

Basic Principles of
Engineering Finite Element Method

工程有限元法基本原理

李立新 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

工程有限元法基本原理

李立新 编著



图书在版编目 (CIP) 数据

工程有限元法基本原理 / 李立新编著. —杭州:
浙江大学出版社, 2019.7
ISBN 978-7-308-19245-3

I. ①工… II. ①李… III. ①有限元法—应用—工程
设计 IV. ①TB21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 125284 号

工程有限元法基本原理

李立新 编著

责任编辑 杜希武
责任校对 陈静毅 汪志强
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州好友排版工作室
印 刷 嘉兴华源印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 11.25
字 数 280 千
版 次 2019 年 7 月第 1 版 2019 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-19245-3
定 价 39.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社市场运营中心联系方式: (0571) 88925591; <http://zjdxcsb.tmall.com>

前 言

有限元分析已经成为现代工程设计不可或缺的辅助工具。从机械、建筑、桥梁设计到飞机、水电、核电设计,举凡涉及复杂结构、介质与载荷的场合,都需要使用这一工具进行仿真分析,以优化设计并确保安全。

当今,工程设计人员自己编程进行有限元分析的做法已经过时,直接采用商品化有限元分析软件(如 ANSYS)解决设计中面临的工程分析问题具有自己编程无法比拟的性价比。与此同时,一些计算机辅助设计软件,如 SolidWorks,也已经集成了部分有限元分析模块。专业有限元分析软件与集成在计算机辅助设计软件中的有限元分析模块,这两种工具的关系,类似于照相机与集成在手机上的照相机组件之间的关系:前者专业,后者便捷。但无论是专业软件还是集成模块,要想用好这些商品化的有限元分析工具,单纯学习软件使用手册与重复实例练习是远远不够的。只有真正理解了有限元法的基本原理和数学逻辑,并对其优势与局限有所了解,才能正确地抽象和简化工程问题,设置合理的分网密度与加载方式,选择合适的求解算法,最终获得有效的分析结果。

然而,深入浅出地讲好有限元法的基本原理和数学逻辑并不容易。注重有限元法原理的书籍往往都是从某种数学理论讲起,涉及多数读者并不熟悉的变分法或者某种极值原理以及复杂的编程技巧,从而使读者陷入数学上的困境,难以看清有限元法的逻辑脉络,因而并不适合当今时代的多数读者。正因如此,已经出版的多数关于有限元法的书籍都采取了避开理论,或者只是简单地罗列理论公式,而重点讲解实例操作的策略。这类书籍虽然拥有众多读者,但对读者真正理解有限元法的原理帮助不大。正是在这种情形下,作者根据多年的教学工作与工程实践经验,觉得有必要从便于工科学生和工程设计人员理解的角度,而不是从理论研究和编程开发的角度,编写一本结合工程实例讲述有限元法基本原理的教程。这就是编写此书的初衷。

因此,本书面向的读者,既不是有限元理论的研究者,也不是有限元软件的开发人员,而是有限元软件的使用者,他们通常是具有大专基础的工科学生和工程设计人员。

为了方便读者,部分例题及习题答案的电子文档分享在百度网盘中,如有需要,可扫描封底的二维码免费下载。

限于作者水平,书中错误与不足在所难免,恳请读者来信批评指正:lilixin@zju.edu.cn。

李立新

2018年12月于求是园

目 录

第 1 章 预备知识	1
1.1 拉格朗日插值	1
1.2 伽辽金法	2
1.3 拉格朗日方程	8
1.4 弹性力学基本方程	10
1.4.1 应变—位移关系	11
1.4.2 应力—应变关系	11
1.4.3 Von Mises 应力	12
1.5 传热学基本方程	13
1.6 流体力学基本方程	14
1.7 思考题	18
第 2 章 单元、形函数与分段插值	20
2.1 直角坐标系与重心坐标系	20
2.2 直角坐标系下的等参单元	21
2.3 等参单元的有效性	25
2.4 重心坐标系下的等参单元	27
2.5 网格划分与分段插值估计	30
2.6 ANSYS 中的单元及其自由度	31
2.7 镜像对称与轴对称	33
2.8 思考题	33
第 3 章 弹性结构分析的有限元格式	35
3.1 单元内各点的位移、速度、加速度与应变	35
3.2 单元体的动能、弹性势能与保守外力所做的功	37
3.3 弹性结构的总动能、总弹性势能与保守外力所做的总功	39
3.4 结构分析有限元格式的导出	40
3.5 关于阻尼矩阵的讨论	41
3.6 边界条件的引入	42

3.7	装配示例	43
3.8	思考题	44
第4章	弹性结构稳态分析	46
4.1	稳态分析的有限元格式	46
4.2	杆单元	46
4.3	桁架中的杆单元	49
4.4	二维单元	52
4.5	正确使用 ANSYS 的若干注意事项	55
4.5.1	ANSYS 的启动与界面	55
4.5.2	单位统一	56
4.5.3	实体模型	57
4.5.4	实体模型载荷与有限元模型载荷	58
4.5.5	网格密度控制	58
4.6	ANSYS 二维结构分析实例	59
4.7	ANSYS 三维结构分析实例	61
4.8	思考题	65
第5章	弹性结构动态分析	67
5.1	结构单元的质量矩阵	67
5.2	特征值与特征向量	68
5.3	模态分析与预应力	70
5.4	瞬态分析显式解法——中心差分法	72
5.5	瞬态分析隐式解法——纽马克方法	76
5.6	方程解耦与振型叠加法	83
5.7	思考题	84
第6章	多体接触结构分析	86
6.1	多体接触结构分析分类	86
6.2	自由度耦合	86
6.3	线性方程约束	89
6.4	运动副单元	91
6.4.1	卡登角	91
6.4.2	运动副单元的类型	91
6.4.3	构件与运动副单元的连接	93
6.5	面—面接触	98
6.6	碰撞为主型多体接触分析	105

6.7 思考题	111
第7章 有限元传热分析	112
7.1 传热分析的有限元格式	112
7.2 稳态传热分析	115
7.3 瞬态传热分析	118
7.4 热应力计算	119
7.5 ANSYS 热应力分析实例	120
7.6 思考题	123
第8章 有限元流场分析	125
8.1 流场分析的有限元格式	125
8.2 流场分析中的其他数值方法	129
8.3 ANSYS 流场分析实例	132
8.4 思考题	146
附 录	147
A 梁单元与框架	147
B 稳态结构分析中的轴对称单元	154
习题答案	156
参考文献	169

初学者往往以为,有限元法可以代替专业领域的基本理论而直接解决实际问题。但事实刚好相反,专业领域的基本理论与必要的数学知识,才是理解有限元法并将其正确应用于相关专业领域以解决工程问题的前提。为此,本章列出了理解后续各章内容所需的预备知识以供参考。读者若需要了解更多细节以确认其正确性或进一步了解有关方程的来历,谨请查阅相关专业书籍。

1.1 拉格朗日插值

设已知函数 $f(x)$ 在 x_1, x_2, \dots, x_m ($x_1 < x_2 < \dots < x_m$) 处的值分别为 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, 则在 $[x_1, x_m]$ 内, 函数 $f(x)$ 的一种近似估计为

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m L_i(x) \varphi_i \quad (1.1)$$

其中

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^m \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1.2)$$

称为 $m-1$ 次拉格朗日插值多项式。容易验证

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1, & L_i(x_{j \neq i}) = 0 & (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m L_i(x) \equiv 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

因而式(1.1)必然通过型值点 $(x_1, \varphi_1), (x_2, \varphi_2), \dots, (x_m, \varphi_m)$, 称为拉格朗日插值。容易验证

当 $m=2$ 时

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}; \quad L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (1.4)$$

若 $x_1 = -1, x_2 = 1$, 则

$$L_1(x) = \frac{1}{2}(1-x); \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(1+x) \quad (1.5)$$

当 $m=3$ 时

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}; L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}; L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad (1.6)$$

若 $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$, 则

$$L_1(x) = \frac{1}{2}x(x-1); L_2(x) = (1-x)(1+x); L_3(x) = \frac{1}{2}x(x+1) \quad (1.7)$$

本节内容与有限元法的关联:拉格朗日插值的核心思想,是用插值多项式函数与域内型值点的函数值进行线性组合来估算全域内的函数值。在有限元法中,这样的型值点称为结点,由若干相邻结点围合而成的区域称为单元,在单元内分布的某个待求函数称为场函数,而单元域内的场函数总是用单元结点的场值与某种插值多项式(未必是拉格朗日插值多项式)的线性组合来估算的。这时的插值多项式,称为形函数。因此,理解拉格朗日插值的原理,是理解有限元法的基础。

1.2 伽辽金法

设在 t 时刻,空域 $\Omega(x, y, z)$ 内及其边界 Σ 上,分布着一个未知的场函数 $u = u(x, y, z)$, 已知它所满足的偏微分方程为

$$\mathbb{A}(u) = 0 \quad (x, y, z) \in \Omega \quad (1.8)$$

边界条件为

$$\mathbb{B}(u) = 0 \quad (x, y, z) \in \Sigma \quad (1.9)$$

其中 \mathbb{A}, \mathbb{B} 是 u 对 (x, y, z) 的微分算子。

在一般情形下,未知函数 u 不存在解析解,因而需要一个求解近似解的方法。伽辽金法正是这样一种方法,其具体做法如下

首先,选取 m 个形函数 $\mathbf{N}(x, y, z) = [N_1 \ N_2 \ \cdots \ N_m]$, 它们必须满足三个要求:1) 其适当的线性组合能够表示任意函数,只要 m 足够大;2) 这个适当的线性组合能够自动满足边界条件(1.9);3) 这 m 个形函数在区域 Ω 内是线性无关的,即仅当所有组合系数同为零时,其线性组合才在区域 Ω 内恒为零。这样, u 的近似解(m 项解)可以表示为

$$u^{(m)} = \sum_{i=1}^m N_i u_i^{(m)} = \mathbf{N} \mathbf{u}^{(m)} \quad (1.10)$$

其中的组合系数

$$\mathbf{u}^{(m)} = [u_1^{(m)} \ u_2^{(m)} \ \cdots \ u_m^{(m)}]^T \quad (1.11)$$

可由以下方程组决定

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{A} (u^{(m)}) d\Omega = 0 \quad (1.12)$$

式(1.12)通常会转变成 m 个代数方程,并且根据前述第三个要求,式(1.12)通常会有唯一的非零解。

例 1.1: 已知函数 u 在域 $[0,1]$ 内满足微分方程

$$\ddot{u}(x) + u(x) + x = 0 \quad [1]$$

和边界条件

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad [2]$$

求其近似解。

解法一: 选取 m 个形函数为

$$x(1-x), x^2(1-x), \dots, x^m(1-x) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad [3]$$

则方程[1]的 m 项解为

$$u^{(m)}(x) = x(1-x)(u_1^{(m)} + u_2^{(m)}x + \dots + u_m^{(m)}x^{m-1}) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad [4]$$

易知,这 m 个形函数满足前面所提的三个要求。

现取一项近似解,即 $m = 1$,代入(1.12),得

$$\int_0^1 x(1-x)[u_1^{(1)}(-x^2 + x - 2) + x]dx = 0 \quad [5]$$

即

$$\left[\int_0^1 x(1-x)(-x^2 + x - 2)dx \right] u_1^{(1)} + \int_0^1 x(1-x)x dx = 0 \quad [6]$$

解之,有: $u_1^{(1)} = 5/18$,因此一项近似解为

$$u^{(1)}(x) = (5/18)x(1-x) \quad [7]$$

取两项近似解代入(1.12),得

$$\int_0^1 \left[\frac{x(1-x)}{x^2(1-x)} \right] [x + u_1^{(2)}(-2 + x - x^2) + u_2^{(2)}(2 - 6x + x^2 - x^3)]dx = 0 \quad [8]$$

即

$$\begin{cases} \left[\int_0^1 x(1-x)(-2 + x - x^2)dx \right] u_1^{(2)} + \left[\int_0^1 x(1-x)(2 - 6x + x^2 - x^3)dx \right] u_2^{(2)} + \int_0^1 x^2(1-x)dx = 0 \\ \left[\int_0^1 x^2(1-x)(-2 + x - x^2)dx \right] u_1^{(2)} + \left[\int_0^1 x^2(1-x)(2 - 6x + x^2 - x^3)dx \right] u_2^{(2)} + \int_0^1 x^3(1-x)dx = 0 \end{cases} \quad [9]$$

解之,有: $u_1^{(2)} = 71/369, u_2^{(2)} = 7/41$, 因此两项近似解为

$$u^{(2)}(x) = x(1-x)(71/369 + 7x/41) \quad [10]$$

解法二:另取 $n+1$ 个形函数为

$$N_1^{(n+1)}(x) = \begin{cases} -nx + 1 & [0, 1/n] \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

$$N_i^{(n+1)}(x) = \begin{cases} nx - (i-2) & [(i-2)n, (i-1)n] \\ -nx + i & [(i-1)/n, i/n] \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, n; \quad n = 2, 3, \dots)$$

$$N_{n+1}^{(n+1)}(x) = \begin{cases} nx - (n-1) & [(n-1)/n, 1] \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad [11]$$

称为分段线性函数,当 $n = 4$ 时,如图 1-1 所示。

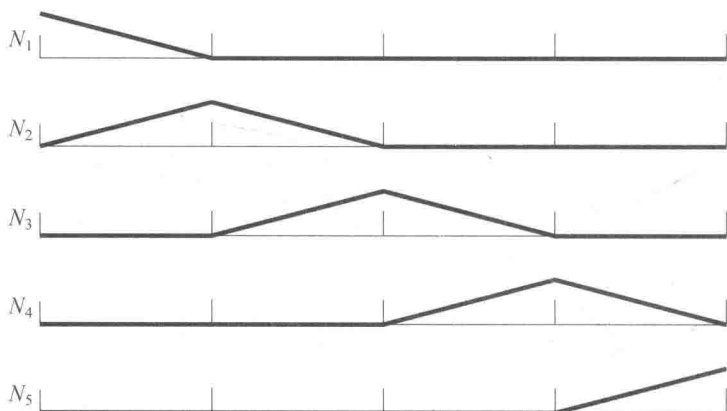


图 1-1 当 $n = 4$ 时的分段函数,每个函数的最大值为 1

则方程[1]的 $n+1$ 项解为

$$u^{(n+1)}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} N_i^{(n+1)}(x) u_i^{(n+1)} \quad (n = 2, 3, \dots) \quad [12]$$

其中

$$u_1^{(n+1)} = u(0), \quad u_{n+1}^{(n+1)} = u(1) \quad [13]$$

显然,这 $n+1$ 个形函数满足前述的三个条件;如将(1.3)中的函数 L_i 换作 N_i ,则同样成立。

直接求导, $n+1$ 项解[12]的一阶导数为

$$\dot{u}^{(n+1)}(x) = \begin{cases} n(u_2^{(n+1)} - u_1^{(n+1)}) & [0, 1/n] \\ n(u_{i+1}^{(n+1)} - u_i^{(n+1)}) & [(i-1)/n, i/n] \\ n(u_{n+1}^{(n+1)} - u_n^{(n+1)}) & [(n-1)/n, 1] \end{cases} \quad (i = 2, 3, \dots, n-1) \quad [14]$$

用差分估算(首末两段内的差分采用各自靠近内部结点处的差分值), $n+1$ 项解[12]的二阶导数为

$$\ddot{u}^{(n+1)}(x) = \begin{cases} n^2(u_3^{(n+1)} - 2u_2^{(n+1)} + u_1^{(n+1)}) & [0, 1/n] \\ n^2(u_{i+2}^{(n+1)} - u_{i+1}^{(n+1)} - u_i^{(n+1)} + u_{i-1}^{(n+1)})/2 & [(i-1)/n, i/n] \quad (i = 2, 3, \dots, n-1) \\ n^2(u_{n+1}^{(n+1)} - 2u_n^{(n+1)} + u_{n-1}^{(n+1)}) & [(n-1)/n, 1] \end{cases} \quad [15]$$

取 3 项解, 即 $n = 2$, 有

$$u^{(3)}(x) = \sum_{i=1}^3 u_i^{(3)} N_i^{(3)}(x) \quad [16]$$

其中

$$\begin{aligned} N_1^{(3)}(x) &= \begin{cases} -2x+1 & [0, 1/2] \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \\ N_2^{(3)}(x) &= \begin{cases} 2x & [0, 1/2] \\ -2x+2 & [1/2, 1] \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \\ N_3^{(3)}(x) &= \begin{cases} 2x-1 & [1/2, 1] \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \end{aligned} \quad [17]$$

同时

$$u_1^{(3)} = 0, \quad u_3^{(3)} = 0, \quad \ddot{u}^{(3)}(x) = -8u_2^{(3)} \quad [18]$$

由于 3 个待定系数中首末两个已经确定, 只有中间一个待求, 因此在(1.12)中只取中间一式, 有

$$\int_0^1 N_2^{(3)}(x)[-8u_2^{(3)} + u_2^{(3)} N_2^{(3)}(x) + x] dx = 0 \quad [19]$$

解之, 有

$$u_2^{(3)} = 3/44 \quad [20]$$

取 4 项解, 即 $n = 3$, 有

$$\begin{aligned} N_1^{(4)}(x) &= \begin{cases} -3x+1 & [0, 1/3] \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \\ N_2^{(4)}(x) &= \begin{cases} 3x & [0, 1/3] \\ -3x+2 & [1/3, 2/3] \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \end{aligned}$$

$$N_3^{(4)}(x) = \begin{cases} 3x-1 & [1/3, 2/3] \\ -3x+3 & [2/3, 1] \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

$$N_4^{(4)}(x) = \begin{cases} 3x-2 & [2/3, 1] \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad [21]$$

同时

$$u_1^{(4)} = 0$$

$$u_4^{(4)} = 0$$

$$\ddot{u}^{(4)}(x) = \begin{cases} 9(u_3^{(4)} - 2u_2^{(4)}) & [0, 1/3] \\ 9(-u_3^{(4)} - u_2^{(4)})/2 & [1/3, 2/3] \\ 9(-2u_3^{(4)} + u_2^{(4)}) & [2/3, 1] \end{cases} \quad [22]$$

由于4个待定系数中首末两个已经确定,只有中间两个待求,因此在(1.12)中只取中间两式,有

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^{1/3} 3x[9(u_3^{(4)} - 2u_2^{(4)}) + u_2^{(4)} \cdot 3x + x]dx + \\ & \int_{1/3}^{2/3} (-3x+2)[9(-u_3^{(4)} - u_2^{(4)})/2 + u_2^{(4)}(-3x+2) + u_3^{(4)}(3x-1) + x]dx = 0 \\ & \int_{1/3}^{2/3} (3x-1)[9(-u_3^{(4)} - u_2^{(4)})/2 + u_2^{(4)}(-3x+2) + u_3^{(4)}(3x-1) + x]dx + \\ & \int_{2/3}^1 (-3x+3)[9(-2u_3^{(4)} + u_2^{(4)}) + u_3^{(4)}(-3x+3) + x]dx = 0 \end{aligned} \right. \quad [23]$$

解之,有

$$u_2^{(4)} = 185/3822, \quad u_3^{(4)} = 283/3822 \quad [24]$$

可以验证,这个问题的精确解为

$$u(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x \quad [25]$$

为对照起见,将近似解[7]、[10]、[20]、[24]与精确解[25]分别用图形显示在图1-2中。

本节内容与有限元法的关联:通过对照可以看出,例1.1中的两种方法都可以使近似解收敛到精确解,但两种方法各有特点。第一种方法是全域逼近的,它通过提高全域内插值函数的次数来逼近真解;第二种方法是局域逼近的,它通过提高对域划分的段数来逼近真解。通常情形下,全域逼近收敛更快,但要找到自动满足边界条件的函数系列并不容易,特别是对二维、三维的具有一般形状空域的问题,这样的解析函数系列往往并不存在;在这种情形

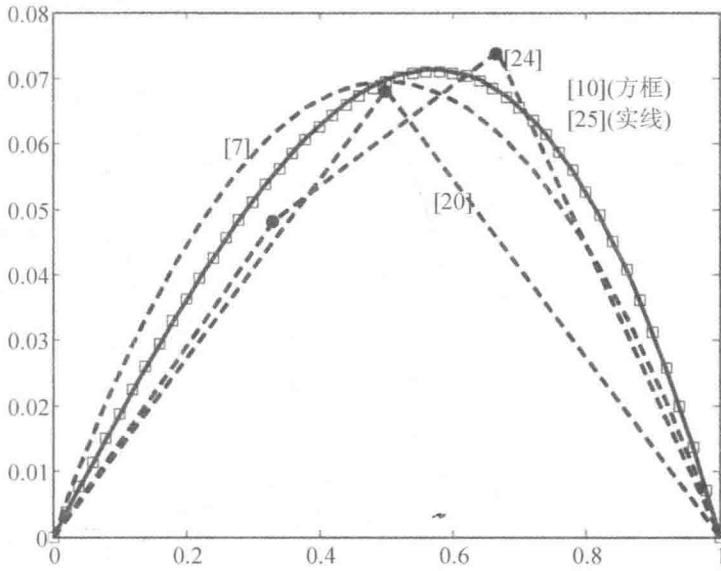


图 1-2 两种近似方法与精确解的对照

下,就需要在(1.12)中将对边界条件(1.9)的相应积分也考虑进去,从而使之变得复杂。这种全域逼近的方法称为谱方法,在 ANSYS 的早期版本中称为 p -方法,现已废弃不用。与此相反,局域逼近虽然收敛较慢,但由于近似函数采用分段插值的方式,可以自动满足边界条件,因而在有限元分析中得到广泛应用,在 ANSYS 中称为 h -方法。从图 1-1 中可以看出,每一个分段点(对应于有限元法中的结点)对应一个形函数,每个形函数只在包含此分段点的分段(对应于有限元法中的单元)内不为零;在任一分段内,也只有与此段分段点相应的形函数不为零。因此,所有形函数与分段点场值的线性组合,既在全域上完成了一个形态自由

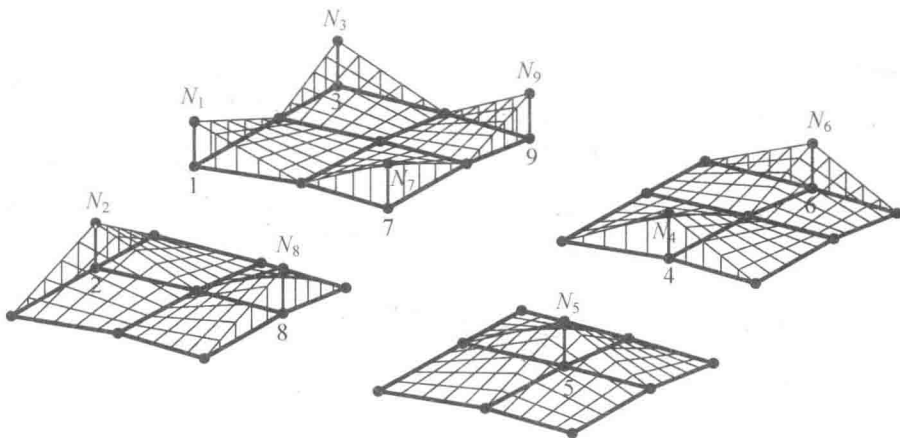


图 1-3 四单元平面域上的 9 个分段双线性函数,每个函数的最大值为 1

的分段插值,也在每个段内完成了一个线性插值。再如图 1-3 中给出的由 9 个结点 4 个单元构成的平面域上的 9 个双线性形函数,从中可以看出:每个结点上的形函数,只在此结点相邻的单元内不为零;在每个单元内,也只有此单元 4 个结点相应的形函数不为零。这样,在全域 Ω 上的 9 项解,就退化成了每个单元内的 4 项解,而且这 4 项解的形式正是形函数与单元结点场值的线性组合:一个双线性插值。因此,积分(1.12)可以转换为在单元上的积分之和,即

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{N}^T \Delta(u^{(m)}) d\Omega = \sum_r \iiint_r \mathbf{N}^T \Delta(u^{(m)}) d\Omega = 0 \quad (1.13)$$

当然,在 h -方法中,形函数不仅可以是分段线性的,还可以是次数更高的;与此相应的单元,分别称为线性单元与高次单元。由于传热学方程与流体力学方程正是按照(1.8)的形式给出的,因而可以采用伽辽金法(h -方法)分别导出传热分析的有限元格式和流体分析的有限元格式。

1.3 拉格朗日方程

假设由 n 个质点构成的质点系,其全部质点的位置坐标可以表示为

$$x_k = x_k(Q_1, Q_2, \dots, Q_M) \quad (k = 1, 2, \dots, 3n) \quad (1.14)$$

即可以由 M 个独立参数或称为广义坐标 Q_j ($j = 1, 2, \dots, M$) 决定,则称式(1.14)为此质点系受到的几何约束。此时,质点系的运动满足拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial Q_j} = F_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, M) \quad (1.15)$$

其中 T 是系统的动能, \dot{Q}_j 是广义速度, F_j 是与广义坐标 Q_j 相应的广义力,其定义为

$$F_j = \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial x_k}{\partial Q_j} X_k \quad (j = 1, 2, 3, \dots, M) \quad (1.16)$$

其中 X_k 是与 x_k 相应的某质点所受的沿 x_k 方向的主动力。主动力通常不包含由理想约束产生的内力,因为这些内力的功之和为零,不会影响系统的动能。当存在非理想约束时,内力将对质点系做功,这时它们应当作为主动力考虑。

在弹性结构有限元分析中,质点所受的主动力通常可以表示为

$$X_k = G_k - P_k - C_k \dot{x}_k \quad (k = 1, 2, \dots, 3n) \quad (1.17)$$

其中 G_k 是保守外力, P_k 是保守内力,第三项表示介质阻尼力,是非保守力, C_k 是速度阻尼系数。同时

$$G_k = \frac{\partial W}{\partial x_k}; \quad P_k = \frac{\partial E}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, 3n) \quad (1.18)$$

其中 W 是保守外力所做的功; E 是保守内力所做的功,它以弹性势能的形式存在于弹性结

构中。

当几何约束是线性约束时,式(1.14)成为

$$x_k = \sum_{j=1}^M h_{kj} Q_j \quad (k = 1, 2, \dots, 3n) \quad (1.19)$$

从而

$$\dot{x}_k = \sum_{j=1}^M h_{kj} \dot{Q}_j \quad (k = 1, 2, \dots, 3n) \quad (1.20)$$

其中 h_{kj} 是与 x_k 和 Q_j 相关的常数。显然,在这种情形下, Q_j 不会出现在 T 的表达式中,因此

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_j} = 0 \quad (1.21)$$

同时

$$\begin{aligned} F_j &= \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial x_k}{\partial Q_j} (G_k - P_k - C_k \dot{x}_k) = \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial x_k}{\partial Q_j} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial x_k}{\partial Q_j} \frac{\partial E}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial x_k}{\partial Q_j} C_k \dot{x}_k \\ &= \frac{\partial W}{\partial Q_j} - \frac{\partial E}{\partial Q_j} - \sum_{k=1}^{3n} h_{kj} C_k \left(\sum_{i=1}^M h_{ki} \dot{Q}_i \right) = \frac{\partial W}{\partial Q_j} - \frac{\partial E}{\partial Q_j} - \sum_{i=1}^M \left(\sum_{k=1}^{3n} C_k h_{ki} h_{kj} \right) \dot{Q}_i \\ &= \frac{\partial W}{\partial Q_j} - \frac{\partial E}{\partial Q_j} - \sum_{i=1}^M C_{ij} \dot{Q}_i \quad (j = 1, 2, 3, \dots, M) \end{aligned} \quad (1.22)$$

其中 C_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, M$) 是与 Q_i 和 Q_j 相关的线性阻尼系数,并且显然 $C_{ij} = C_{ji}$ 。

这时,拉格朗日方程(1.15)可用矩阵表示为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{Q}}} \right) + \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{Q}} + \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{Q}} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{Q}} \quad (1.23)$$

其中

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_M \end{bmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \vdots \\ \dot{Q}_M \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1M} \\ & C_{22} & \cdots & C_{2M} \\ & & \vdots & \vdots \\ S & & & C_{MM} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

\mathbf{C} 称为介质阻尼矩阵,是一个对称矩阵。

例 1.2: 如图 1-4 所示,一个质点系由两个振子与三根轻质弹簧(不计质量)组成。已知:两振子的质量分别为 m_1 和 m_2 , 弹簧的刚度系数分别为 k_1 、 k_2 和 k_3 , 两振子所受速度阻尼的系数为 C_1 和 C_2 , 作用于两振子上的外力分别为 G_1 和 G_2 。试列出系统的动力学方程。

解: 首先,选两质点从平衡位置发生的位移 x_1 与 x_2 为广义坐标,式(1.14)或(1.19)成为

$$x_k = Q_k \quad (k = 1, 2) \quad [1]$$

并且式(1.19)中系数 $h_{ij} = 1$ ($i = j$ 时), $h_{ij} = 0$ ($i \neq j$ 时),因而在式(1.23)中有