac{f(a)}{n}} = \frac{f'(a)}{f(a)}, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right]^n = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

19. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$. (北京大学, 2000)

解: 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{a}\right)^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right)} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{a}}{x} = \frac{1}{a},$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} = e^{\frac{1}{a}}.$$

20. 叙述定义:

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; (2) 当 $x \rightarrow a-$ 时, $f(x)$ 不以 A 为极限. (北京大学, 2000)

解: (1) 若对任意给定的 $G > 0$, 总存在 $X > 0$, 使得当 $x < -X$, 总有 $f(x) > G$, 则称 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

(2) 若存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意 δ , 总存在 $x \in (a - \delta, a)$, 使得 $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$, 则称当 $x \rightarrow a-$ 时, $f(x)$ 不以 A 为极限.

21. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 可导, $f(a) \neq 0$, 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right]^n$. (北京大学, 2001)

解: 请参见第 18 题.

22. 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$. (北京大学, 2002)

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} \ln \frac{\sin x}{x}} = e^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2}} = e^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x \sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)}{x^3}} = e^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

23. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$;

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + x + 1})$;