普通高等教育“十三五”规划教材

应用型本科院校规划教材

线性代数教材配套练习册

主 编 高 洁

副主编 唐春艳 郭夕敬

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材
应用型本科院校规划教材

线性代数教材配套练习册

主编　高　洁
副主编　唐春艳　郭夕敬

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是《线性代数》(主编高洁，科学出版社)的配套练习册，全书分两部分，第一部分为“内容篇”，依照主教材的章节顺序依次编排，按章编写，每章又分“本章教学要求及重点难点”和“内容提要”两个模块，对教材每章内容进行了系统归纳与总结，便于读者学习. 第二部分为“测试篇”，共有六套单元自测题，分别对应教材每一章内容；另有两套综合训练题，方便读者进行自我测试.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数：含练习册/高洁主编. —北京：科学出版社，2018.1
普通高等教育“十三五”规划教材·应用型本科院校规划教材
ISBN 978-7-03-056321-7
I. ①线… II. ①高… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV.①O151.2
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 009536 号

责任编辑：昌 盛 梁 清 / 责任校对：彭珍珍
责任印制：师艳茹 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
保定市中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2019 年 1 月第二次印刷 印张：15 1/4
字数：302 000
定价：35.00 元（含练习册）
(如有印装质量问题，我社负责调换)

目　　录

内　容　篇

测　试　篇

内 容 篇

第1章 行 列 式

一、本章教学要求及重点难点

本章教学要求:

(1)理解并熟练掌握行列式的概念和基本性质;

(2)理解并熟练掌握行列式按行(列)展开定理及应用;

(3)熟练掌握行列式的计算方法;

(4)会利用 Cramer 法则求非齐次线性方程组的唯一解, 会利用齐次线性方程组系数行列式的值来讨论其解的情况.

本章重点难点:

利用行列式的基本性质及展开定理, 熟练掌握行列式的计算方法.

二、内容提要

1. 行列式的主要定义

(1) **n 阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $t=\tau(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 表示 n 阶排列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的逆序数, 求和指对所有的 n 阶排列 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 求和, 即行列式的展开式是由 $n!$ 项构成的代数和, 其中每一项都是取自 D 中 n 个不同的行和 n 个不同列的 n 个元素乘积, 其值称为行列式 D 的**值**.

(2) **转置行列式** 把行列式 D 的行列互换所得的行列式称为 D 的**转置行列式**, 记为 D' 或 D^{T}.

(3) **上(下)三角形行列式** 对角线以下(上)的元素全为零的行列式称为**上(下)三角形行列式**.

(4) **余子式、代数余子式** 在 n 阶行列式中, 把元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列划去后所得的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**, 记为 M_{ij}; 把 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的**代数余子式**.

2. 行列式的基本性质

(1)行列式与它的转置行列式相等, 即 $D' = D$.

(2)互换行列式的某两行(或列), 行列式仅变符号.

(3)行列式若有两行(或列)相同, 则其值为零.

(4)行列式的某行(或列)的各元素乘以数 k 等于用数 k 乘以行列式, 即行列式的某行(或列)各元素的公因子可以提到行列式符号外面相乘.

(5)若行列式的某两行(或列)的对应元素成比例, 则行列式的值等于零.

(6)行列式的某行(或列)的各元素乘以数 k 加到另一行(或列)的对应元素上, 行列式的值不变.

(7)若行列式的某一行(列)中的各元素均为两个数的和, 则此行列式可以写作两个行列式的和.

3. 行列式按行(列)展开法则

行列式等于它的任一行(列)各元素与其对应代数余子式乘积之和; 行列式任意一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为零.

4. 上三角形行列式、下三角形行列式、对角形行列式的计算方法

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} .$$

5. n 阶 Vandermonde 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(x_j - x_i \right) .$$

6. Cramer 法则

对于由 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, n 个方程构成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为其**系数行列式**. 并记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \cdots,\quad D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

则当 $D\neq 0$ 时, 方程组(1)有唯一解 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$.

7. 齐次线性方程组解的情况

当 $D\neq 0$ 时, n 阶齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{2}$$

只有零解.

若(2)有非零解, 则 $D=0$.

第2章 矩　　阵

一、本章教学要求及重点难点

本章教学要求：

(1) 理解矩阵的概念，熟练掌握矩阵的运算；

(2) 理解逆矩阵的概念和性质，掌握逆矩阵的计算方法；

(3) 理解矩阵的初等变换、初等矩阵、行阶梯矩阵、最简梯矩阵等概念，会熟练地用行初等变换把矩阵为化为梯矩阵和最简梯矩阵,以及用初等变换把矩阵化为初等变换下的标准形;

(4) 理解分块矩阵的概念;

(5) 理解矩阵秩数的概念及相关性质，会计算矩阵的秩数.

本章重点难点：

(1) 熟练掌握矩阵的各种运算;

(2) 会利用初等变换等方法计算逆矩阵;

(3) 熟练掌握运用行初等变换把矩阵化为梯矩阵的方法;

(4) 理解矩阵秩数的概念及相关性质，会计算矩阵的秩数.

二、内容提要

1. 矩阵概念

(1) 矩阵：$m\times n$ 个数 $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m **行** n **列矩阵**(或 $m\times n$ 矩阵)，简记为 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$. $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列**元素**；当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n **阶方阵**；只有一行的矩阵称为**行矩阵**；只有一列的矩阵称为**列矩阵**；元素为复数的矩阵称为**复矩阵**；元素为实数的矩阵称为**实矩阵**.若无特殊声明，凡是矩阵指的都是复矩阵.

(2) 零矩阵：所有元素全为零的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$.

(3) 单位矩阵：n 阶方阵的主对角线的元素都是 1，其他元素都是 0 时，被称

为 n 阶**单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{E}_n$.

(4)负矩阵：对于矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，有矩阵 $\left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$ 使得 $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}+\left(-a_{ij}\right)_{m\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n}$，称 $\left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记为 $-\boldsymbol{A}$.

(5)矩阵相等：只有当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数与列数分别相同，且对应位置的元素也分别相同时才称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是相等的矩阵.

(6)转置矩阵：把矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 的行列互换而得到的 $n\times m$ 矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

转置矩阵满足的运算法则：

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\ (k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

(7)伴随矩阵：设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)$ 是 n 阶方阵，记元素 a_{ij} 在行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中的代数余子式为 $A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$.用 A_{ij} 去替换 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)$ 中的元素 a_{ij}，然后再取转置而得的 n 阶方阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^*$.即

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. 矩阵的运算

(1)矩阵的加法：设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$，称矩阵 $\boldsymbol{C}=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和**，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

规定矩阵的**减法**为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

(2)矩阵的乘法：设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)_{n\times p}$，称矩阵 $\boldsymbol{C}=\left(c_{ij}\right)_{m\times p}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**积**.记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,p).$$

需要注意的是，矩阵的乘法一般不满足交换律和消去律.

(3)数乘矩阵：设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$\alpha$ 为一个数，称矩阵$\left(\alpha a_{ij}\right)_{m\times n}$ 为**α 与 $\boldsymbol{A}$ 的积**，记为 $\alpha\boldsymbol{A}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$.

3. 方阵的幂及行列式

(1)定义：对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,方阵的幂可以定义为 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}$（$k$ 为正整数).

(2)方阵的行列式:设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，则有 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$；$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

4. 逆矩阵的概念、性质和求法

(1)定义：设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，如果有 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**非奇异矩阵**或**可逆矩阵**，称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**，或 $\boldsymbol{A}$ 的逆.否则，称 $\boldsymbol{A}$ 为一个**奇异矩阵**.

(2)逆矩阵的性质：

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A},\ (\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1},\ (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}},\ (k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1},\ \left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}.$$

(3)判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的方法：

1)用可逆矩阵的定义；

2)用行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$；

3)用 $R(\boldsymbol{A})=n$.

(4)求逆矩阵的方法：

1)用可逆矩阵的定义；

2)用伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$；

3)用初等变换的方法 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{行初等变换}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$.

5. 矩阵的初等变换、初等矩阵以及矩阵等价

(1)初等变换：对矩阵实施的三种演变统称为矩阵的**初等变换**：

1)用 $\alpha\neq 0$ 去乘矩阵第 i 行(列)各元素，记为 αr_i（αc_i）；

2)把矩阵第 i 行(列)各元素的 μ 倍加到第 j 行(列)的对应元素上，记为 $r_j+\mu r_i$（$c_j+\mu c_i$）；

3)互换矩阵的 i,j 两行(列)，记为 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$.

(2)初等矩阵：对单位矩阵实施一次行(或列)的初等变换而得的矩阵统称为初等矩阵.特别称所实施的初等变换与得到的初等矩阵是**一对互相对应的初等变换与初等矩阵**.

(3)矩阵等价：设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵.若 $\boldsymbol{A}$ 可经行初等变换化为 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$

与 $\boldsymbol{B}$ **行等价**；若 $\boldsymbol{A}$ 可经列初等变换化为 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **列等价**；若 $\boldsymbol{A}$ 可经初等变换化为 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**，记为 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$.

6. 矩阵秩的概念，性质与求法

(1)子式：设 $\boldsymbol{A}$ 是一个任意矩阵，于 $\boldsymbol{A}$ 中任意选定 k 个行和 k 个列，这 k 个行和 k 个列相交处的元素按原有的相对位置排成的 k 阶行列式称为 $\boldsymbol{A}$ 的 **k 阶子式**.

(2)矩阵秩数：设 $\boldsymbol{A}$ 是一个任意矩阵，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 的秩数为零；若 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$，则在 $\boldsymbol{A}$ 的所有不为零的子式中必有阶数最高者，其阶数 r 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**秩数**. $\boldsymbol{A}$ 的秩数记为 $R(\boldsymbol{A})$.

(3)矩阵秩数的性质：

1)矩阵乘以初等矩阵后秩数不变；

2)矩阵经初等变换后秩数不变；

3)设 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数都是 n，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则有 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}) \leqslant n$；

4) $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

(4)矩阵秩的求法：

1)用定义；

2)用初等变换将矩阵化为行阶梯矩阵，计算非零行的个数.

7. 分块矩阵

用水平线和铅垂线把矩阵分成若干个小矩阵后，矩阵便成为以小矩阵为元素的**分块矩阵**. 这种形式矩阵称为原矩阵的一种分块，每一个小矩阵都叫做原矩阵的子块.

第3章 向量空间

一、本章教学要求及重点难点

本章教学要求:

(1) 理解 n 维向量及其线性运算;

(2) 理解向量组的线性相关、线性无关和线性组合的概念, 理解与向量间线性关系有关的结论, 掌握用定义和定理判别向量组线性相关性的方法;

(3) 理解向量组的极大无关组及向量组的秩数, 理解矩阵的秩数和向量组的秩数之间的关系, 熟练掌握用矩阵的初等变换求向量组的秩数和极大无关组的方法;

(4) 了解向量空间、向量空间的基底和维数的概念;

(5) 了解向量组与向量组的关系.

本章重点难点:

(1) 理解向量组的线性相关、线性无关和线性组合的概念, 理解与向量间线性关系有关的结论, 掌握用定义和定理判别向量组线性相关性的方法;

(2) 理解向量组的极大无关组及向量组的秩数, 熟练掌握用矩阵的初等变换求向量组的秩数和极大无关组的方法.

二、内容提要

1. n 维向量及其线性运算

每一个 $n\times 1$ 矩阵都称为 n 维**向量**, 矩阵中的元素称为该向量的**分量**, n 称为其**维数**. 向量的加法和数乘统称为向量的**线性运算**, 它们的运算规则与矩阵的运算规则一致.

2. 向量间的线性关系

(1) 线性相关与线性无关: 对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$, 若有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}, \tag{*}$$

则称向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性相关**; 否则, 当 (*) 式成立时, 必有 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 全为零, 则称向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性无关**.

(2) 用定义证明一组向量线性无关的方法:

1) 设相应的(*)式成立;

2) 利用所设(*)式证明 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 全为零.

(3) 线性组合: 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 都是向量, 若有数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 使得

$$\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合, 或称 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

3. 与向量间线性关系有关的结论

(1) 一组向量线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可表示为其余向量的线性组合.

(2) 两个向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 构成的向量组线性相关的充要条件是存在数 λ, 使得 $\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\beta}$ 或 $\boldsymbol{\beta} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$, 即二向量的对应分量成比例.

(3) 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 可经行初等变换化为 $\boldsymbol{B}_{m\times n}$; 而 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 按列分块为

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n), \quad \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n),$$

则

1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_j, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关;

2) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_j, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关;

3) $\boldsymbol{\alpha}_k = \lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i + \lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 的充要条件是

$$\boldsymbol{\beta}_k = \lambda_i\boldsymbol{\beta}_i + \lambda_j\boldsymbol{\beta}_j + \cdots + \lambda_s\boldsymbol{\beta}_s,$$

其中 $\lambda_i, \lambda_j, \cdots, \lambda_s$ 是数, 且 $\{i, j, \cdots, s\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, 那么, $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关的充要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = n$; $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关的充要条件是 $R(\boldsymbol{A}) < n$.

(5) 对于列数大于行数的矩阵, 其列向量组必为线性相关向量组; 即, 向量个数大于维数的向量组必为线性相关向量组; 特别有, $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 都是 n 维向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1 \ \ \boldsymbol{\alpha}_2 \cdots \ \ \boldsymbol{\alpha}_n| \neq 0$; $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充要条件是行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1 \ \ \boldsymbol{\alpha}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{\alpha}_n| = 0$.

(7) 线性相关向量组的扩大组仍线性相关; 线性无关向量组的部分组仍线性无关.

(8) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 而 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 必可唯一地表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性组合.

4. 向量组的极大无关组

设 T 是含有非零向量的向量集合, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r \in T$, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 满足下

述两个条件:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关;

(2) T 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 均可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合.则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量集 T 的一个极大线性无关组, 简称**极大无关组**.

5. 向量组的秩数

设 T 是向量集合.若 T 只含零向量, 则称 T 的秩数为零; 若 T 含有非零向量, 则称 T 的任意极大无关组中所含向量个数为 T 的**秩数**, 记为 $R(T)$.

6. 矩阵的秩数和向量组的秩数之间的关系: 矩阵的秩数等于它的列向量组的秩数, 也等于它的行向量组的秩数.

7. 向量空间

(1) 向量空间: 设 V 是由维数相同的向量构成的非空集合, 如果对 $\forall u,v\in V$, 以及任意的数 a, 都有 $u+v\in V, au\in V$ (即 V 对向量的加法与数乘向量两个运算封闭), 则称 V 是一个**向量空间**.

(2) 基底和维数: 非零向量空间 V 的极大无关组称为 V 的**基底**; 其秩数称为 V 的**维数**. 维数为 r 的向量空间称为 r 维向量空间, 并规定零空间的维数为零, V 的维数记为 $\dim V$.

8. 向量组与向量组的关系

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是两个 n 维向量组, 以其作为列组成的 $n\times s$ 与 $n\times t$ 矩阵分别记为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 即 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均可表示为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的线性组合的充要条件是有矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{t\times s}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$.

若把向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 记为 Ⅰ, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 记为 Ⅱ, 则 “$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均可表示为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的线性组合” 可简单地说成 “向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示”.

(2) 设有向量组 Ⅰ: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 Ⅱ: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$, 且向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示.那么, 若 $s>t$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

等价叙述: 设有向量组 Ⅰ: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 Ⅱ: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$, 且向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示. 那么, 若 $s>t$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(3) 如果 Ⅰ: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$, Ⅱ: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是两个向量组, 且向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示.那么必有 R(Ⅰ)$\leqslant R$(Ⅱ).

(4) 设 Ⅰ: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$, Ⅱ: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是两个向量组, 如果 Ⅰ 与 Ⅱ 可互相线性表示, 则称向量组 Ⅰ 与 Ⅱ **等价**.

(5) 等价向量组的秩数相等.

第 4 章　线性方程组

一、本章教学要求及重点难点

本章教学要求:

(1) 掌握齐次和非齐次线性方程组的一般形式、矩阵形式和向量形式;

(2) 掌握齐次和非齐次线性方程组解的存在性的判定方法;

(3) 理解齐次线性方程组解的性质、基础解系和通解的概念, 熟练掌握求齐次线性方程组的基础解系与通解的方法;

(4) 理解非齐次线性方程组解的性质和通解的概念, 熟练掌握求解非齐次线性方程组的方法.

本章重点难点:

(1) 掌握齐次和非齐次线性方程组解的存在性的判定方法;

(2) 理解齐次线性方程组解的性质、基础解系和通解的概念, 熟练掌握求齐次线性方程组的基础解系与通解的方法;

(3) 理解非齐次线性方程组解的性质和通解的概念, 熟练掌握求解非齐次线性方程组的方法.

二、内容提要

1. 非齐次线性方程组的三种表达形式

(1) 一般形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

令

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ **称为系数矩阵**, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ **称为增广矩阵**.

(2) 矩阵形式：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$.

(3) 向量形式：再令

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},$$

则非齐次线性方程组的向量形式为 $\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_nx_n=\boldsymbol{b}$.

2. 齐次线性方程组的三种表达形式

(1) 一般形式：$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\quad\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0.\end{cases}$

(2) 矩阵形式：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$.

(3) 向量形式：$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_nx_n=\boldsymbol{0}$.

3. 线性方程组解的存在性的判定

(1) 齐次线性方程组：

1) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，当且仅当 $R(\boldsymbol{A})<n$；

2) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，当且仅当 $R(\boldsymbol{A})=n$；

3) 若 $\boldsymbol{A}$ 是方阵,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解当且仅当 $|\boldsymbol{A}|=0$；$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解当且仅当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(2) 非齐次线性方程组：

1) 若 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 无解；

2) 若 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A})=n$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 只有一个解；

3) 若 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A})=r<n$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

4. 齐次线性方程组解的结构

(1) 解的性质：若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 之解，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $a\boldsymbol{\alpha}$ 也都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 之解，这里 a 是任意常数.

(2) 基础解系：当 $R(\boldsymbol{A})=r<n$ 时，齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 必有 $n-r$ 个解 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 具有性质：

1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 线性无关；

2) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的任何解 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 的线性组合.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 显然是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 解集合的极大无关组，称为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.