

塑性力学

主 编：程良彦

副主编：王钦亭 聂振华

 吉林大学 出版社

基金资助教材

塑性力学

主 编：程良彦

副主编：王钦亭 聂振华

图书在版编目 (CIP) 数据

塑性力学 / 程良彦主编. — 长春 : 吉林大学出版社, 2018.12
ISBN 978-7-5692-4166-2

I. ①塑… II. ①程… III. ①塑性力学 IV.
① 0344

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 009048 号

书 名: 塑性力学
SUXING LIXUE

作 者: 程良彦 主编
策划编辑: 邵宇彤
责任编辑: 邵宇彤
责任校对: 韩蓉晖
装帧设计: 优盛文化
出版发行: 吉林大学出版社
社 址: 长春市人民大街 4059 号
邮政编码: 130021
发行电话: 0431-89580028/29/21
网 址: <http://www.jlup.com.cn>
电子邮箱: jdcbs@jlu.edu.cn
印 刷: 三河市华晨印务有限公司
开 本: 185mm × 260mm 1/16
印 张: 9.25
字 数: 196 千字
版 次: 2019 年 5 月第 1 版
印 次: 2019 年 5 月第 1 次
书 号: ISBN 978-7-5692-4166-2
定 价: 29.00 元

版权所有 翻印必究

前 言

塑性力学不仅是断裂力学、损伤力学等研究领域的理论基础,在结构分析、金属压力加工和其他一些工程问题中也有着重要应用。近年来,我国已经出版一批相关的教科书,它们都有自身的特点和侧重面。不过,大多数教材内容陈旧,对学生的数学和力学功底要求较高,同时各高等院校又在压缩力学教学的学时,导致学生学习起来比较吃力。鉴于目前高校的教学现状和学生的学习现状,推出一本逻辑清晰、思维跳跃较小、容易自学且配有较好课件的教材就很有必要。

本书由绪论及6章内容组成。绪论部分对初等力学作了扼要的总结,提出塑性力学的研究对象和任务,介绍基本假定以及弹性和塑性的一些基本概念;第1章从杆的拉伸实验开始,分析了杆类结构的弹塑性过程及影响因素;第2章研究梁类构件的弹塑性过程及其塑性极限分析过程;第3章分析应力和应变,并对其进行分解,引入不同的屈服条件及表达式;第4章给出了材料塑性本构的描述和表达式;第5章讨论了简单问题的弹塑性分析,包括厚壁圆筒、柱体扭转、旋转圆盘;第6章对工程上简化出的理想刚塑性平面应变问题进行分析,给出了滑移线概念、性质及解决问题的方法。

希望本书能够为学习力学的学生提供帮助,加深他们对基础力学、初等微积分和矩阵分析的认识,也能够为关心塑性设计和塑性加工的研究人员提供有益的帮助和启发。本书由河南理工大学程良彦、王钦亭教授和暨南大学聂振华副教授共同编写。程良彦编写第1、3、6章,王钦亭教授撰写第2章,聂振华撰写第4、5章,全书由程良彦统稿。

本书的出版得到了暨南大学重大工程灾害与控制教育部重点实验室(20160626002)、河南省高等学校优秀基层教学组织(力学系)和河南理工大学博士基金(B2011-004)的资助。同时,感谢廖明成教授和潘夏辉老师对本书提出的改进意见。

由于编者水平有限,书中难免有不当之处,敬请读者批评指正。

编 者

2018年7月

目 录

绪 论 / 001

第 1 章 简单应力状态下的弹塑性力学问题 / 005

- 1.1 金属材料的实验结果 / 006
- 1.2 应力应变关系的简化模型 / 009
- 1.3 轴向拉伸时的塑性失稳 / 011
- 1.4 简单桁架的弹塑性分析 / 014
- 1.5 强化效应的影响 / 019
- 1.6 弹性极限载荷曲线 / 020
- 1.7 塑性极限载荷曲线 / 023
- 1.8 加载路径的影响 / 024
- 习题 / 027

第 2 章 梁的弹塑性弯曲和塑性极限分析 / 031

- 2.1 纯弯曲时矩形截面梁的弹塑性分析 / 032
- 2.2 横向载荷作用下的弹塑性分析 / 037
- 2.3 超静定梁的塑性极限分析 / 041
- 2.4 刚架的塑性极限载荷分析 / 044
- 2.5 弯矩和轴力共同作用时的弹塑性分析 / 049
- 习题 / 052

第 3 章 应力应变张量及屈服条件 / 057

- 3.1 应力和应变张量 / 058
- 3.2 偏应力和偏应变张量 / 062
- 3.3 屈服条件 / 068
- 3.4 三种常用的屈服条件 / 071
- 3.5 屈服条件的实验验证 / 075
- 3.6 后继屈服条件 / 080
- 习题 / 083

第4章 本构关系 / 085

- 4.1 弹性本构关系 / 086
- 4.2 Drucker 公设和 И л ъ у ш и н 公设 / 088
- 4.3 加载、卸载准则 / 092
- 4.4 增量理论 / 093
- 4.5 全量理论 / 097
- 习 题 / 100

第5章 简单弹塑性力学问题 / 103

- 5.1 弹塑性力学边值问题的提法 / 104
- 5.2 薄壁圆筒的拉扭联合变形 / 106
- 5.3 厚壁圆柱筒的弹塑性分析 / 110
- 5.4 理想弹塑性柱体的自由扭转 / 114
- 5.5 旋转圆盘 / 120
- 习题 / 123

第6章 理想刚塑性材料的平面应变问题 / 125

- 6.1 平面应变问题的基本方程 / 126
- 6.2 滑移线场 / 129
- 6.3 应力边界条件 / 132
- 习 题 / 134

附录 A 指标记法及求和约定 / 136

附录 B 张量简介 / 138

主要参考书目 / 140

绪 论

1. 弹塑性力学的研究对象和内容

物体受外部荷载作用所产生的形状和大小的改变称为变形或形变，通常考虑的外部荷载包括机械外力、温度、电磁力等各种物理因素。如果将引起变形的荷载移去后，物体能完全恢复到原来的形状和大小，这种变形称为弹性变形。当作用在物体上的荷载超过一定的范围时，若再将荷载移去，物体就不能完全恢复到原来的形状和大小而残留下一部分永久的变形，这种变形称为塑性变形。物体整个变形过程可以看作由两个不同的阶段组成，即弹性变形阶段和塑性变形阶段。

将仅产生弹性变形的物体称为弹性体，弹性体内的应力与变形始终存在一一对应的单值关系，且在许多情况下可以近似地按线性关系处理。绝大多数由工程材料制成的工程结构在一定荷载范围内都可以看作弹性体。弹性体在几何上既可以是杆状构件，也可以是板壳结构或块体结构。弹性力学的主要任务是研究弹性体受外部荷载时其内部所产生的应力和变形规律。在弹性力学问题中，一般认为加载是缓慢的，不会产生动能和热效应，外部荷载在其作用位置的变形上所做的功将转换为变形能储存在弹性体内，当外部荷载移去时，变形能完全释放。因此，弹性变形是一个没有能量耗散的可逆过程。

物体进入塑性变形阶段后，物体内的应力与变形并不存在一一对应的单值关系，与加载历史有关，且两者是非线性的关系。从物理上看，塑性变形属于不可逆过程，必然伴随着能量的耗散，因此塑性变形过程比弹性变形过程复杂得多。研究物体处于塑性变形阶段的应力与变形规律的学科称为塑性力学。

采用弹塑性力学研究、分析结构内部的变形和应力分布规律，其主要目的是为结构设计提供理论依据。在结构设计中，将结构内部变形限制在弹性变形的范围内，则称为弹性设计。对于某些实际工程问题，按弹性设计确保结构的安全是必要的，但在有些情况下，弹性设计将造成材料在一定程度上的浪费。因此，允许结构局部区域出现一定的塑性变形是合理的，这样可以更好地发挥材料的作用，从而提高整个结构的承载力。那么，结构在一定外部荷载作用下，其内部的塑性区域和相应的塑性变形有多大？对结构的安全性影响如何？要回答这些问题就必须应用塑性力学的理论与方法。

塑性力学是相对于弹性力学而言的，在弹性力学中，物质微元的应力和应变之间具有单一的对对应关系。然而，在一定外界环境和加载条件下，材料的变形往往具有非弹性性质，即应力和应变之间不具有单一的对对应关系。非弹性变形主要有塑性和黏性两种。塑性变形是指物体在去除外力后所残留下的永久变形，在给定外力下，物体的变形不随时间而改变。

塑性力学也是连续介质力学的一个分支，它的基本方程是平衡方程、几何方程、本构方程。塑性力学与弹性力学的区别就在第三类方程。

塑性力学的内容主要分为两部分：第一部分是描述材料在塑性阶段应力与应变之间本构关系方面的理论，即塑性力学的基本理论；第二部分是根据这些基本理论，应用合理的解题方法，解决实际工程中的塑性力学问题。由于塑性本构关系具有非线性和非单值对应等特点，因而塑性力学问题比弹性力学问题复杂得多，解析求解会遇到更大的数学困难。

只有少数简单问题可以用理论解析的方法求解,绝大多数工程问题需要应用数值方法(如非线性有限元方法)进行求解。

2. 发展简史

塑性力学作为固体力学的一个重要分支,其发展历史可以追溯到18世纪70年代,但真正得到充分发展并臻成熟是在20世纪40年代和50年代初。特别是理想塑性理论,已达到成熟并开始在工程实践中应用的阶段。

塑性力学的研究是从1773年C. A. Coulomb提出的塑性固体(主要是土壤)的屈服条件开始的。对金属塑性力学的研究则始于1864年法国工程师H. Tresca的冲压和挤压的初步实验报告,并提出最大剪应力屈服准则,认为金属在最大剪应力到达某一临界值时就发生塑性屈服。1870年和1872年,S. T. Venant曾用这一屈服准则分别计算圆柱体受扭转或者弯曲而处于塑性状态时的应力分布和受内压圆管处于完全塑性状态时的应力分布。S. T. Venant还建立了平面应变问题中联系应力与应变的方程组,并认识到应力与应变间没有一一对应的关系,因而提出了最大剪应变率的方向随时都与最大剪应力方向一致的假设。1871年,Levy基于S. T. Venant关于理想塑性材料的概念,提出了三维问题中应力与塑性应变率之间的关系。

此后数十年塑性力学的发展十分缓慢,直到1900年Guest通过薄管的联合拉伸和内压实验,初步证实了Tresca提出的最大剪应力屈服条件。1904年和1913年,Huber和Mises各自独立地从数学上考虑,提出了同样的屈服准则,这一准则后来被Hencky解释为弹性切应变能达到某一临界值时开始屈服。

在20世纪的前20年内,科学家进行了许多类似实验,提出多种屈服条件,其中最有意义的是Mises于1913年从数学简化的要求出发提出的屈服条件(后称为米赛斯条件)。米赛斯还独立地提出和Levy一致的塑性应力—应变关系(后称为Levy-Mises本构关系)。泰勒于1913年、Lode于1926年为探索应力—应变关系所做的实验都证明,Levy-Mises本构关系是真实情况的一级近似。为更好地拟合实验结果,雷斯于1930年在普朗特的启示下,提出包括弹性应变部分的三维塑性应力—应变关系。至此,塑性增量理论初步建立。但当时增量理论用在解决具体问题方面还有不少困难。早在1924年,亨奇就提出了塑性全量理论,由于便于应用,曾被纳戴、伊留辛等人用来解决大量实际问题。

虽然塑性全量理论在理论上不适用于复杂的应力变化历程,但是计算结果却与板的失稳实验结果很接近。为此,在1950年前后展开了塑性增量理论和塑性全量理论的辩论,促使从更根本的理论基础上对两种理论进行探讨。

在强化规律的研究方面,除等向强化模型外,普拉格又提出随动强化等模型。电子计算机的发展,为塑性力学的研究和应用打开了广阔的前景,特别是促进了有限单元法的应用。1960年,Argyris提出初始荷载法可作为有限单元法解决弹塑性问题的基础。自此,理想塑性的塑性力学已经达到定型的阶段,而具有加工硬化的塑性力学至今仍是发展中的研究课题。20世纪60年代以后,随着有限元法的发展,提供恰当的本构关系已成为解决问题

的关键。所以, 20 世纪 70 年代关于塑性本构关系的研究十分活跃, 主要从宏观与微观的结合、不可逆过程热力学以及理性力学等方面进行研究。

在实验分析方面, 开始运用光塑性法、云纹法、散斑干涉法等测量大变形的手段。另外, 由于出现岩石类材料的塑性力学问题, 所以塑性体积应变以及材料的各向异性、非均匀性、弹塑性耦合、应变弱化的非稳定材料等问题正在研究之中。

3. 基本假定

本书从宏观角度来研究塑性变形的规律。在宏观观察和实验的基础上, 塑性力学中采用以下几个主要的基本假定。

(1) 材料是均匀的、连续的, 所以塑性力学属于连续介质力学的范畴。

(2) 各向均匀的应力状态 (也称静水压力) 不影响塑性变形而只产生弹性的体积变化。这是由布里奇曼的实验结果得出的假定。

(3) 在温度不高、时间不长的情况下, 可以忽略蠕变和松弛的影响; 在应变率不大的情况下, 可以忽略应变率对塑性变形的影响。因此, 在常温和静力情况下, 可以忽略时间因素对塑性变形的影响。有了这个假定, 在分析塑性变形的过程中, 时间量对分析没有影响, 只要任意取一个单调变化的量作为时间参数, 以代表载荷或变形的先后次序就行了。

这些假定不仅简化了分析问题的数学难度, 还被广泛的实验和工程实践证明是可行的。

主要符号表

σ_{ij}	应力张量	s_{ij}	偏应力张量
$d\sigma_{ij}$	应力张量增量	e_{ij}	偏应变张量
ε_{ij}	应变张量	I_i	应变张量的不变量
$d\varepsilon_{ij}$	应变张量增量	I'_i	偏应变张量的不变量
σ_i	主应力	J_i	应力张量的不变量
ε_i	主应变	J'_i	偏应力张量的不变量
u_i	位移		
σ_m	平均应力		
ε_m	平均应变		
ε_{ij}^e	弹性应变		
ε_{ij}^p	塑性应变		
ε_v	体积应变		
σ_i	等效应力		
ε_i	等效应变		

第 1 章 简单应力状态下的弹塑性力学问题

本章在材料力学分析拉压杆弹性阶段的基础上,进一步讨论拉压杆塑性过程和承载能力。

1.1 金属材料的实验结果

1.1.1 简单拉伸实验

研究塑性变形规律的最简单实验是金属多晶材料的单向拉伸或压缩实验。实验在室温下进行，试件如图 1-1 所示，在载荷 P 的作用下，试件的长度和横截面面积由初始的 l_0 和 A_0 分别变为 l 和 A 。试件中间部分的应力和变形要求是均匀的，故可以定义名义应力

$\sigma = \frac{P}{A_0}$ 和名义应变 $\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$ 。材料的拉伸实验曲线有图 1-2 所示的两种形态，图 1-2 (a)

所示为一般金属的拉伸曲线，图 1-2 (b) 所示为低碳钢的拉伸曲线。

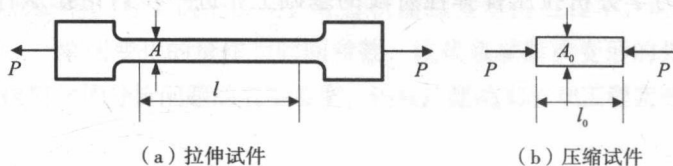


图 1-1 拉伸试件和压缩试件

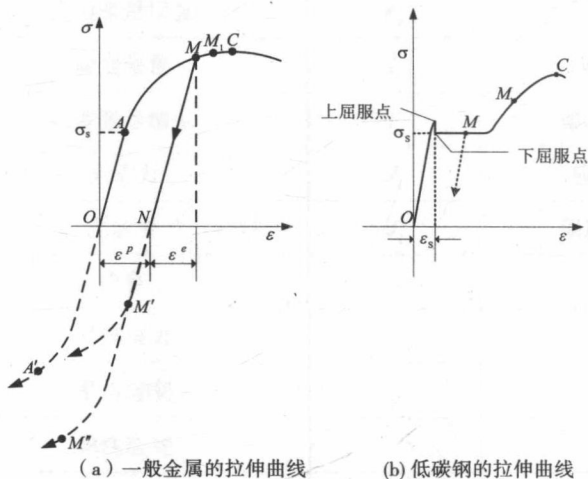


图 1-2 实验曲线

初始阶段,随着载荷的缓慢增加,应力和应变之间是成比例的。在达到比例极限后,曲线开始向下弯曲,直至弹性极限。在弹性极限之前,如果卸掉载荷而使应力下降到零,则应变也沿原有曲线下降到零。在应力超过弹性极限后,虽然应力降到了零,但应变不为零,残留的这部分应变称为塑性应变。可见,弹性极限是产生和不产生塑性应变的分界应力。对于低碳钢而言,弹性极限以后有一个屈服阶段,即当应力保持不变时,应变仍然可以有很大的增长。如果用 ε_s 来表示刚达到弹性极限时的应变,则屈服阶段末的应变可以达到 ε_s 的10多倍。

如果产生不太大的塑性变形之后逐渐减小载荷,则如图1-2(a)中的 MN 线,应力和应变的变化规律基本上是一条直线,其斜率与初始加载时的斜率相同。如果从卸载后的 N 点重新再加载,则开始时应力和应变仍按原始比例进行线性变化,而在 M 点附近才急剧弯曲并开始产生新的塑性变形,以后的曲线将沿 MM_1C 。可见,经历这样一个超过初始屈服应力的加载后卸载,相当于把初始屈服应力 σ_s 提高到 M 点所对应的后继屈服应力 σ_M (σ_M 不是一个确定的值,它和塑性应变的大小有关),材料经过塑性变形后得到了强化,这种现象称为应变强化。

如果材料从 M 点卸载并进行反向加载,对于单晶体材料来说,其压缩时的屈服应力也有相似的提高(图1-2中的 M'),但对于多晶体材料来说,其压缩时的屈服应力(图1-2中的 M' 点)一般要低于一开始就反向加载的屈服应力(图1-2中的 A' 点),这种由于拉伸时强化影响到压缩时弱化的现象称为包辛格效应(Bauschinger Effect)。

由以上实验现象可知塑性变形具有如下特点。

(1) 在材料的弹塑性变形过程中,应力与应变之间不再是一一对应的单值关系。由于加载路径的不同,同一个应力 σ 可对应不同的应变,或同一个应变可以对应不同的应力。应力应变之间的关系依赖加载路径。通常通过引进一组内变量 ξ 来刻画加载历史,这组内变量刻画了材料在经过塑性变形过程后内部微观结构的变化。例如,可以取内变量 ξ 为塑性应变 ε^p ,而将简单拉压时的应力应变关系写为

$$e = \sigma/E + e^p \quad (1-1)$$

上式表明,当 e^p 一定时,应力应变之间有单一的对对应关系。

(2) σ 和 e 之间的线性关系式(1-1)是有适用范围的。对于固定的 e^p , s 或 e 并不能随意取值。例如,对于 M 点,当加载时应力应变曲线将沿 MM_1C 方向延伸,仅当卸载时应力应变曲线才以式(1-1)的规律沿 MN 方向下降。

另外,还要注意影响材料性质的其他因素。

(1) 温度。当温度上升时,材料屈服应力降低而塑性变形能力有所提高。在高温条件下,需要考虑蠕变、应力松弛等具有黏性效应的现象。

(2) 应变速率。如果实验时加载速度提高几个数量级,那么屈服应力也会相应提高,但材料的塑性变形能力会有所下降。对于受高速冲击或爆炸载荷作用的结构,需要考虑应变率效应对材料性质的影响。

1.1.2 静水压力实验

布里奇曼等人通过大量的静水压力实验发现：

(1) 静水压力与材料的体积变化之间近似服从线弹性规律。比如，卸除压力，体积变化可以恢复，因而认为静水压力下体积变化是弹性的，或者说塑性变形不引起体积改变。实验还表明，这种弹性的体积变化一般很小，如弹簧钢在 $10\,000\text{atm}$ ($1\text{atm}=101325\text{pa}$) 下体积仅缩小 2.2% 。因此，对于金属材料，当发生较大塑性变形时，可以忽略弹性的体积变形，即认为塑性变形阶段材料是不可压缩的。

(2) 材料的塑性变形与静水压力无关。对比钢试件在有静水压力的拉伸实验和无静水压力的拉伸实验发现，静水压力对初始屈服应力的影响很小，可以忽略不计。因而，对金属材料，可以认为塑性变形不受静水压力的影响。但对铸铁、岩石、土壤等疏松材料，静水压力对屈服应力和塑性变形有较大影响，不能忽略。

1.2 应力应变关系的简化模型

将具体材料的简单拉伸（压缩）实验曲线直接用于实际计算往往很不方便。为此，可根据不同问题，对不同材料在不同条件下进行不同的简化，从而得到既能反映该材料的力学性质又便于计算的简化模型。最常用的模型有以下几种。

1.2.1 理想塑性模型

在单向应力状态下，理想塑性模型的特征如图 1-3 所示。理想塑性模型又分为理想弹塑性模型和理想刚塑性模型。当所研究的问题具有明显的弹性变形时，常采用理想弹塑性模型。在总变形较大而弹性变形部分远小于塑性变形部分时，为简化计算，常常忽略弹性变形，而采用理想刚塑性模型。另外，在计算结构塑性极限载荷时，也常采用理想刚塑性模型。

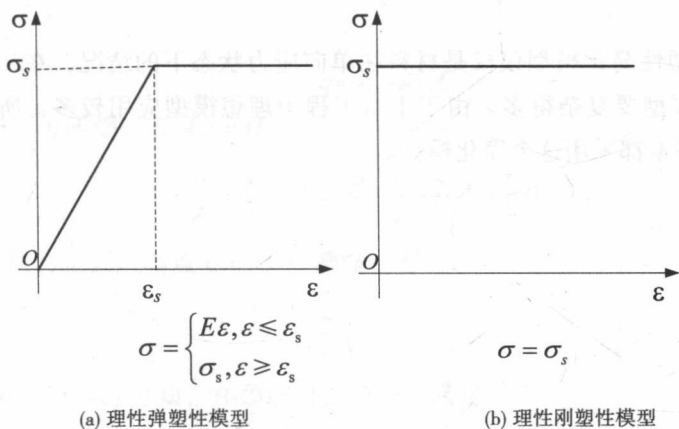


图 1-3 理想塑性模型

1.2.2 强化模型

在单向应力状态下，强化模型的特征如图 1-4 所示。强化模型又分为线性强化弹塑性模型、线性强化刚塑性模型和幂次强化模型。

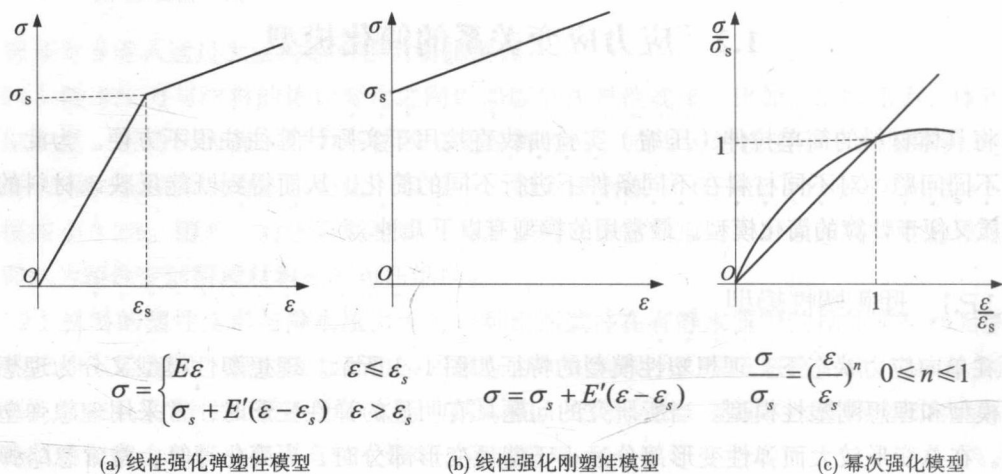


图 1-4 强化模型

以上介绍的塑性简化模型仅仅是材料在单向应力状态下的情况，在二维和三维复杂应力状态下，塑性模型要复杂得多。由于土木工程中理想模型应用较多，所以介绍与塑性理论相关的内容时基本都采用这个简化模型。

1.3 轴向拉伸时的塑性失稳

由图 1-2 可知, 在应力达到最高点 C 以前, 要增加应变就必须增加应力, 此时称试件是稳定的。而在 C 点以后, 增加应变时应力反而下降, 此时称试件是不稳定的, 即试件拉伸失稳。其实, 在拉伸时, 试件的横截面面积一般会减小。尤其当出现颈缩后, 试件局部的截面积会有明显的减小, 再用名义应力 (P/A_0) 和名义应变 (l/l_0-1) 来描述此时的试件拉伸特性是不合适的。

为此, 可定义真应力 (自然应力)

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1-2)$$

对数应变 (真应变、自然应变)

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl'}{l'} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln(1+\varepsilon) \quad (1-3)$$

和截面积收缩比

$$q = (A_0 - A)/A_0 \quad (1-4)$$

如假定材料不可压缩, 有 $A_0 l_0 = Al$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0} \cdot \frac{A_0}{A} = \frac{P}{A_0} \cdot \frac{l}{l_0} = \sigma e^\varepsilon = \sigma(1+\varepsilon) \quad (1-5)$$

同时, 认为名义应力达到最高点 C 时出现颈缩, 有

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0 \quad (1-6)$$

由式 (1-5) 和式 (1-6) 可知, 在颈缩时真应力应满足

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\varepsilon}\right)e^\varepsilon + \sigma \cdot e^\varepsilon = \sigma e^\varepsilon = \sigma \quad (1-7)$$

图 1-5(a) 给出了拉伸时的 $\sigma - \varepsilon$ 曲线。拉伸失稳分界点 C' 的斜率正好和该点的纵坐标值相等。

同时, 由式 (1-5) 和式 (1-6) 可知, 颈缩时真应力还满足

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}(1+\varepsilon) + \sigma = \sigma = \frac{\sigma}{1+\varepsilon}$$

故 $\sigma - \varepsilon$ 曲线在拉伸失稳点 C'' 的斜率为其纵坐标数值除以 $(1+\varepsilon)$, 如图 1-5(b) 所示。