数学分析与高等代数考研要点与真题精解

Calculus and Linear Algebra: An Essential Guide

刘博雷（Bolei Liu） 尹 平（Ping Yin） 编著

航空工业出版社

Calculus and Linear Algebra: An Essential Guide

数学分析与高等代数

考研要点与真题精解

刘博雷（Bolei Liu） 尹 平（Ping Yin） 编著

航空工业出版社
北 京

内容提要

本书分为数学分析篇和高等代数篇，其中，数学分析篇共 7 章，主要内容包括：极限、一元函数的连续性、一元函数微分学、一元函数积分学、级数、多元函数微分学、多元函数积分学；高等代数篇共 9 章，主要内容包括：多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧氏空间、双线性空间与辛空间。书中每章由考研要点指导和名校考研真题精解两部分内容组成。

本书可作为普通高等院校数学各专业的考研教材，还可作为读者的自学参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析与高等代数 ：考研要点与真题精解 / 刘博雷，尹平主编. -- 北京 ：航空工业出版社，2018.11
ISBN 978-7-5165-1761-1

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①刘… ②尹… Ⅲ. ①数学分析－研究生－入学考试－自学参考资料②高等代数－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ. ①O17②O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 259671 号

数学分析与高等代数　考研要点与真题精解
Calculus and Linear Algebra: An Essential Guide

航空工业出版社出版发行
（北京市朝阳区北苑 2 号院　100012）
发行部电话：010-84936597　　010-84936343

北京谊兴印刷有限公司印刷　　全国各地新华书店经售
2018 年 11 月第 1 版　　2018 年 11 月第 1 次印刷
开本：787×1092　1/16　　印张：22　　字数：508 千字
印数：1－2000　　定价：58.00 元

前　言

“数学分析”和“高等代数”是数学专业中最重要的两门基础课，也是数学各专业考研的必考科目。历年的考研真题，除了在内容上具有代表性外，还包含了很多有价值的信息，如：试题的题型、试题的考点、试题的重点和难点、每年的必考知识点、每个知识点的考研命题频率、每个章节的考研命题比例等，因此数学分析和高等代数的考研真题，对数学各专业的考研复习有着至关重要的作用。

为了使数学专业、数学要求较高专业的考生从考研真题中吸取更多的精华，掌握更多的知识、解题技巧和解题方法，作者收集了一些名校多年的数学分析和高等代数考研真题，对其进行了分章节编排，给出详细的解答，并对每章节匹配相关的考研要点指导，以便考生从中抓住考试的重点和难点，从而提高考研的复习效率。

作者在编写本书的过程中遵循如下原则：

一、不罗列教材中的基本内容，根据平时学习和实践的经验和体会，参考数学分析教学大纲、高等代数教学大纲、研究生入学考试大纲等，总结各章节的要点和考查点，并对每章的重点问题和典型问题的常用方法进行了归纳。

二、在挑选和讲解经典考研真题时，不追求大而全、偏而难，只注重对名校考研真题解题思路的分析、解题方法的归纳和解题技巧的提炼，尽量体现出不同题目中的内在逻辑关联。

本书在编写中参考了相关院校全国硕士研究生入学考试的真题，以及数学分析教学大纲、高等代数教学大纲、研究生入学考试大纲等内容，在此对本书所引用试题的相关院校和命题老师，以及相关书目的作者和出版社表示衷心的感谢；同时，还要感谢航空工业出版社对本书出版的大力支持。

由于编者水平有限，加之编写时间紧凑，教材中难免有疏漏之处，恳请各位老师和广大读者批评指正，以不断提高本教材水平。

编　者

2018 年 10 月

目　录

数学分析篇（Calculus）

高等代数篇（Linear Algebra）

数学分析篇（Calculus）

第 1 章　极　限

1.1　考研要点指导

1．本章学习的内容是极限的理论，主要包括三大部分：一是初等函数；二是数列极限；三是函数极限．

2．本章重点有八个方面：

（1）掌握基本初函数的性质和图像特点．

（2）理解初等函数的概念及其基本性质．

（3）掌握重要的分段函数的形式及其性质，如符号函数、取整函数、黎曼函数、狄利克雷函数等．

（4）熟练掌握函数的复合运算及反函数的求解．

（5）熟练掌握数列极限的定义与性质．

（6）熟练掌握求数列极限的常用方法，掌握由递推公式给出的数列求极限的基本技巧，这是历年研究生命题的热点，值得关注．

（7）熟练掌握函数极限的定义与性质．

（8）熟练掌握求函数极限的常用方法，包括两个重要极限、等价无穷小量代换等方法，这在研究生考题中经常出现，值得读者重点注意．

3．求极限或验证极限的常用方法：

（1）用数列极限定义或函数极限定义验证极限．

（2）用单调有界数列必有极限定义证明极限的存在性．

（3）用夹逼定理求极限．

（4）用柯西收敛准则证明极限的存在性．

1.2　名校考研真题精解[1]

1.2.1　数列的极限、函数的极限考研真题精解

1．设 $f_n(x)=\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x$，求证：

（1）对任意自然数 n，方程 $f_n(x)=1$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 内有且仅有一个根；

（2）设 $x_n\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{3}$．（北京大学，1987）

解：（1）因 $f_n(x)=\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上是连续的，且 $f_n'(x)=-\sin x(1+2\cos x+\cdots+n\cos^{n-1}x)<0$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，则 $f_n(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上严格单调递减，而 $f(0)=n\geqslant 1$，$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}<1$，故方程 $f_n(x)=1$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 内有且仅有一个根．

（2）令 $y_n=\cos x_n$，则 $\dfrac{1}{2}<y_n\leqslant 1$．下证 $\{y_n\}$ 是单调递减的．

假设存在 n，使得 $y_{n+1}\geqslant y_n$，则

$$1=y_{n+1}+y_{n+1}^2+\cdots+y_{n+1}^n+y_{n+1}^{n+1}>y_n+y_n^2+\cdots+y_n^n+y_n^{n+1}=1+y_n^{n+1}>1,$$

矛盾．故对任意 n，都有 $y_{n+1}<y_n$，故 $\{y_n\}$ 是单调递减的，于是 $0\leqslant y_n\leqslant y_2<1$，$n\geqslant 2$，故 $0\leqslant y_n^n\leqslant y_2^n\to 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n^n=0$．

$$1=y_n+y_n^2+\cdots+y_n^n=\frac{y_n(1-y_n^n)}{1-y_n},\ n\geqslant 2,\ \lim_{n\to\infty}(1-y_n^n)=1,\text{故}\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{1-y_n}=1,\text{即}\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{2},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{3}$．

2．判断下列命题真伪，不必说明理由．

（1）对数列 $\{a_n\}$ 作和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，若 $\{S_n\}$ 是有界数列，则 $\{a_n\}$ 是有界列．（　　）

（2）数列 $\{a_n\}$ 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的充要条件是：对任一自然数 p，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+p}-a_n|=0$．（北京大学，1996）（　　）

1 注：本节考研真题精解是北京大学历年考研专题部分，让读者从纵向了解一所名校的考研动态．

解：（1）真命题．因 $a_n=\begin{cases}S_1, & 当n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & 当n=1,\end{cases}$ 且 $\{S_n\}$ 是有界数列，则 $\{a_n\}$ 是有界列．

（2）伪命题．例如：$a_n=\sqrt{n}$，则对任一自然数 p，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+p}-a_n|=0$，但数列 $\{a_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在．

3．设 $a_n\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，若存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$，证明：$|l|\leqslant 1$．（北京大学，1996）

证：用反证法假设结论不成立，则 $|l|>1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|l|>1$．任取 $r\in(1,l)$，则存在 $N\in \mathrm{N}^+$，使得对任意正整数 $n>N$，恒有 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geqslant r$，即 $|a_{n+1}|\geqslant r|a_n|$，故对任意正整数 $n>N$，有 $|a_n|\geqslant r|a_{n-1}|\geqslant r^2|a_{n-2}|\geqslant\cdots\geqslant r^{n-N-1}|a_{N+1}|\to+\infty, n\to\infty$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$，这与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 是矛盾的，故 $|l|\leqslant 1$．

4．设 $a_n\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$．（北京大学，1997）

证：因 $a_n\geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则由保号性可知，$a\geqslant 0$．

当 $a=0$ 时，由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $a_n<\varepsilon^2$，于是 $\left|\sqrt{a_n}-0\right|<\varepsilon$，故此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$．

当 $a>0$ 时，由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\sqrt{a}\varepsilon$，于是 $\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right|=\dfrac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\leqslant\dfrac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$，故此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$．

5．计算下列极限（写出演算过程）：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n}\ (a>0)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x}\right)$．（北京大学，1998）

解：（1）先证命题：设 $a_1,a_2,\cdots,a_k\geqslant 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}.$$

令 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，则

$$A \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \leqslant \sqrt[n]{k} A,$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$，及夹逼定理可知：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = A$，故原命题成立.

回到本题，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+a^n} = \max\{1, a\}$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\cot x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x\tan x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2 \tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{x^3} = \dfrac{1}{3}$.

6．判断下列命题真伪．设 $\{a_n\}$ 是一个数列，若在任一子列 $\{a_{n_k}\}$ 中均存在收敛子列 $\{a_{n_{k_j}}\}$，则 $\{a_n\}$ 必为收敛列．（北京大学，1999）

解：伪命题．数列 $\{(-1)^n\}$ 的任一子列都有收敛子列，但该数列不收敛．

7．求下列极限值（写出计算过程）：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+a^n}\ (a>0)$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x + b(1-\cos x)}{\alpha\ln(1-x) + \beta(1-\mathrm{e}^{-x^2})}$，$a^2+\alpha^2 \neq 0$．（北京大学，1999）

解：（1）请参见第 5 题的第（1）小题．

（2）因

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n} \to \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi},$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n} \to \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi},$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1} + \dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{2}{\pi}$.

（3）若 $\alpha \neq 0$，则 $\alpha\ln(1-x) + \beta(1-\mathrm{e}^{-x^2}) \sim -\alpha x$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x + b(1-\cos x)}{\alpha\ln(1-x) + \beta(1-\mathrm{e}^{-x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{a\tan x + b(1-\cos x)}{-\alpha x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{a}{\alpha}\frac{\tan x}{x} - \frac{b}{\alpha}\frac{1-\cos x}{x}\right)$$

$$=-\frac{a}{\alpha}\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}-\frac{b}{\alpha}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=-\frac{a}{\alpha}\lim_{x\to0}\frac{x}{x}-\frac{b}{\alpha}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=-\frac{a}{\alpha}.$$

若 $\alpha=0$，则 $\beta\neq0$，$a\neq0$，$a\tan x+b(1-\cos x)\sim ax$，$\alpha\ln(1-x)+\beta(1-e^{-x^2})\sim\beta x^2$，于是

$$\lim_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{\alpha\ln(1-x)+\beta(1-e^{-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{ax}{\beta x^2}=\infty.$$

8．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{2n}}{1+a^{2n}}$．（北京大学，2001）

解：当 $|a^2|<1$，即 $|a|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{2n}}{1+a^{2n}}=\frac{0}{1+0}=0$．

当 $|a^2|=1$，即 $|a|=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{2n}}{1+a^{2n}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$．

当 $|a^2|>1$，即 $|a|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{2n}}{1+a^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^{-2n}}=\frac{1}{1+0}=1$．

9．设 $a>\frac{1}{4}$，$x_1\geqslant0$，$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，$n=1,2,\cdots$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．（北京大学，2002）

解：令 $f(x)=\sqrt{a+x}$，$x\geqslant0$，则 $f(x)\geqslant\sqrt{a}>\frac{1}{2}>0$．

于是 $0<f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{a+x}}<\frac{1}{2\sqrt{a}}<1$，$f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 到 $[0,+\infty)$ 的压缩映射，故有唯一的不动点，且 $\{x_n\}$ 收敛于该不动点，解方程 $x=f(x)$，可得：$x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$，因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

10．数列 $\{x_n\}$ $(n\geqslant1)$，满足 $\forall n<m$，$|x_n-x_m|>\frac{1}{n}$，求证 $\{x_n\}$ 无界．（北京大学，2002）

证：用反证法．假设数列 $\{x_n\}(n\geqslant1)$ 有界，即存在正常数 M，使得对所有的 $n\in\mathbf{N}$，都有 $|x_n|\leqslant M$．因对 $\forall n<m$，$|x_n-x_m|>\frac{1}{n}$，则 $|x_n-x_m|>\frac{1}{n}>\frac{1}{m}$，于是 $2|x_n-x_m|>\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$，即 $|x_n-x_m|>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$，$|x_n-x_m|>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$ 从而若 $n>m$，有 $|x_m-x_n|>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$，因此只有 $m\neq n$，就一定有 $|x_m-x_n|>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$．

考虑闭区间列 $I_n=\left[x_n-\frac{1}{2n},x_n+\frac{1}{2n}\right]$，对任意 $m>n$，有 $|x_m-x_n|>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$．

（1）若 $x_m - x_n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$，则 $x_n + \frac{1}{2n} - \left(x_m - \frac{1}{2m}\right) = x_n - x_m + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right) < 0$，则 $x_n + \frac{1}{2n} < x_m - \frac{1}{2m}$，这时 I_n 与 I_m 是不相交的.

（2）若 $x_m - x_n < -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$，则 $x_m + \frac{1}{2m} - \left(x_n - \frac{1}{2n}\right) = x_m - x_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right) < 0$，则 $x_m + \frac{1}{2m} < x_n - \frac{1}{2n}$，这时 I_n 与 I_m 也是不相交的.

由 m，n 的任意性，$\{I_n\}$ 为两两不相交的闭区间列，这些区间列的长度为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$. 另一方面，$I_n = \left[x_n - \frac{1}{2n}, x_n + \frac{1}{2n}\right] \subset \left[-M - \frac{1}{2}, M + \frac{1}{2}\right]$，又这些区间列两两不相交，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n| \leqslant 2M+1$，矛盾. 故数列 $\{x_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 无界.

11. 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 为两个有界数列，满足 $a_{n+1} + 2a_n = 2b_n$，证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 也存在.（北京大学，2009）

证：因 $\{a_n\}$ 为有界数列，则有上极限和下极限，设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \alpha$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \beta$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在，则可设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 由 $a_{n+1} + 2a_n = 2b_n$，则 $a_{n+1} = 2b_n - 2a_n$，取极限可得，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_{n+1} = \overline{\lim_{n\to\infty}}(2b_n - 2a_n) = 2\lim_{n\to\infty} b_n - 2\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_{n+1} = \underline{\lim_{n\to\infty}}(2b_n - 2a_n) = 2\lim_{n\to\infty} b_n - 2\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n,$$

故 $\alpha = 2b - 2\beta$，$\beta = 2b - 2\alpha$，于是 $\alpha = \beta$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 也存在.

12. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续有界，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 不存在，证明存在数列 $x_n \to 0$ $(n\to\infty)$，使得 $f'(x_n) = 0$.（北京大学，2011）

解：用反证法. 假设结论不成立，则 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |f'(x_n)| > 0$，令 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |f'(x_n)| = A$，则 $A > 0$. 任取 $\alpha \in (0, A)$，则存在 $\delta \in (0,1)$，使得对任意 $x \in (0,\delta)$，恒有 $\inf\limits_{t\in(0,x)} |f'(t)| > \alpha$，故对任意 $x \in (0,\delta)$，有 $|f'(x)| > \alpha$，由达布定理，在 $(0,\delta)$ 上，$f'(x) > \alpha$ 恒成立，或 $f'(x) < -\alpha$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 上是严格单调的. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续有界，故极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 存在，与已知矛盾. 故存在数列 $x_n \to 0$ $(n\to\infty)$，使得 $f'(x_n) = 0$.

13．设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$ 存在．（北京大学，2011）

证：因正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则由柯西收敛准则，可得：对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}^*$，使得对任意 $n>N$，有 $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}a_k<\varepsilon$．由柯西不等式，有：

$$(a_{N+1}+a_{N+1}+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_{N+1}}+\frac{1}{a_{N+2}}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant(n-N)^2,$$

故
$$0<\frac{(n-N)^2}{\dfrac{1}{a_{N+1}}+\dfrac{1}{a_{N+2}}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant a_{N+1}+a_{N+1}+\cdots+a_n<\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k<\varepsilon.$$

于是

$$0<\frac{n^2}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}<\frac{n^2}{\dfrac{1}{a_{N+1}}+\dfrac{1}{a_{N+2}}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}=\frac{n^2}{(n-N)^2}\frac{(n-N)^2}{\dfrac{1}{a_{N+1}}+\dfrac{1}{a_{N+2}}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}<\frac{n^2\varepsilon}{(n-N)^2},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n-N)^2}=1$，则存在 $N_1>N$，使得对任意 $n>N_1$，有 $\dfrac{n^2}{(n-N)^2}<2$，于是对任意 $n>N_1$，有 $0<\dfrac{n^2}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}<2\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}=0$ 存在．

14．设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=1$，$x_{n+1}=\sqrt{4+3x_n}$，$n\geqslant1$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．（北京大学，2014）

证：令 $f(x)=\sqrt{4+3x}$，$x\geqslant0$，则 $f(x)\geqslant2$，且 $0<f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{4+3x}}\leqslant\dfrac{3}{4}<1$，故 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 的压缩映射．由压缩映射原理，$f(x)$ 有唯一的不动点，且 $\{x_n\}$ 收敛于该不动点，求解方程 $x=f(x)$，可得：$x=4$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=4$．

15．设 $x_0=1$，$x_{n+1}=\dfrac{3+2x_n}{3+x_n}$，$n\geqslant0$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出其极限值．（北京大学，2015）

证：令 $f(x)=\dfrac{3+2x}{3+x}$，$x\geqslant0$，则 $f(x)\geqslant0$，且 $0<f'(x)=\dfrac{3}{(3+x)^2}\leqslant\dfrac{1}{3}<1$，故 $f(x)$ 是

$[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 的压缩映射．由压缩映射原理，$f(x)$ 有唯一的不动点，且 $\{x_n\}$ 收敛于该不动点，求解方程 $x=f(x)$，可得 $x=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$．

16．设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，$n\geqslant 1$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出其极限值．（北京大学，2016）

解：因 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，$n\geqslant 1$，则 $x_n>\sqrt{2}$，$\forall n\geqslant 1$．

令 $f(x)=\sqrt{2+x}$，$x\geqslant 0$，则 $f(x)\geqslant\sqrt{2}$，且 $0<f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{2}}<1$，故 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 的压缩映射．由压缩映射原理，$f(x)$ 有唯一的不动点，且 $\{x_n\}$ 收敛于该不动点，求解方程 $x=f(x)$，可得：$x=2$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$．

17．假设 $x_0=1$，$x_n=x_{n-1}+\cos x_{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$，证明：当 $n\to\infty$ 时，$x_n-\dfrac{\pi}{2}=o\left(\dfrac{1}{n^n}\right)$．（北京大学，2017）

证：令 $f(x)=x+\cos x$，则由 $f'(x)=1-\sin x>0$ 可知，$f(x)$ 为严格单调递增函数，$x_0=1$．由题意，$x_n=x_{n-1}+\cos x_{n-1}=f(x_{n-1})\ (n=1,2,\cdots)$，$x_1-x_0=\cos x_0=\cos 1>0$，$x_1>x_0$，故 $\{x_n\}$ 为严格单调递增数列．令 $y_n=x_n-\dfrac{\pi}{2}$，则 $\{y_n\}$ 是单调递增数列．由 $x_n=x_{n-1}+\cos x_{n-1}$，则有 $x_n-\dfrac{\pi}{2}=x_{n-1}-\dfrac{\pi}{2}-\sin\left(x_{n-1}-\dfrac{\pi}{2}\right)$，即 $y_n=y_{n-1}-\sin y_{n-1}$．

先证 $y_n<0$．事实上，$y_0=x_0-\dfrac{\pi}{2}=1-\dfrac{\pi}{2}<0$．假设 $y_n<0$，则 $y_{n+1}=y_n-\sin y_n<0$，因此，对任意 n，都有 $y_n<0$，故 $-\dfrac{\pi}{2}<1-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y_n<0$．

于是由单调有界数列必有极限的定理可知，$\{y_n\}$ 是收敛的，设其极限为 A，则 $A\in\left(1-\dfrac{\pi}{2},0\right]$，$A=A-\sin A$，即 $\sin A=0$，亦即 $A=0$．

18．设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可微，$f(a)\neq 0$，求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$．（北京大学，1996）

解：因 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可微，$f(a)\neq 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}-1\right]n=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{f(a)}{n}}=\frac{f'(a)}{f(a)}，故\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

19．求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$．（北京大学，2000）

解：因为

$$\lim_{x\to0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+\frac{x}{a}\right)^x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{a}}{x}=\frac{1}{a},$$

故
$$\lim_{x\to0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}.$$

20．叙述定义：

（1）$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$；（2）当 $x\to a-$ 时，$f(x)$ 不以 A 为极限．（北京大学，2000）

解：（1）若对任意给定的 $G>0$，总存在 $X>0$，使得当 $x<-X$，总有 $f(x)>G$，则称 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$．

（2）若存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意 δ，总存在 $x\in(a-\delta,a)$，使得 $|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$，则称当 $x\to a-$ 时，$f(x)$ 不以 A 为极限．

21．设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，$f(a)\neq0$，求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$．（北京大学，2001）

解：请参见第 18 题．

22．求极限：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$．（北京大学，2002）

解：
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}^{2\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}}=\mathrm{e}^{2\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2x}\frac{x}{\sin x}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}}$$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)}{x^3}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}.$$

23．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$；　　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^2+x+1})$；