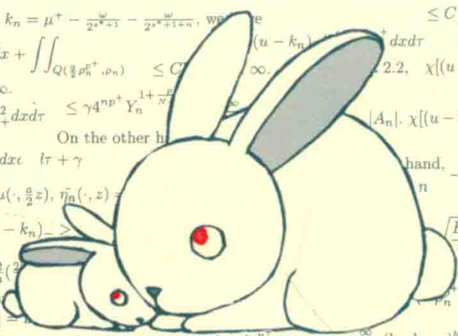
Fibonacci 数列中的明珠

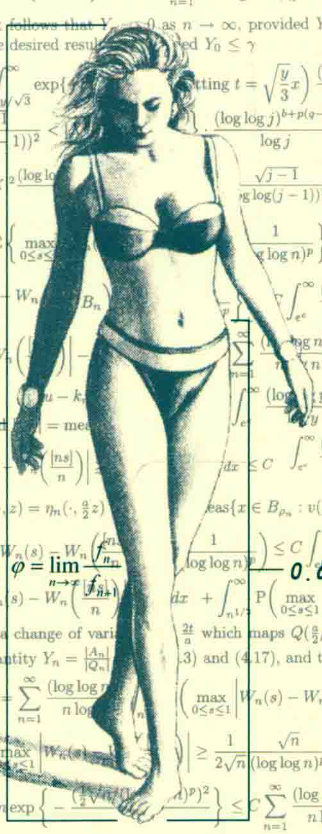
THE PEARL OF THE FIBONACCI SEQUENCE

张光年　著



$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$f_1 = f_2 = 1$$



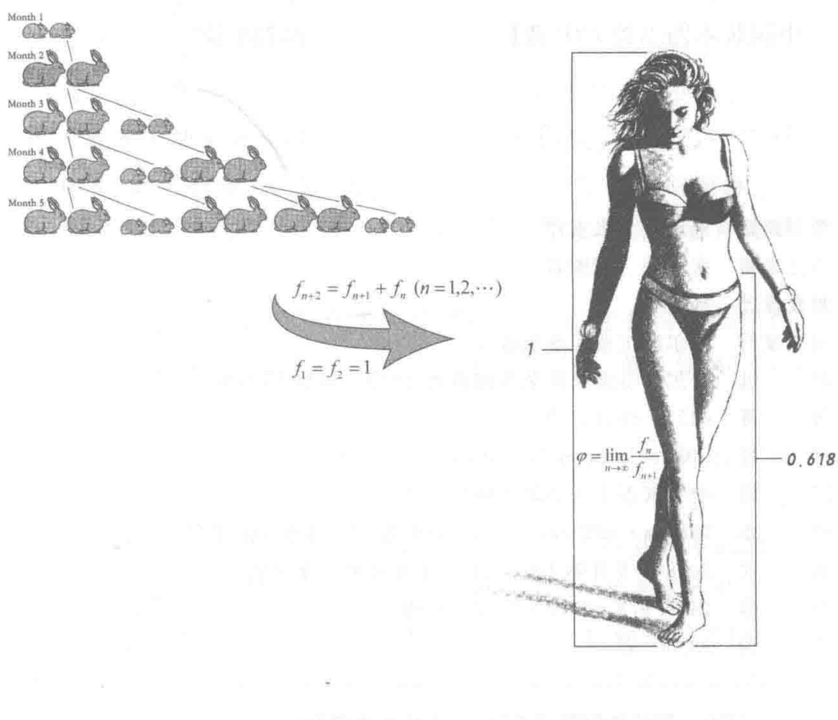
$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} \quad 0.618$$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Fibonacci 数列中的明珠

THE PEARL OF THE FIBONACCI SEQUENCE

● 张光年 著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共分九章,详细介绍了 Fibonacci 数列的产生和与数学及其他各学科的联系,Fibonacci数列与黄金分割以及若干性质,Fibonacci 数列的数论性质,Fibonacci 数列与母函数、连分数、互补数列,以及 Fibonacci 数列的模周期等相关内容,并在每章后给出相应的练习题.本书从多个方面介绍了 Fibonacci 数列,章后练习题让读者更能深刻理解 Fibonacci 数列,内容丰富,叙述详尽.

本书可供高等院校理工科师生及数学爱好者研读及收藏.

图书在版编目(CIP)数据

Fibonacci 数列中的明珠/张光年著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.6(2019.4 重印)
ISBN 978-7-5603-7332-4

Ⅰ.①F… Ⅱ.①张… Ⅲ.①斐波那契序列 Ⅳ.①O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 085759 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 陈雅君
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 22.25 字数 447 千字
版　　次 2018 年 6 月第 1 版 2019 年 4 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-7332-4
定　　价 58.00 元

序言

我与本书作者张光年老师的结缘是在第二届全国初等数学学术交流会议上，他的数学论文深深地吸引了我，一个普通的数学教师竟然对 Fibonacci 数列如此痴迷，让我十分震惊.

他工作在教学一线，成绩斐然. 持续多年研究如一日，在孤寂里苦心推算；参加了四次全国初等数学研究学术交流会，在交流会上博采众长；经过近 30 年的潜心研究、反复演算、资料收集、陆续有得，形成了眼前的《Fibonacci 数列中的明珠》一书. 作为一个曾经的数学教师，我不得不为数学基础教育领域的张光年老师点赞.

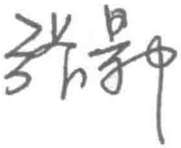
Fibonacci 数列与众多领域都有关联. 许多神奇的数学性质在美学、植物学、社会学、生物学等领域游走，黄金分割0.618 这个数字到处出现，都得益于 Fibonacci 数列.

本书的最大亮点在第 5 章和第 8 章. 在第 5 章中，作者用母函数法轻松地证明了 Fibonacci 数列中连续 k 项之间的关系，显得新颖便捷. 书中对母函数的不同变形得到了不同的等式性质，还建立了母函数库，为研究 Fibonacci 数列的性质的数学爱好者提供了方便. 在第 8 章 Fibonacci 数列的模周期中，作者找到了 Fibonacci 数列的模周期的三个特征量的一些新的性质，如当 $d(m)=4l(l\in\mathbf{N})$ 时，$O_m(f_{d(m)-1})=2$，等等. 张老师说这是他印象中最简洁、最优美、最让人赏心悦目的数学公式

之一.

数学文献浩如烟海，我自己对 Fibonacci 数列所知不多，难以确定张老师获得的公式是否是新的发现，也难以评价其意义，但这并不是最重要的. 重要的是，Fibonacci 数列是即将退休的张老师毕生的追求！本书的每页每行，都包含着张光年老师的心血，显示出了他对数学的挚爱.

总之，本书融趣味性、工具性、研究性于一体，适合初高中学生、中学数学教师、大学生，以及其他数学爱好者阅读，笔者在此诚恳地向广大读者推荐.



2018 年 6 月 1 日

前言

数学是人类精神文明的重要组成部分，是科学进步的基础，Fibonacci（斐波那契）数列是数学中的一颗璀璨明珠，它的研究在数学及其他领域都有广泛的应用，促使越来越多的学者对其进行深入地研究.

自20世纪50年代初，苏联学者瓦罗别耶夫撰写《斐波那契数列》一书和1963年在美国出版的杂志《斐波那契季刊》之后，全世界每年有不少的Fibonacci数列爱好者和这方面的职业数学工作者，撰写了关于Fibonacci数列的许多论文和著作. 在这些论文和著作中有适合小学生阅读的趣味性、游戏类的；有适合中学生和中学教师学习探究的竞赛类、专题类的；也有适合于大学生、研究生和专门从事这方面研究的数学工作者的. 而本书是一本介绍数学家Fibonacci及Fibonacci数列性质的一本专著，是一本融合知识性、趣味性、实践性为一体的著作，也是我近30年在这方面学习、研究的成果.

1988年我在《重庆日报》看到重庆师范学院罗明老师解决了Fibonacci数列中三角形数的有限性证明后，重新燃起了我对Fibonacci数列的研究热情，于是我开始积累资料，探究并撰写相关论文. 我于1993年撰写的论文《二阶线性递归数列的模周期问题》，在第二届中国初等数学研究学术交流会上获得二等奖；2012年撰写的论文《Fibonacci数列的模数列的三个

特征量关系及性质》在第八届中国初等数学研究学术交流会上获得二等奖；2017 年撰写的论文《关于斐波那契数中的三角形数和完全平方数的初等证明》《用母函数库研究 Fibonacci 数列的性质》在第十届中国初等数学研究学术交流会上分别获得一等奖和二等奖. 这大大地鼓舞了我，激发了我将平时的研究心得梳理成书的欲望.

第 1 章和第 2 章浅显易懂，生动有趣地介绍了数学家 Fibonacci 和他在数学方面做出的贡献以及 Fibonacci 数列是如何产生的. 另外，在第 2 章中介绍了由 Fibonacci 数列产生的黄金数，当然，黄金数也可由初中平面几何中的黄金分割而产生，并且叙述了黄金数的奇特性质以及与美学、动植物学、物理学等方面的密切联系.

第 3 章至第 5 章结构清晰，系统地介绍了 Fibonacci 数列的相关性质，以便读者查阅、使用这些性质. 特别是第 5 章用 Fibonacci 数列的母函数库研究 Fibonacci数列的相关性质，这是一种全新的、独创的方法，读者很容易理解和掌握. 用这一方法很轻松地证明了 Fibonacci 数列的许多性质，并得到一些新的性质.

第 6 章和第 7 章分别介绍了 Fibonacci 数列与数学的两个特殊分支——连分数和互补数列的特殊关系. 第 8 章介绍了 Fibonacci 数列的模周期，经过深入地研究得到简洁、优美的定理，并且深刻揭示了 Fibonacci 数列的预备周期、模 m 的次数、模周期之间的关系.

学习数学的唯一途径是动手去做，同样我们要学习或研究 Fibonacci 数列的相关性质也一定要动手去做. 出于这一原因，在本书的各章后面配套了共 161 道习题，并给出了参考答案，有些习题可能在几个章节都有出现，目的是用不同的定理、性质和方法去解决，这样可以对 Fibonacci 数列有更深入的理解. 特别是第 9 章 Fibonacci 数列与数学竞赛，为我们要参加数学竞赛的学生和指导老师提供了大量例题和习题，这些例题和习题都是国际、国内的经典竞赛题，相信这一章节一定会让师生们受益颇多.

小学高年级和初中学生可阅读本书的第 1 章、第 2 章，高中生和中学数学教师可阅读第 3 章至第 6 章，剩余几章只要有一定数论和组合数学知识基础的皆可阅读.

另外，借此机会对帮助过我的同事表达谢意，感谢陈建老师为我研究“Fibonacci数列的模数列的预备周期”编写程序，缩短了研究过程中的计算时间；感谢我的女儿张一乙，帮我构想本书结构和录入数学公式.

在选定本书各章节的内容和执笔写作的过程中，我参考了大量的文献，这些文献都已经附列在书末，在此谨向这些文献的作者表示感谢.

由于作者水平有限，书中难免有不足之处，恳请专家、读者不吝赐教.

张光年

2018 年 2 月 2 日

于重庆沙坪坝 香格里拉

目录

第 1 章　Fibonacci 数列的产生　//1

1.1　数学家 Fibonacci　//1

1.2　Fibonacci 数列　//5

1.3　Fibonacci 数列与其他学科　//10

1.4　Fibonacci 数列与其他综合问题　//13

练习题 1　//25

第 2 章　Fibonacci 数列与黄金分割　//30

2.1　由 Fibonacci 数列产生的 ω　//30

2.2　数学家眼中的 ω　//32

2.3　神奇的 ω　//34

2.4　几何中的 ω　//34

2.5　e,i 两个常数与 ω　//38

2.6　直角三角形中的 ω　//39

2.7　Pólya 三角形与 ω　//40

2.8　华罗庚优选法与 ω　//42

2.9　股票市场与 ω　//44

练习题 2　//46

第 3 章　Fibonacci 数列的若干性质　//48

3.1　Fibonacci 数列的通项公式　//48

3.2 Fibonacci 数的二元多项式表示 //50
3.3 Fibonacci 数列的 Cassini 等式 //51
3.4 Fibonacci 数列与 Lucas 数列的关系及其性质 //54
3.5 Fibonacci 数列相邻几项之间的关系 //56
3.6 Fibonacci 数列的积商幂之间的关系 //60
3.7 Fibonacci 数列倍数项之间的关系 //62
3.8 与 Fibonacci 数列有关的前 n 项和 //64
3.9 Fibonacci 数列与反三角函数 //68
3.10 Fibonacci 数列中的不等式 //69
3.11 Fibonacci 数列是凸数列 //74
3.12 与 Fibonacci 数列有关的极限及无穷项之和或积 //76
3.13 Fibonacci 数与组合数 //79
3.14 以 Fibonacci 数为系数的多项式与 Fibonacci 多项式 //82
3.15 Fibonacci 数列是完全数列 //83
3.16 Fibonacci 数系与二进制数系 //86
3.17 Fibonacci 数与半完美正方形和半完美长方形 //87
3.18 Fibonacci 数与圆周率 π //88
3.19 Fibonacci 数与弱形角谷猜想 //90
练习题 3 //92
第 4 章 Fibonacci 数列的数论性质 //95
4.1 Lucas 定理 //95
4.2 Euclid 算法的有效性 //97
4.3 Fibonacci 数中的素数、合数 //98
4.4 Fibonacci 数与 Fibonacci 数之间的整除关系 //101
4.5 Fibonacci 数中的完全平方数和完全平方数的二倍 //103
4.6 Fibonacci 数和 Lucas 数中三角形数的罗明结论 //106
4.7 Fibonacci 数中的 Diophantus 数组 //108
4.8 含 Fibonacci 数的 Pythagoras 数组 //110
4.9 Fibonacci 数的三角形 //111
4.10 $F-H$ 三角形 //111
4.11 Fibonacci 数列的密率 //114
4.12 Pell 方程 //116

4.13 Pell 方程的 Fibonacci 数和 Lucas 数的解 //120
4.14 特殊不定方程的 Fibonacci 数和 Lucas 数的解 //125
4.15 与 Fibonacci 数有关的高次方程 //127
4.16 定理的应用 //129
4.17 Fibonacci 数列与类 Goldbach 猜想 //131
4.18 两个特殊不定方程与不变数 //136
练习题 4 //142
第 5 章 Fibonacci 数列与母函数 //144
5.1 母函数的预备知识 //144
5.2 常见数列的母函数 //147
5.3 与 Fibonacci 数列和 Lucas 数列有关的母函数的求法 //149
5.4 用母函数推导和寻找 Fibonacci 数列与 Lucas 数列的性质 //159
5.5 与 Fibonacci 数列和 Lucas 数列有关的母函数库 //175
5.6 Fibonacci 数列与 Lucas 数列的母函数库的应用 //183
5.7 母函数在其他方面的应用 //190
练习题 5 //194
第 6 章 Fibonacci 数列与连分数 //196
6.1 连分数的概念及定理 //196
6.2 连分数与 Pell 方程 //200
6.3 Fibonacci 数列与连分数 //201
练习题 6 //204
第 7 章 Fibonacci 数列与互补数列 //205
7.1 互逆数列与互补数列的概念 //205
7.2 互逆数列的重要定理 //207
7.3 互补数列的重要定理 //208
7.4 与 Fibonacci 数列相关的互补数列 //211
7.5 应用互逆数列与互补数列求通项公式 //212
练习题 7 //215
第 8 章 Fibonacci 数列的模周期 //217
8.1 线性递推数列的模周期 //217
8.2 Fibonacci 数列的模数列的三个特征量关系 //220
8.3 关于 $d(m)$ 的性质 //222

8.4 关于 $O_m(f_{d(m)-1})(m\geqslant 2, m\in\mathbf{N})$的性质 //227
8.5 以合数为模的 $d(m)$,$T(m)$的性质 //232
8.6 广义 Fibonacci 数列与广义 Lucas 数列及性质 //235
8.7 两个重要定理 //237
8.8 $D(a,b,m)$,$O_m(t)$, $T(a,b,m)$的概念 //240
8.9 关于 $T(a,b,p)$,$D(a,b,p)$,$O_p(F_{kD(a,b,p)+1})$的有关结果 //240
8.10 定理的应用 //244
练习题 8 //245
第 9 章 Fibonacci 数列与数学竞赛题 //246
9.1 与 Fibonacci 数列的通项公式和递推关系有关的问题 //246
9.2 与黄金数有关的问题 //249
9.3 与 Fibonacci 数列有关的求值问题 //250
9.4 与 Fibonacci 数列等式性质有关的问题 //250
9.5 与 Fibonacci 数列有关的数论问题 //251
9.6 与 Fibonacci 数列不等式有关的问题 //253
9.7 Fibonacci 数列应用在解题之中 //255
9.8 Fibonacci 数列的应用 //256
9.9 Fibonacci 数列的综合问题 //257
练习题 9 //258
练习题参考解答 //263
参考文献 //325

Fibonacci 数列的产生

第1章

1.1　数学家 Fibonacci

Fibonacci(斐波那契,1175—1250)出生在意大利比萨市的一个商人家庭,幼年随经商的父亲波纳契奥在阿尔及利亚受教育,学到很多当时未传到欧洲的阿拉伯数学知识.他成年后又随父亲到过埃及、希腊、叙利亚、印度、法国和意大利的西西里岛.他拜访了所到之地的很多数学家,学习了大量的东方数学知识,特别是印度、阿拉伯的代数知识.阿拉伯十进制系统主要由 Fibonacci 推广到欧洲.

Fibonacci 是第一个将东方数学知识传到西方的人,他是那个时代最有才华的数学家.保存至今的 Fibonacci 著作有 5 部:(1)《算盘书》(*Liber Abaci*,1202,1228);(2)《几何实习》(*Practica Geometriae*,1220,1221);(3)《花朵》(*Flos*,1225);

(4) 给帝国哲学家 Theodorus(西奥多罗斯) 的一封未注明日期的信;(5)《四艺经》(*Liber Quadratorum*,1225).

有一个著名而有趣的"遗产问题":"某人临死前立下遗嘱说,把他的遗产进行如下分配:给长子1个金币和余下的$\frac{1}{7}$;从剩余的金币中给次子2个金币和余下的$\frac{1}{7}$;从再次剩余的金币中给三子 3 个金币和余下的$\frac{1}{7}$,如此继续分配下去,每个儿子比前面的哥哥多得 1 个金币再加上余下的$\frac{1}{7}$,到最后一个儿子得到余下的全部.结果这样使得每个儿子得到的一样多,问:此老者几个儿子,有多少个金币?"此题在欧洲十分流行,甚至连大数学家 Euler(欧拉) 也在他的著作中研究过这个"遗产问题".

大家可以试一试,答案是"有 36 个金币,6 个儿子". 这个问题就是 Fibonacci 的《算盘书》里的一个趣题.

Fibonacci 成名之后,时常出入于罗马帝国的宫廷.据说在 1225 年,比萨市举行数学竞赛时,罗马帝国的皇帝弗里德希二世和伴随他的一些数学家向 Fibonacci 提出了一个问题:求一个完全平方数,使得它无论是加上 5 或减去 5 后,仍然是完全平方数(当然这里说的平方数是指开方后是一个有理数). Fibonacci 只思考片刻,便找到了这样一个数$\left(\frac{41}{12}\right)^2$,这的确是问题的一个解.由此可以看出,Fibonacci 对数的运算有其高超的技巧. 他实际上是在 Diophantus(丢番图)之后 Fermat(费马)之前 2000 年间欧洲最杰出的数论家.而且他对不定方程的解也有自己的独到之处.他在数论、解高次方程等各领域(在那个时代)有着重要贡献.下面举一些有代表性的研究展示给读者.

Fibonacci 在同余方程方面的研究.令一个设定数分别被 3,5,7 除,求每次所余的数.被 3 除每余 1 记下 70,被 5 除每余 1 记下 21,被 7 除每余 1 记下 15.如果所得的数大于 105,那么减去 105,结果就是设定数.这种叙述同中国剩余定理有些类似.用这种解法可以比较容易地解出下面问题的解.例:设一个数除以 3 余 2,记下 70 的 2 倍或 140,减去 105 余 35;原数除以 5 余 3,记下 21 的 3 倍或 63,与上述 35 相加得 98;原数除以 7 余 4,记下 15 的 4 倍或 60,与上述 98 相加得 158,减去 105 余 53.这就是所设定的数.

将一个普通分数化为单位分数之和 ,这是一个古老的数论问题. Fibonacci 非常巧妙地把普通分数化为单位分数之和与自然数 12,24,36,48,60 相联系. Fibonacci 选取 12,24,36,48,60,其中作为辅助量去乘、除已给分数,是因为这些数含有较多的素因数,增加与分子约简成 1 的机会[1].

Fibonacci 举了这样一个例子,如要把$\frac{17}{29}$化为单位分数之和,分母 29 与 24

比较接近,就取 24,即

$$\frac{17}{29}\times 24\div 24=\frac{1}{24}\times\left(14+\frac{2}{29}\right)=\frac{14}{24}+\frac{1}{24}\times\frac{2}{29}$$

由于 24 为分母,第一项易化为单位分数之和

$$\frac{14}{24}=\frac{12}{24}+\frac{2}{24}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$$

第二项为

$$\frac{1}{24}\times\frac{2}{29}=\frac{1}{348}$$

于是

$$\frac{17}{29}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{348}$$

当然第一项也可以分解为

$$\frac{14}{24}=\frac{8}{24}+\frac{6}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

即

$$\frac{17}{29}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{348}$$

Fibonacci 还举了下例

$$\frac{20}{53}=\frac{1}{48}\times\frac{960}{53}=\frac{1}{48}\times(18+\frac{6}{53})=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{424}$$

这种算法与中国少广术有相同的地方.当然这不是一般方法,关于将一个普通分数化为单位分数之和已经有非常成熟的方法,读者可以去阅读相关的书籍.

Fibonacci 在神圣的罗马帝国皇帝 Frederick(1194—1250) 御前进行数学考试,他解得三次方程 $x^3+2x^2+10x=20$ 的根精确到(六十进制)小数点后六位数字,人们不知道他用的是什么方法.两卷书《数学史》作者 D. E. Smith 说:"没有人知道这个结果是怎样获得的,但是这类数学方程当时在中国已解决,并且当时东西方已有来往,从这些事实我们相信是 Fibonacci 在旅游中学到的."比利时学者 U. Libbrecht 说:"如果 Fibonacci 知道增乘开方方法的话,那么非常可能他是从伊斯兰数学家那里学来的,而后者师承先行者 —— 中国学者."

Fibonacci 在其《花朵》一书中有一道题:三人共有一笔钱,每人各占 $\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{6}$.现每人从这笔钱里各取一些,直到取完为止.然后,第一人放回他取的 $\frac{1}{2}$,第二人放回他取的 $\frac{1}{3}$,第三人放回他取的 $\frac{1}{6}$,再把放回的钱平均发还三人,这时每人所有的钱恰是原先所有.问:共有多少钱? 每人从中各取了多少钱?

Fibonacci 的解法相当于设共有钱 x，放回的钱共 $3y$. 根据题意，列出方程

$$2\left(\frac{x}{2}-y\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{x}{3}-y\right)+\frac{6}{5}\left(\frac{x}{6}-y\right)=x$$

整理得

$$7x=47y$$

其中 $x=47$，$y=7$ 是一组解.

Fibonacci 的著作《四艺经》中，介绍了古希腊著名数学家 Diophantus 的著作中出现的 Diophantus 恒等式

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2)&=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2\\&=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2\end{aligned}$$

Fibonacci 用 Diophantus 恒等式推导出一些定理，使阿拉伯人的一些成果得到严格的理论证明. 由这一恒等式很容易推得：二维 Cauchy（柯西）不等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$$

用这一恒等式可以证明：若正整数 n 的所有奇质因数被 4 除余 1，则这个正整数 n 可表示为两整数的平方和.

Archimedes（阿基米德，公元前 287— 前 212），希腊数学家、力学家、天文学家，生于西西里岛的叙拉古，卒于叙拉古. 父亲 Phidias（菲迪亚斯）是天文学家，Archimedes 是当时叙拉古统治者 King Hieron（赫农王）的亲戚，和王子 Geolon（吉伦）是亲密好友，早年在亚历山大跟随 Euclid（欧几里得）学习，以后仍保持着密切联系，因此他算是亚历山大学派的成员，后人对 Archimedes 给予了极高的评价，数学史家 Bell. E. T（贝尔）说：“任何一张列出有史以来的三个最伟大的数学家名单中，必定包括 Archimedes，另外两个通常是 Gauss（高斯）和 Newton（牛顿）.”Pliny（普林尼）称 Archimedes 是“数学之神”. 他对圆周率计算有极其深入的研究. 除了数学之外，他还发明了能省水的 Archimedes 式螺旋抽水机，Archimedes 爪（一种能击沉船只的作战用的起重机），一种神秘的热光武器（利用镜子密集反射太阳光），还有著名的 Archimedes 浮力定律.

Fibonacci 虽然当时是一个很有名的数学家，但在数学研究中也同大数学家 Fermat 一样犯过错误. 我们知道，早在公元前 3 世纪古希腊大数学家 Archimedes 就推出了椭圆的面积公式 $S=\pi ab$. 他在《论劈锥曲面体与球体》(*On Conoids and Spheroids*) 命题 4 中证明：椭圆与以椭圆的短轴为直径

的辅助圆面积之比等于椭圆的长轴长与短轴长之比，推出椭圆面积 $S=\pi ab$，其中 a,b 分别表示椭圆的长半轴长和短半轴长. 椭圆周长怎么计算呢？我们知道大数学家 Archimedes 的解题思路，圆周长与外切正方形的周长之比等于它们的面积之比 $\pi:4$，于是数学家 Fibonacci 利用这个结论类比推得椭圆周长公式，他认为椭圆与它的外切长方形的周长之比等于它们的面积之比，外切长方形面积等于 $2a\times 2b=4ab$，椭圆面积 $S=\pi ab$，外切长方形周长等于 $2(2a+2b)=4(a+b)$，从而推出椭圆周长公式为 $L=\pi(a+b)$. Fibonacci 用类比方法得到的所谓椭圆周长公式虽然简单漂亮，但却是错误的. 实际上椭圆周长不能用一个简单的有理公式来表示. 在这里给出一个椭圆周长的一个近似计算公式

$$\pi\left[\frac{5}{4}(a+b)-\frac{ab}{a+b}\right]<L<\pi\left[\frac{3}{2}(a+b)-\sqrt{ab}\right]$$

当然还有更精确的近似计算公式，但是很烦琐，这里就不列举了.

Fibonacci 收集了东西方的大量数学知识，于 1202 年发表了《算盘书》(1228 年再版)，流传了好几个世纪. 这成了他的成名之作，书中包含了由印度数学产生的四则运算、商业算术、代数学，在这本书中他引进了印度－阿拉伯数字，并在他的倡导下，欧洲长期惯用的罗马数字逐渐被印度－阿拉伯数字代替了. 在这本书里还有一个非常著名而有趣的问题，就是被后人称颂的 Fibonacci 数列(或叫兔子问题). 虽然，Fibonacci 可能并不是第一个发现此数列的人，但我们的数学史家可以肯定第一个把这个数列记载在著作中的应是他. 因此，以他的名字来命名这个数列，从数学史家的角度看是十分公正的. Fibonacci 数列的称呼是由法国数学家 Lucas(卢卡斯) 提议的.

Fibonacci 数列是本书要研究的主要内容，那么，Fibonacci 数列是一个什么样的问题呢？

1.2 Fibonacci 数列

某人想知道一年内，一对兔子可以繁殖多少对兔子，他筑了一道围墙将兔子关在里面，观察并逐月记录兔子的对数，假设兔子的繁殖力是这样的，每一对成兔每月生一对幼兔，幼兔经过两个月后成为成兔，即开始繁殖，在这个过程中无死亡，问：一对兔子一年内繁殖成几对？

现在我们根据题意来分析兔子是怎样繁殖的.

假定在 1 月初买来一对小兔(一雄一雌)，到 1 月末生出一对幼兔，到 2 月份变成 2 对兔子，2 月末原来的一对成兔又生出一对幼兔，由题意知，另一对兔子(月末生的) 还不具备生育能力，于是在 3 月份中总共有 3 对兔子，其中有两对