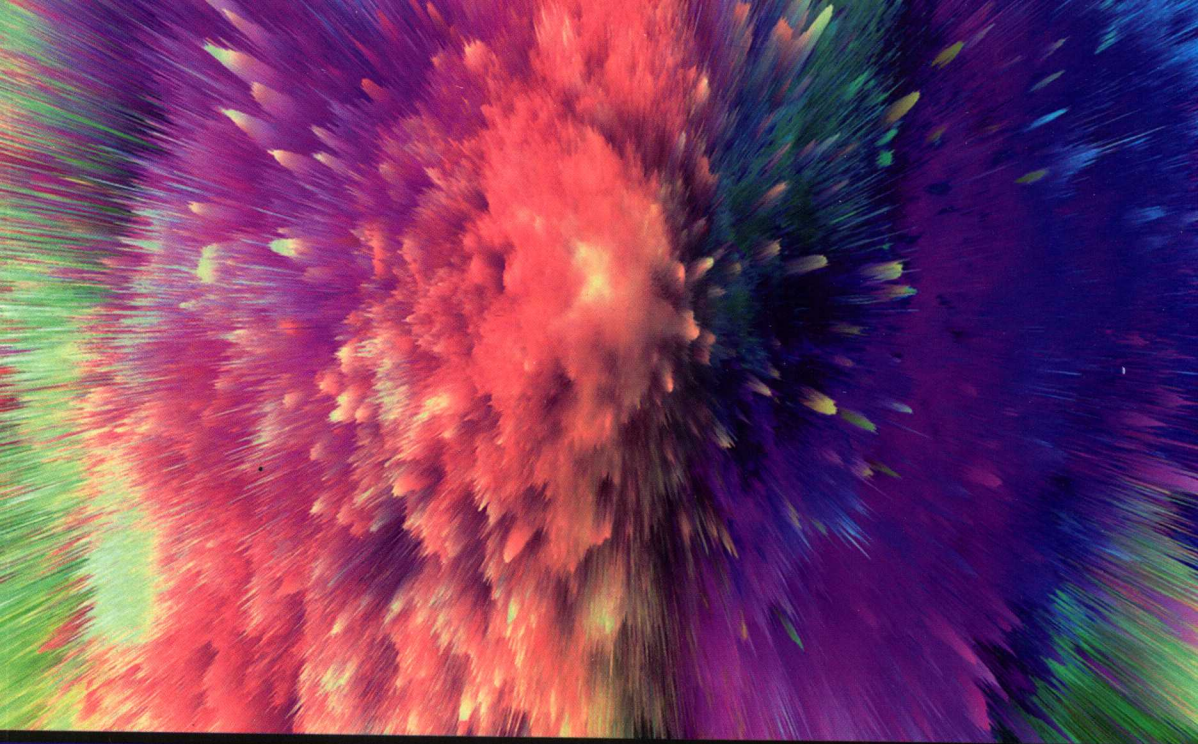




植物纤维增强复合材料 非线性力学行为研究

李永平 著

非线性



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

植物纤维增强复合材料 非线性力学行为研究

李永平 著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书利用试验研究、机理分析、数学建模、数值模拟等手段开展对植物纤维增强复合材料非线性力学行为的研究,主要内容如下:

(1) 从加捻纵向拉伸非线性、无捻偏轴拉伸非线性,到加捻偏轴拉伸非线性,系统地介绍了植物纤维增强复合材料的非线性力学问题。

(2) 针对不同研究对象和载荷条件,分别建立基于分段函数的纵向拉伸数学模型、单参数偏轴拉伸模型、多层次角度融合偏轴拉伸模型。

(3) 结合有限元仿真软件对植物纤维增强复合材料非线性力学行为进行数值模拟,并举例分析。

本书可作为普通高等学校力学、材料工程各相关专业研究生的教材或教学辅助用书,还可提供给各大研究所、企事业单位作为研究参考用书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

植物纤维增强复合材料非线性力学行为研究/李永平著. —北京:电子工业出版社, 2019.6
ISBN 978-7-121-36692-5

I. ①植… II. ①李… III. ①纤维增强复合材料—非线性力学—研究 IV. ①TB334

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 099626 号

策划编辑: 刘小琳

责任编辑: 刘小琳 文字编辑: 邓茗幻

印 刷: 北京虎彩文化传播有限公司

装 订: 北京虎彩文化传播有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编: 100036

开 本: 720×1000 1/16 印张: 7.25 字数: 121.8 千字

版 次: 2019 年 6 月第 1 版

印 次: 2019 年 6 月第 1 次印刷

定 价: 59.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式: liuxl@phei.com.cn, (010) 88254538。



前言

植物纤维由于具有天然环保、来源广泛、较高的比强度和比刚度等特点，其增强复合材料在工业生产和生活中被广泛使用，如汽车工业、建筑建材等，成为复合材料研究领域的热点之一。

在研究植物纤维增强复合材料的试验过程中，发现该复合材料的力学行为在拉伸时呈现明显的非线性。造成这种非线性的主要原因是纤维加捻、偏轴拉伸及基体的粘弹性行为。在对植物纤维增强复合材料的应力—应变关系进行分析，尤其在研究纵向拉伸时发现，传统的线弹性本构模型已经无法胜任对非线性力学行为的分析了，而且如果仅在线弹性范围内使用该材料，则不能充分发挥出该材料的优异性能，用线性模型替代非线性模型以得到其近似解的处理方法不能很好地反映实际系统的力学行为。这就需要充分了解该复合材料的非线性力学行为，特别是需要从更加细观的角度去分析其内部的机理与特性，如植物纤维独特的加捻特征，同时需要为复合材料建立合适的细观非线性本构模型。

建立植物纤维增强复合材料的非线性本构模型，一个重要作用是辅助该复合材料的结构优化设计。例如，在结构设计阶段将本构模型与商业有限元软件结合，可以更加准确地计算结构在不同受载条件下的应力状态并预测其承载能力，有助于结构的优化设计，同时省去或减少大量的试件制备和测试过程，从而降低该复合材料的研发成本。

文献检索发现，国内外学者的研究都未结合植物纤维的加捻等特征来针对植物纤维增强复合材料应力—应变关系或者本构模型展开研究（多在研究强度），这为

本书的研究提供了突破口,即本书旨在研究植物纤维加捻、初始偏轴拉伸对植物纤维复合材料非线性力学行为的影响,研究其在小应变情况下(通常小于 2%)的非线性应力—应变关系或本构模型,这是本书的出发点和创新基础。

本书利用试验研究、机理分析、数学建模、数值模拟等手段开展对植物纤维增强复合材料非线性力学行为的研究,主要内容如下:

(1) 从加捻纵向拉伸非线性、无捻偏轴拉伸非线性,到加捻偏轴拉伸非线性,系统地介绍了植物纤维增强复合材料的非线性力学问题。

(2) 针对不同研究对象和载荷条件,分别建立基于分段函数的纵向拉伸数学模型、单参数偏轴拉伸模型、多层次角度融合偏轴拉伸模型。

(3) 结合有限元仿真软件对植物纤维增强复合材料非线性力学行为进行数值模拟,并举例分析。

本书通过上述研究,得到以下主要结论:

(1) 本书通过系统化的研究,认为植物纤维增强热固性树脂复合材料的非线性力学行为主要是由植物纤维的加捻、偏轴拉伸引起的,内在的物理机理主要表现为纤维与基体脱粘、基体开裂、表面捻转角变化、纤维断裂等。

(2) 在对加捻植物纤维增强热固性树脂复合材料的纵向拉伸力学行为研究中,采用的分段函数模型是一种唯象的理论模型,其重要意义在于用表面捻转角这个变量来表征加捻对非线性力学行为的影响,给出应力、应变与表面捻转角三者的关系,通过与试验数据的对比,表明该模型的有效性较好。

(3) 本书建立的基于单参数的植物纤维增强热固性树脂复合材料无捻偏轴拉伸力学行为模型,是在剥离表面捻转角影响的情况下进行的,通过与加捻的情况进行对比,显示加捻对复合材料非线性影响明显,揭示了加捻是植物纤维增强复合材料纵向拉伸时非线性力学行为的主要成因,模型结果与试验结果总体吻合。

较好。

(4) 本书针对既加捻又偏轴的情况,首次提出融合微纤丝角、表面捻转角、偏轴拉伸角三种角度的数学模型。然而由于变量较多,应用时要根据实际情况进行建模,以约简和方便计算。本书算例中给出的基于反正弦双曲标量函数的关系模型,利用 MATLAB 进行仿真,效果良好。

(5) 基于 ABAQUS 的有限元数值模拟应用在植物纤维增强复合材料的偏轴拉伸中,由于偏轴拉伸载荷模拟相对简单,仿真能高效地得到偏轴拉伸的模拟结果。另外,调用 UMAT 材料子程序运行的结果比直接仿真的效果好,其应力—应变关系曲线更加平滑。

本书的研究为今后进一步开展植物纤维增强复合材料在其他复杂载荷条件下的力学行为研究奠定了理论基础,为拓宽复合材料非线性力学行为理论进行了有益的尝试。

本书的撰写得到了同济大学航空航天与力学学院院长、博导、国家杰出青年基金项目获得者李岩教授的支持,她精心修改并给出了中肯的意见和建议,在此表示感谢。

由于作者水平有限,书中错误和不妥之处在所难免,敬请读者提出宝贵意见,以便再版修订,从而更好地为广大读者服务。作者联系方式: 464054407@qq.com。

李永平

2019 年 2 月



目录

第 1 章 绪论	1
1.1 概述	1
1.2 植物纤维及其特征	3
1.2.1 植物纤维	3
1.2.2 植物纤维的重要特征	4
1.3 传统纤维增强复合材料非线性力学行为研究	6
1.3.1 产生原因	6
1.3.2 传统纤维增强复合材料非线性本构关系研究现状	7
1.4 植物纤维增强复合材料非线性力学行为研究	16
1.4.1 重要性	16
1.4.2 研究现状	18
1.5 复合材料非线性力学行为的数值模拟	22
1.5.1 ABAQUS 求解非线性问题	23
1.5.2 有限元法在复合材料研究中的应用现状	25
1.6 研究思路、研究内容与创新点	26
1.6.1 研究思路	26
1.6.2 研究内容	27
1.6.3 创新点	28
第 2 章 加捻植物纤维增强复合材料纵向拉伸非线性研究	30
2.1 引言	30

2.2	试验部分	31
2.2.1	原材料	31
2.2.2	试验仪器	31
2.2.3	试样制备	32
2.2.4	纵向拉伸试验	33
2.3	结果与讨论	33
2.3.1	加捻剑麻/环氧复合材料纵向拉伸非线性力学行为	33
2.3.2	基于分段函数的单向加捻植物纤维增强复合材料纵向 拉伸模型	35
2.4	本章小结	47
第3章	无捻植物纤维增强复合材料偏轴拉伸非线性研究	49
3.1	引言	49
3.2	试验部分	50
3.2.1	原材料	50
3.2.2	试验仪器	50
3.2.3	试样制备	50
3.2.4	偏轴拉伸试验	50
3.3	结果与讨论	52
3.3.1	无捻剑麻纤维增强环氧树脂复合材料偏轴拉伸非线性 力学行为	52
3.3.2	基于单参数的单向植物纤维增强复合材料偏轴拉伸 非线性分析	53
3.4	本章小结	60
第4章	加捻植物纤维增强复合材料偏轴拉伸非线性研究	62
4.1	引言	62
4.2	基于多层次角度的偏轴拉伸唯象模型	63

4.2.1 植物纤维增强复合材料偏轴拉伸时的多层次角度	63
4.2.2 多层次角度融合的偏轴拉伸应力—应变关系模型	66
4.3 试验部分	70
4.4 结果与讨论	75
4.5 本章小结	76
第 5 章 植物纤维增强复合材料非线性力学行为的数值模拟	78
5.1 引言	78
5.2 ABAQUS 有限元分析在复合材料中的应用	79
5.2.1 复合材料模拟技术	79
5.2.2 复合材料的单元技术	79
5.2.3 复合材料的一般模拟过程	80
5.3 植物纤维增强复合材料偏轴拉伸有限元模拟	82
5.3.1 应力—应变关系的增量形式	82
5.3.2 UMAT 子程序编程思路	84
5.3.3 有限元建模	87
5.3.4 结果与讨论	90
5.4 本章小结	92
第 6 章 结论与展望	94
6.1 结论	94
6.2 创新点	96
6.3 展望	96
参考文献	98

第 1 章

绪 论

● 1.1 概述

纤维增强树脂复合材料从二十世纪四五十年代诞生以来,以其高强、高模、低密度、耐腐蚀及结构可设计等优点在航空航天、土木工程、车辆运输、风力发电等领域内得到大规模的应用,用量逐年上升。其中,又以玻璃纤维增强复合材料和碳纤维增强复合材料的应用最为广泛。玻璃纤维增强复合材料和碳纤维复合材料在为人类生活带来方便的同时,又带来了回收利用困难及污染环境等新的问题,这使人类对植物纤维的开发利用逐渐变成热点。

与玻璃纤维、碳纤维相比较,植物纤维及其复合材料具有以下性能方面的优势^[1]: ①植物纤维有生态保护能力,如麻纤维生产周期短,对生长环境要求不高; ②植物纤维生长过程无须农药和化肥; ③植物纤维生长、加工的能量消耗少;

④植物纤维对二氧化碳的吸收能力强,具有减缓温室效应的作用;⑤植物纤维使用过程无有害的游离化学物质和玻璃纤维微粒;⑥植物纤维无须化学胶黏剂,可在一步法成型中与基体材料热粘合;⑦植物纤维替代化学纤维和塑料等人造材料,可节约有限的石油资源;⑧植物纤维焚烧时无毒物排放,填埋后可生物降解;⑨植物纤维可再生循环使用。

纤维增强复合材料由于其卓越的性能正日益广泛地应用于宇航、航空、石油、化工等现代工业的结构制造中。同时,由于结构的轻型化,几何非线性因素的影响不可忽略,用线性模型替代非线性模型以得到其近似解的处理方法不能很好地反映实际系统的力学行为。因此,复合材料结构的非线性静力学、动力学分析已成为固体力学研究领域中的重要研究内容。

若要正确和有效地使用复合材料(如纤维增强复合材料),就要对其进行更复杂的分析,以便能准确地预报这些材料对外载荷的弹性或非弹性响应。科研人员对层合复合材料的力学行为,尤其是薄板的力学行为进行了大量的研究工作。此前的研究也表明^[2],复合材料在偏轴拉伸和剪切等情况下,力学行为表现出明显的非线性,其应力—应变曲线不呈现线性。此时若仍按线性模型处理而忽略非线性因素的影响,可能会产生较大的误差,即此时非线性力学性能不能被忽略,相反,需要更好地表征和研究其力学行为,否则导致非线性的这些因素(如损伤等)将成为限制复合材料应用和进一步推广的瓶颈。在研究其非线性力学行为之前,需要清楚在应力作用下其内部的机理,复合材料的非线性多数情况下是由损伤引起的,而复合材料的损伤是一个复杂的逐渐损伤过程,纤维增强复合材料层合板的损伤过程,一般包含多种破坏模式,如基体开裂、纤维断裂、纤维抽拔、纤维与基体界面脱粘和分层等。这些损伤模式往往接连出现或在某个损伤区域内同时出现。从理论上揭示复合材料的渐近损伤过程,也就能构建其非线性的本构关系,这是复合材料领域研究的一个重点课题。

复合材料非线性力学行为的研究目前多见于传统碳纤维复合材料、玻璃纤维复合材料,而国内外对于植物纤维增强复合材料非线性力学行为的研究鲜见报道,针对植物纤维非连续、短、加捻等特点进行复合材料非线性力学行为研究的论文更是不多。本书对植物纤维增强复合材料非线性力学行为展开研究,必将对植物纤维复合材料力学理论体系的拓展做出贡献,具有重要的理论研究价值。本书的研究也将为植物纤维复合材料的设计和制造提供科学依据,为预测复合材料非线性力学行为提供一个准确合理的计算工具,为分析复杂结构件的非线性力学行为提供合理的构筑渠道,具有一定的实际应用价值。

● 1.2 植物纤维及其特征

1.2.1 植物纤维

植物纤维是广泛分布在种子植物中的一种厚壁组织。它的细胞细长、两端尖锐,具有较厚的次生壁,次生壁上常有单纹孔,成熟时一般没有活的原生质体。植物纤维在植物体中主要起机械支撑作用。构成植物纤维的基础物质是纤维素,纤维素是由 7000~10000 个葡萄糖分子呈束状平行排列的、经糖苷链连接起来的聚合物。

植物纤维由纤维素、半纤维素、木质素、果胶、蜡质和矿物质等组成。按照形态可以将植物纤维分为种子纤维、韧皮纤维、叶子纤维等不同种类,其中韧皮纤维和叶子纤维是最常用的。韧皮纤维包括大麻纤维、黄麻纤维、苧麻纤维、亚麻纤维等,叶子纤维包括剑麻纤维、蕉麻纤维等^[3]。植物纤维的性能受许多因素影响,一般与产地、年龄、结构、化学组成和螺旋角等有关。而植物纤维本身容易吸湿,具有强亲水性,与疏水性的树脂基体间界面性能较差,因此研究者通常会对植物纤维进行改性处理,如利用去蜡处理、碱化处理、漂白处理、氰乙基化

处理、硅烷处理、苯甲酰化处理、过氧化物处理、异氰酸处理、丙烯酸处理、乙酰化处理等方法改变其化学组成或者表面性质^[4-13]。

植物纤维的产量很大，并且在不断增加，是纺织工业的重要材料来源。其中，我国的麻类纤维资源丰富，苧麻的产量居世界第一，因此把麻类纤维作为增强材料应用于复合材料^[14]。麻类纤维大部分用于制造包装用织物和绳索，一部分品质优良的麻类纤维可供制作服装。

1.2.2 植物纤维的重要特征

与传统玻璃纤维、碳纤维相比较，植物纤维具有以下四个方面的重要特征。

1. 环保：可自然降解

植物纤维是自然界中取之不尽、用之不竭的可再生资源。目前大量垃圾是非降解废弃物，对生态环境造成严重威胁，并且危害人类健康。植物纤维环保材料天然成分可达 80% 以上，制成的物品用后弃于自然环境中可自然降解，是一种新型绿色的环保材料。1.1 节中对植物纤维的环保特征也有介绍。

2. 长度短，需要加捻

植物纤维受到自身生长特性的影响，纤维长度短小，而且植物纤维束中的纤维丝还不连续。对于合成纤维，根据工业需求，通过拉丝工艺可以得到连续的长纤维；而植物纤维长度一般为 10~1000mm。麻类纤维是植物纤维中最长的，如苧麻纤维长 50~120mm、亚麻纤维长 17~25mm、黄麻纤维长 2~4mm 等，且具有较高的强度和较低的断裂延伸率^[15]。

因此，各类复合材料用植物纤维作为增强材料时，通常需要把植物纤维加捻以纺成纱线，复合材料性能必然受到这一工艺的影响。事实上，本书在研究植物纤维增强复合材料的过程中，发现该复合材料的力学行为具有明显的非线性，尤其是在初始的拉伸阶段。结果表明这种明显的非线性正是由植物纤维的加捻造成

的,而这也正是本书研究的重要依据和出发点。

3. 独特的化学组成

植物纤维由三类主要成分组成——纤维素、半纤维素和木质素。这三类成分均为具有复杂空间结构的高分子化合物。

纤维素分子、半纤维素分子和木质素分子之间的结合主要依赖氢键,半纤维素分子和木质素分子之间除氢键外还存在化学键,半纤维素和木质素之间的化学键结合主要在半纤维素分子支链上的半乳糖基和阿拉伯糖基与木质素之间。

植物纤维素原料除上述三大类组分外,还含有少量的果胶、含氮化合物和无机物成分。植物纤维素原料不溶于水,也不溶于一般有机溶剂,在常温下,也不溶于稀酸和稀碱。

4. 多层次多尺度结构

纤维素、半纤维素和木质素相互结合形成复杂的超分子化合物,并进一步形成各种各样的植物细胞壁结构。纤维素分子规则排列、聚集成束,由此决定了细胞壁的构架,在纤维构架之间充满了半纤维素和木质素。

X 射线衍射研究发现,植物纤维素大分子的聚集体中包括结晶区和无定型区,结晶区部分分子排列得比较整齐且有规则,呈现清晰的 X 射线衍射图,密度大,晶胞结构为单斜晶胞模型;无定型区的分子排列不整齐且较疏松,因而密度较低。从结晶区到无定型区是逐步过渡的,无明显界线。

一个植物纤维组织大约含有 60~80 个纤维素分子,每个纤维素分子约具有 10000 个葡萄糖单元;微纤维由基原纤维构成,尺寸比较固定,大纤维由一个以上的微纤维构成,其大小随原料来源或加工条件不同而有差异。另外,植物纤维在长度和细度上有很大的离散率,这些因素导致植物纤维形成多层次多尺度的结构。

1.3 传统纤维增强复合材料非线性力学行为研究

1.3.1 产生原因

复合材料的非线性力学行为很早就引起了科研人员的广泛关注,他们研究了由高分子树脂基体的粘弹性行为^[16-20]、偏轴加载^[21-25]及纤维编织形式^[26-30]等引起的非线性力学行为,并结合物理机理建立本构关系,提出了不同的复合材料非线性力学行为预测模型^[31-42]。

对于传统纤维增强复合材料,可将纤维看作是线弹性的,而聚合物基体则表现出非线性(在高温下更明显)。在纤维断裂和基体开裂以前,由受力分析可知,复合材料在纤维横向和面内剪切的非线性力学行为主要是由于软化型聚合物基体的非线性引起的,而基体材料的非线性对纤维方向模量和泊松比的影响可以忽略。

传统纤维增强复合材料偏轴拉伸时有较明显的非线性,尤其是 45° 方向偏轴拉伸的非线性最明显。复合材料中的纤维在未与树脂基体复合前是柔软的,只能承受轴向应力。当载荷不沿复合材料的纤维方向时,由于复合材料是一个结构,应力按纤维和树脂基体的结构来分配,纤维和树脂基体都处于复杂应力状态,特别是树脂基体,此时树脂基体除承受拉伸应力外,还要承受剪切应力。

而对于纤维编织形式引起的非线性,由于材料增强体为三维空间网状连续纤维结构,其细观结构极为复杂,需要分析增强织物的取向、组织结构、线圈形态、几何与结构参数等因素,直接建立材料力学性能预报模型困难很大,许多科研人员通常基于周期性单胞来研究材料的基本力学行为。

总结上述研究结果^[43],传统纤维增强复合材料由偏轴拉伸和剪切引起的非线

性尤为明显，主要原因有：①基体的非线性（此时，正轴拉伸时也存在基体非线性，但常被忽略）；②纤维的转动；③基体逐步开裂。

在一般情况下，传统纤维增强复合材料的非线性力学行为按照基体的种类分为两种情况^[44-66]：①纤维增强热固性树脂基体复合材料，主要表现在偏轴拉压和剪切应力—应变的非线性，垂直于纤维的复合材料横向表现出较弱的非线性，而方向性拉压表现出较明显的非线性；②纤维增强热塑性基体复合材料，除了热固性基体复合材料的情况，还要考虑基体对非线性的影响。

1.3.2 传统纤维增强复合材料非线性本构关系研究现状

研究纤维增强复合材料非线性本构关系的方法可分为宏观力学法和细观力学法，大多数科研人员采用宏观力学法。宏观力学法把复合材料看作均匀的非线性各向异性材料，因此，必须在各材料主方向上建立不同的非线性本构关系^[2]。

对于复合材料非线性的研究，目前更多的是偏向于偏轴引起的非线性研究，对于由基体粘弹性引起的非线性主要集中在对热塑性基体复合材料的研究上。由于本书研究的复合材料采用的是热固性基体，不具备粘弹性性能，所以对于基体粘弹性引起的非线性本书不再赘述。

1. 第一类方法——增量法

Petit 和 Waddoups 在 20 世纪 60 年代提出基本数据组结点之间用分段线性插值函数表示单向层合板的非线性力学行为。在这种方法中，硼/环氧复合材料层合板在材料主方向上承受拉伸载荷、压缩载荷和剪切载荷。用这种概念与简单层合板理论相结合，来确定层合板承受增量施加的面内载荷时的响应。在每个增量中，假设材料性质保持不变和独立，而且应力或应变可以从前一次增量中得到。Petit 和 Waddoups 运用线性单层板和层合板本构关系，并且使用分段线性的应力—应变曲线表达增量地施加平均层合板应力 $(\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0)$ 。即对

层合板施加平均层合板应力的增量 ($\Delta\sigma_x^0$, $\Delta\sigma_y^0$, τ_{xy}^0), 并用初始层合板柔度矩阵 $[s]^T$, 假设层合板对于施加的应力增量表现为线性, 可计算层合板应变的第一次增量: $[\Delta\varepsilon^0]_{n+1} = [s_T]_n [\Delta\sigma^0]_{n+1}$ 。其中, n 表示第 n 次值。然后, 把层合板应变的增量 $\Delta\varepsilon^0$ 加到先前的应变上, 以确定当前总层合板应变: $[\varepsilon^0]_{n+1} = [\varepsilon^0]_n + [\Delta\varepsilon^0]_{n+1}$ 。随着载荷增量的进行, 可记录单独的单层板应变, 并通过参考单层板试验应力—应变曲线, 把 E_1 , E_2 , G_{12} 视为第 n 次单层板应变值的切线模量, 由此可计算出相应的单层板在当前应力水平下的切线模量或刚度。这种方法通过单层板应变的第 n 次值得到第 $(n+1)$ 次载荷增量的层合板柔度矩阵, 显然层合板的应力—应变曲线在很大程度上取决于产生累积误差的载荷增量的大小。

Hashin-Bagchi-Rosen 用碳纤维增强树脂复合材料单层板横向应变和剪切应变曲线的 Ramberg-Osgood 公式(一个描述材料在其屈服点附近应力—应变关系的理论模型)和变形理论描述层合板非线性力学行为。在分析单层板应变 ε 时, 将其分解为弹性应变 ε' 和非弹性应变 ε'' , 非弹性应变 ε'' 用 Ramberg-Osgood 公式的形式给出。层合板分析相当复杂, 对于 n 层层合板, 可写出有关 $3n$ 个应力的 $3n$ 个方程, 这些方程可用迭代法进行数值求解。

Sandhu 用分段三次插值函数来逼近基本性质数据集, 表示出了全部非线性应力—应变关系(拉伸、压缩和剪切)。在这种理论中, 基于获得的试验数据(对硼/环氧增强树脂复合材料进行偏轴拉伸试验), 假设单层板中的法向应变是由法向应力引起的, 而剪切应变是由剪切应力引起的, 这种理论与简单层合理论相结合, 可预测层合板的力学行为。增量地施加面内载荷, 对于每次施加的增量, 用迭代法求得应变。Sandhu 的这种方法可以解决 Petit-Waddoups 法过度依赖载荷增量大小的问题。首先, 这种方法用分段三次插值函数来表示基本的应力—应变数据, 然后, 使用预测值—校正值和迭代法。这种方法用在第 n 次载荷增量之后的弹性性质得到的单层板应变来确定在相同载荷增量下的平均层合板柔度, 并且得到一组新的层合板应变。重复这个程序直到连续两组层合板应变之