

普通高等教育“十三五”精品规划教材



基础力学实验指导

主 编 ■ 李晓丽

副主编 ■ 刘国华 贺 云



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

等教育“十三五”精品规划教材

基础力学实验指导

主 编 李晓丽

副主编 刘国华 贺 云



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

· 北京 ·

内 容 提 要

本书是参照教育部高等学校力学指导委员会非力学类专业基础课程教学指导分委员会提出的材料力学课程、工程力学课程教学基本要求编写的, 主要内容包括基础力学实验基本原理、方法和实验仪器设备, 包括材料的拉伸和压缩力学性能、材料的弹性常数、扭转以及利用多功能实验台开展的等强度梁实验、梁的弯曲正应力实验、平面应力状态下主应力的测试实验、连续梁实验等基础知识。

本书既可以作为农业水利工程、水利水电工程、土木工程、给水排水工程、环境工程、森林工程、机械工程、交通运输工程等专业本科生、专科生的材料力学、工程力学实验课的教材, 也可供研究生和有关工程技术人员参考。

图书在版编目 (C I P) 数据

基础力学实验指导 / 李晓丽主编. — 北京: 中国水利水电出版社, 2018. 9

普通高等教育“十三五”精品规划教材

ISBN 978-7-5170-6965-2

I. ①基… II. ①李… III. ①力学—实验—高等学校—教材 IV. ①03-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第226610号

书 名	普通高等教育“十三五”精品规划教材 基础力学实验指导 JICHU LIXUE SHIYAN ZHIDAO
作 者	主 编 李晓丽 副主编 刘国华 贺 云
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京智博尚书文化传媒有限公司
印 刷	三河市龙大印装有限公司
规 格	170mm×240mm 16开本 6印张 110千字
版 次	2018年9月第1版 2018年9月第1次印刷
印 数	0001-3000册
定 价	19.00元

凡购买我社图书, 如有缺页、倒页、脱页的, 本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

基础力学实验是材料力学、工程力学教学中的重要组成部分，是工科学生必须掌握的重要实践课程。基础力学实验对提高学生发现问题、分析问题和解决问题能力的培养具有重要作用，能够有效提高学生素质，培养学生创新能力，增强学生实践能力。本书是参照教育部高等学校力学指导委员会非力学类专业基础课程教学指导分委员会提出的材料力学课程、工程力学课程教学的基本要求编写的，适合作为农业水利工程、水利水电工程、土木工程、给水排水工程、环境工程、森林工程、机械工程、交通运输工程等专业本科生、专科生的材料力学、工程力学实验课的教材，也可供研究生和有关工程技术人员参考。

本书由李晓丽教授任主编，刘国华、贺云任副主编，其中第1、4章及实验报告一与四由李晓丽编写，第2、3章及实验报告二与三由刘国华编写，第5~8章及实验报告五至八由贺云编写。全书由申向东教授主审。

本书在编写过程中参考了兄弟院校的材料力学实验教材及实验设备厂家提供的部分仪器设备资料，在此表示诚挚的谢意。由于编者水平有限，书中难免有不足之处，恳请广大读者提出宝贵意见与建议。

编者

2018年8月

目 录

第 1 章 实验基础知识	1
1.1 实验内容及研究方法	1
1.1.1 测定材料机械性能的实验	2
1.1.2 验证理论的实验	2
1.1.3 实验应力分析	2
1.2 实验室管理	3
1.3 实验报告的书写	3
1.4 实验数据分析方法	3
1.4.1 测量与误差	4
1.4.2 有效数字	6
1.4.3 数据处理的基本方法	7
1.5 实验结果的表示方法	10
第 2 章 拉伸 (压缩) 实验	12
2.1 拉伸实验	12
2.1.1 实验目的	12
2.1.2 实验设备	12
2.1.3 实验试件	19
2.1.4 低碳钢拉伸力学性能	20
2.1.5 实验步骤	23
2.1.6 实验结果处理	24
2.1.7 铸铁拉伸实验	25
2.2 压缩实验	26
2.2.1 实验目的	26
2.2.2 实验设备	26
2.2.3 实验试件	26
2.2.4 压缩时力学性能	26
第 3 章 拉伸时材料弹性常数的测定	29
3.1 实验目的	29

3.2	实验设备	29
3.3	电测法基本原理	29
3.3.1	电阻应变片	29
3.3.2	电阻应变仪的测量原理	31
3.4	YD-88 便携式应变仪	34
3.5	实验试件	35
3.6	实验原理	35
3.7	实验步骤	36
3.8	实验结果处理	38
第4章	扭转实验	39
4.1	实验目的	39
4.2	实验设备	39
4.2.1	NB-50B 型扭转试验机	39
4.2.2	NJS-01 型数显式扭转试验机	41
4.3	实验原理	44
4.4	实验步骤	46
第5章	等强度梁实验	48
5.1	实验目的	48
5.2	实验仪器	48
5.3	实验原理	49
5.3.1	电阻应变测量原理	49
5.3.2	电阻应变片	49
5.3.3	测量电路原理	49
5.4	实验步骤	51
第6章	纯弯曲梁实验	52
6.1	实验目的	52
6.2	实验设备	52
6.3	实验原理	53
6.4	实验步骤	55
第7章	弯扭组合梁实验	56
7.1	实验目的	56
7.2	实验设备	56

7.3 实验原理	57
7.3.1 主应力理论值计算	57
7.3.2 主应力的测量	58
7.3.3 截面内力的分离测量	61
7.4 实验步骤	63
第8章 连续梁实验	65
8.1 实验目的	65
8.2 实验设备	65
8.3 实验步骤	66
实验报告一 拉伸实验	67
实验报告二 压缩实验	70
实验报告三 拉伸时材料弹性常数 E、μ 的测定实验	72
实验报告四 扭转实验	75
实验报告五 等强度梁实验	78
实验报告六 梁的弯曲正应力实验	79
实验报告七 平面应力状态下主应力的测试实验	82
实验报告八 连续梁实验	84
参考文献	86

第 1 章

实验基础知识

1.1 实验内容及研究方法

基础力学实验是材料力学、工程力学教学中的一个重要环节，是工科学生必须掌握的重要实践课程。实验是进行科学研究的重要方法，科学史上许多重大发明就是依赖科学实验而得到的，许多新理论的建立也是靠实验来验证的。例如，材料力学、工程力学中许多理论的形成就是首先对研究对象进行一系列大量的实验，然后根据实验中的有关现象，将真实材料理想化、实验构件典型化、公式推导假设化，经过简化处理后，从而得出相应的结论和定律。至于这些结论和定律是否正确，以及能否在工程中予以应用，仍然需要通过实验验证才能断定。在解决工程设计中的强度、刚度和稳定性等问题时，首先要知道材料的力学性能和表达力学性能的材料常数，这些常数只有靠实验才能测定。有时工程中构件的几何形状和载荷都十分复杂，构件中的应力单纯靠计算难以得到正确的数据，在这种情况下，就必须借助于实验分析的手段才能求得解决。让学生通过实验的手段提高发现问题、分析问题和解决问题的能力，提高学生的实验技能和工作实践能力，为相关的后续专业课程的学习与工程应用奠定不可或缺的基础。

在力学理论建立的过程中，要求研究材料的本构关系，并确定有关的材料参数。此外还需要确定材料的其他力学性能参数。精确地测量上述力学量，是对构件进行准确可靠的力学分析和计算，最后正确作出力学预测和判断的前提。

基础力学不是纯粹由严谨的逻辑推理建立起来的理论学科。在材料力学、工程力学的研究中，引进了许多假设与简化。如关于材料的连续性、均匀性及各向同性的假设；关于构件的小变形条件，实际上材料弹性范围的线性关系也不是严格的，尤其是引入了平面假设等来简化变形几何关系。虽然这些假设简化了一些力学的理论，但是由这些假设推导出材料的力学理论的有效性、精确程度、应用范围如何呢？最简单易行的办法就是通过实验进行验证。这样的验证，对于材料力学、工程力学这些实践性较强的学科，从思维逻辑和理论的完整性来说，是不可缺少的。

实验研究也是基础力学研究、解决实际问题极为重要的方法和手段。对于很

多重要的工程构件或结构,由于数学方法上的困难,仅靠理论分析,难以求得理论解析解。实验研究正是求解这些较为复杂问题的有效而又可靠的方法。对于重要的实际问题,实验测试研究是不可缺少的,它可以与理论解、数值解相互佐证。将材料的力学实验与现代计算机相结合,还可以发展新理论、设计新型结构,为研制新材料提供充分、可靠的依据,有效地解决许多理论上尚不能解决的工程难题。

基础力学实验指导就是通过实验来加强学生对材料的力学基本理论、基本概念和研究方法的理解与掌握,实验内容包括以下几个方面。

1.1.1 测定材料机械性能的实验

根据力学公式能够计算在荷载作用下构件应力的大小。为了建立其相应的强度条件必须了解其材料的强度、刚度、弹性等特性,这就需要通过拉伸、压缩等实验测定材料的屈服极限、强度极限、延伸率、弹性常数,如弹性模量 E 和泊松比 μ 等反映材料机械性能的参数,这些参数是设计构件的基本依据。但是同一种材料用不同的实验方法,测得的数据可能会有明显差异。因此,为了正确地取得这些数据,实验时就必须依据国家规范,按照标准化的程序来进行。

1.1.2 验证理论实验

反映材料力学性能的一些公式都是在对实际问题进行简化和假设的基础上(如平面假设、材料均匀性假设、弹性和各向同性假设等)推导而得的。事实上,材料的性质往往与完全均匀和完全弹性是有差异的,因此必须通过实验对根据假设推导出的公式加以验证,才能确定公式的使用范围。将一般问题抽象为理想的模型,再根据科学的假设,推导出一般性公式,这是研究材料力学通常采用的方法。这些简化和假设是否正确,理论公式在设计中的应用程度,都需要通过实验来验证。此外,对于一些近似解答,其精确度也必须通过实验校核后才能在工程设计中使用。本书中介绍的弯曲正应力实验和主应力测定就是这类实验。

1.1.3 实验应力分析

工程中有许多实际构件,其形状和受载情况是十分复杂的,其内部的应力大小及分布情况,单纯依靠材料力学的理论计算是难以解决的。近年来,虽然可以用有限元法来计算,但也要经过适当简化才有计算的可能;而且,对于用有限元法计算结果的精确性,也要通过实验的方法来加以验证。实验应力分析就是一种用实验方法来测定构件中的应力和应变的手段,它是目前解决工程实际问题的一个新兴、有效的途径。实验应力分析方法(如电测法、光测法、脆性涂层法、云纹法、X光衍射法等)所获得的结果,不仅直接而且可靠,已成为工程实际中寻求最佳设计方案、合理使用材料,挖掘现有设备潜力以及验证和发展理论的有力工具。

1.2 实验室管理

力学实验所用仪器设备多数属于大型仪器，为了保持良好的教学秩序，达到预期的教学目的，保护国家财产，避免实验事故发生，使学生养成科学严谨的工作作风，参加实验的学生必须遵守下述规则：

(1) 进入实验室之前要参加安全教育和培训，做到对机器和自身的安全负责。必须遵守学校及实验室的各项规章制度，做好安全防护。在实验室发生事故时要立即处置，及时上报。

(2) 实验课前必须认真预习。实验前必须着重阅读机器的操作规程和注意事项，初步了解掌握所用仪器和设备，清楚实验的目的和内容以及通过实验要测取哪些数据，实验时严格遵照规程进行操作并正确读取数据。

(3) 准时进入实验室，按照要求认真进行实验。未经指导教师同意，不得擅自用与本次课程无关的设备。实验结果经指导教师审阅，签名后可以结束实验。实验结束时关闭电源，整理、清点实验物品，经指导教师同意方可离开实验室。

(4) 课后按时完成、上交实验报告。

1.3 实验报告的书写

实验报告是实验者最后交出的成果，是实验资料的总结。实验报告应包括如下内容：

(1) 实验名称、实验日期、当时的室温、实验人员的姓名。

(2) 实验目的。

(3) 实验中使用的机器和仪表的名称、型号、精度（或放大倍数等）。

(4) 实验数据及其处理（方法参照 1.4 节内容）。

(5) 计算（方法参照 1.4 节内容）。

(6) 实验结果的表示（方法参照 1.5 节内容）。

(7) 在实验报告的最后部分，应当对实验结果进行分析，说明其主要结果是否正确，对误差加以分析，并回答指定的思考题。

1.4 实验数据分析方法

掌握在力学试验中所测得的原始数据并不是最终结果，还需要对所测数据进行统计归纳、分析整理，找出其内在的本质联系，才是实验的目的所在。本节简单介绍力学实验数据统计分析的基本方法。

1.4.1 测量与误差

测量是从客观事物中获取有关信息的认识过程,其目的是在一定条件下获得被测量的真值,任何实际物理量的测量都或大或小存在测量误差。尽管被测量的真值客观存在,但由于实验时所进行的测量工作都是依据一定的理论与方法,使用一定的仪器与工具,并在一定条件下由一定的人进行的,而试验理论的近似性、仪器设备灵敏度与分辨能力的局限性以及实验环境的不稳定性等因素的影响,使得被测量的真值很难求得,测量结果和被测量真值之间总会存在或多或少的偏差,由此而产生误差也就必然存在,这种偏差叫作测量值的误差。设测量值为 x , 真值为 A , 则误差 ε 为

$$\varepsilon = |x - A| \quad (1-1)$$

测量所得的一切数据都含有一定量的误差,没有误差的测量结果是不存在的。真值及其取值范围在测量前是未知的。对测量原始数据进行统计分析时,常以测量数据的代数平均值作为近似的真值。容易理解 ε 值恰好表示测量值与真值邻域尺度大小, ε 值越小,就可以对真值作出越接近实际的判断。

既然误差一定存在,那么测量的任务即是设法将测量值中的误差减至最小,或在特定的条件下,求出被测量的最近真值,并估计最近真值的可靠度。按照对测量值影响性质的不同,误差可分为系统误差、偶然误差和过失误差,此三类误差在试验时测得的数据中常混杂在一起出现。

1. 系统误差

在指定测量条件下,多次测量同一量时,若测量误差的绝对值和符号总是保持恒定,测量结果始终朝一个方向偏离或者按某一确定的规律变化,这种测量误差称为系统误差或恒定误差,这种误差产生通常有其固有的原因。系统误差的产生主要与以下因素有关。

(1) 仪器设备系统本身的问题,如仪器状态和调试没有达到要求的精度、转换参数选择不准。

(2) 使用仪器时的环境因素,如实验过程中温度、湿度、气压的逐时变化等。

(3) 测量方法的影响与限制,如实验时对测量方法选择不当,相关作用因素在测量结果表达式中没有得到反映,重要影响因素的漏估、错估,或者所用公式不够严密以及公式中系数的近似性等,从而产生方法误差。

(4) 测量者个人习惯性误差,如有的人在测量读数时眼睛位置总是偏高或偏低,记录某一信号的时间总是滞后,等等。

由于系统误差是恒差,因此,采用增加测量次数的方法不能消除系统误差。通常可采用多种不同的实验技术或不同的实验方法,以判定有无系统误差的存在。在确定系统误差的性质之后,如果时间和条件允许,最好在消除系统误差的来源后,重新测量,从而提高测量的准确度。

2. 偶然误差

偶然误差也叫随机误差,是指在同一条件下反复多次测量同一量时,测得值总是有稍许差异并变化不定,且在消除系统误差之后依然如此,这种绝对值和符号经常变化的误差称为偶然误差。偶然误差产生的原因较为复杂,影响的因素很多,难以确定某个因素产生具体影响的程度,因此偶然误差难以找出确切原因并加以排除。试验表明,大量次数测量所得到的一系列数据的偶然误差都遵从一定的统计规律。

(1) 绝对值相等的正、负误差出现机会相同,绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会多。

(2) 误差不会超出一定的范围,偶然误差的算术平均值随着测量次数的无限增加而趋向于零。

大量实验表明,要较好地减少偶然误差,就需要在相同的测量条件下,对同一量进行多次测量,用算术平均值作为所测量的结果。

设某量的 n 次测量值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 其误差依次为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$, 真值为 A , 则

$$(x_1 - A) + (x_2 - A) + (x_3 - A) + \dots + (x_n - A) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n$$

将上式展开整理得

$$\frac{1}{n} [(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) - nA] = \frac{1}{n} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n) \quad (1-2)$$

式(1-2)表示平均值的误差等于各测量值误差的平均。由于测量值的误差有正有负,相加后可抵消一部分,而且 n 越大相抵消的机会越多。因此,在确定的测量条件下,减小测量偶然误差的办法是增加测量次数。在消除系统误差之后,算术平均值的误差随测量次数的增加而减少,平均值即趋于真值,因此,可取算术平均值作为直接测量的最近真值。

测量次数的增加对提高平均值的可靠性是有利的,但并不是测量次数越多越好。因为增加次数必定延长测量时间,这将给保持稳定的测量条件增加困难,同时延长测量时间也会给观测者带来疲劳,这又可能引起较大的观测误差。另外增加测量次数只能对降低偶然误差有利,而与系统误差减小无关,所以实际测量次数不必过多,一般取 4~10 次即可。

3. 过失误差

凡是在测量时用客观条件不能解释为合理的那些突出的误差称为过失误差。过失误差是观测者在观测、记录和整理数据的过程中,由于缺乏经验、粗心大意、时久疲劳等原因引起的。初次进行实验的学生,在实验过程中常常会产生过失误差,学生应在教师的指导下不断总结经验,提高试验素质,努力避免过失误差的出现。

误差的产生原因不同,种类各异,其评定标准也有区别。为了评判测量结果的好坏,我们引入测量的精密度、准确度和精确度等概念。精密度、准确度和精

准确度都是评价测量结果好坏与否的,但各词含义不同,使用时应加以区别。测量的精密度高,是指测量数据比较集中,偶然误差较小,但系统误差的大小不明确。测量的准确度高,是指测量数据的平均值偏离真值较小,测量结果的系统误差较小,但数据分散的情况即偶然误差的大小不明确。测量的精确度高,是指测量数据比较集中在真值附近,即测量的系统误差和偶然误差都比较小,精确度是对测量的偶然误差与系统误差的综合评价。

1.4.2 有效数字

1. 有效数字意义

由于实测原始数据和处理分析过程中得到的数据都具有一定的精度。因此在数据记录和数据处理过程中,应该选择合理的数据位数表示这些近似数,以便简明清晰地辨识各测试数据的精度,保证间接测量时最终测试结果的可靠性,这就是涉及有效数字的应用。

实验测量中,所使用的机器、仪器和量具,其标尺刻度的最小分度值是随机器、仪器和量具的精度不同而不同的。在测量时,除了要直接从标尺上读出可靠的刻度值外,还应尽可能地读出最小分度线的下一位估计值(只需1位)。例如,用百分表测变形,百分表的最小刻度值是0.01 mm,其精度(仪表的最小刻度值代表了仪器的精度)即为1% mm。但实际上,在最小刻度间还可以作读数估计,如可在百分表上读取0.128 mm,其中,最后一位数字“8”就是估读出来的。这种由测量得来的可靠数字和末位的估计数字所组成的数字,称为有效数字。由此可见,有效数字的位数是取决于测量仪器精度的,不能随意增减。多写了位数,意味着夸大了仪器的精度;少写了位数,损失了测量所得的精度。所以,在填写实验数据时,一定要注意其有效数字的位数应与仪器本身的精度相适应。例如,用百分表测出的变形数据,其有效数字就应取3位,即0.128 mm或 128×10^{-3} mm。

再如实验测得试件的直径是 $d=10$ mm与 $d=10.0$ mm的意义不同,后者表示的测量精度较高。

2. 有效数字处理

实验中测得的数据,它们的有效数字位数有可能各不相同,在运算时就需要合理地处理。这里仅介绍数据处理及简单运算中需要注意的最基本方法。

(1) 几个数相加(或相除)时,其积(或商)的有效数字位数应与几个数中小数点后位数最少的那个相同。例如, $4.33+31.7+2.652$ 应写为38.7,而不应写为38.682。

(2) 几个数相乘(或相除)时,其积(或商)的有效数字位数应与几个数中位数最少的相同。例如,截面面积 $A=23.49 \times 52.1$ 的计算结果,不必写成 $A=1\,223.829$ mm²,而应写作 $A=1\,223.8$ mm²。

(3) 常数以及无理数(如 π 、 $\sqrt{2}$ 等)参与运算,不影响结果的有效数字

位数。

如无理数参与运算时,该无理数的位数中需与有效数字最少的位数相同。例如,测得一试件的直径为 $d = 10.02 \text{ mm}$, 则该试件的横截面面积

$$A = \pi \times 10.02^2 / 4 = 3.142 \times 10.02^2 / 4 = 78.86 (\text{mm}^2)$$

(4) 在确定有效数字的位数时,如第一位数字 ≥ 8 ,则有效数字的位数可多算一位。例如,9.15 虽然只有 3 位,但可认为它是 4 位有效数字。

(5) 求 4 个数或 4 个数以上的平均值时,结果的有效位数要增加 1 位。

(6) 舍弃有效数字位数以后的数字,按四舍六入五单双法处理。其舍弃方法:若应保留的最后位数的下一位数字小于 5 时,则应保留的最后位数的数字保持不变。当保留的最后位数的下一位数字大于 5 时,则在保留的最后位数的数字上增加 1。当保留的最后位数的下一位数字为 5,并且在 5 的后面没有数字或只有 0 时,如果留的最后位数的数字为奇数,则在此位数的数字上加 1,如果是偶数,则保持不变。如果 5 后面还有其他不为零的数字,则在最后保留位数的数字上增加 1。

例如,某一物理量 G 按相应的技术条件规定,所需位数只要 3 位。下面分左、右依次列出经过 5 次测试和计算得出的 G_i 和根据四舍六入五单双法的规定而整理的 G'_i :

$$G_1 = 28.447, G'_1 = 28.4$$

$$G_2 = 28.361, G'_2 = 28.4$$

$$G_3 = 28.35, G'_3 = 28.4$$

$$G_4 = 28.450, G'_4 = 28.4$$

$$G_5 = 28.354, G'_5 = 28.4$$

1.4.3 数据处理的基本方法

任何客观事物的运动和变化都与其周围事物发生联系和影响,反映到数学问题上即变量和变量之间的相互关系,回归分析就是一种研究变量与变量之间关系的数学处理方法。

在处理实际问题时,要找出事物之间的确切关系有时比较困难,造成这种情况的原因极其复杂,影响因素很多,其中包括尚未被发现的或者还不能控制的影响因素,而且测量过程存在测量误差,因此所有这些因素的综合作用就造成了变量之间关系的不确定性。回归分析时应用数学方法,对这些数据去粗取精、去伪存真,从而得到反映事物内部规律的数据方法。概况来说,回归分析主要解决以下几个方面的问题。

(1) 确定几个特定的变量之间是否存在相关关系,如果存在,则找出它们之间的数学表达式。

(2) 根据一个或几个变量的值,预测或控制另一个变量的取值,并绘出其精度。

(3) 进行因素分析, 找出主要影响因素和次要影响因素, 以及这些因素之间的相关程度。

回归分析目前在试验的数据处理、寻找经验公式、因素分析等方面有着广泛的用途, 材料力学研究线弹性小变形杆的力学问题。它的理论多数是线性的, 各主要变量间的函数关系多为线性关系。首先讨论最小二乘线性拟合的方法。

1. 最小二乘原理

假设 x 和 y 是具有某种相关关系的物理量, 它们之间的关系可用下式表达

$$y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (1-3)$$

式中: $c_1, c_2, \dots, c_n$ 为 n 个待定常数, 曲线的具体形状是未定的。为求得具体曲线, 可同时测定 x 和 y 的数值。

设 x, y 关系的最佳形式为

$$\hat{y} = f(x, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_n) \quad (1-4)$$

式中: $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_n$ 为 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 的最佳估计值。如果不存在测量误差, 各测值应在曲线方程式 (1-3) 上, 由于存在测量误差, 总有

$$e_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1-5)$$

通常称 e_i 为残差, 它是误差的实测值。如果实测值中有较多的 y 值落在曲线方程式 (1-4) 上, 则所得曲线就能较为满意地反映被测物理量之间的关系。

如果误差服从正态分布, 则概率 $P(e_1, e_2, \dots, e_n)$ 为

$$P(e_1, e_2, \dots, e_n) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[- \sum_{i=1}^m \frac{(\hat{y}_i - y_i)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (1-6)$$

当 $P(e_1, e_2, \dots, e_n)$ 最大时, 求得的曲线就应当是最佳形式。显然, 此时下式应最小:

$$S = \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^m e_i^2 \quad (1-7)$$

即残差平方和最小, 这就是最小二乘法的由来, 同时式 (1-8) 成立:

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{c}_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \hat{c}_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial \hat{c}_n} = 0 \quad (1-8)$$

即要求求解如下联立方程组:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_n)] \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{c}_1} \right) &= 0 \\ \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_n)] \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{c}_2} \right) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^m [y_i - f(x_i, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_n)] \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{c}_n} \right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

该方程组称为正规方程, 解该方程组可得未定常数, 通常称为最小二乘解。

2. 直线回归分析

直线回归相关关系可表示为

$$\hat{y} = a + bx \quad (1-9)$$

直线的斜率 b 称为回归系数, 它表示为当 x 增加一个单位时, y 平均增加的数量。直线回归的残差可写为

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + bx_i) \quad (1-10)$$

其平方和为

$$S = \sum_{i=1}^m e_i^2 = \sum_{i=1}^m [y_i - (a + bx_i)]^2 \quad (1-11)$$

平方和最小, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^m (y_i - a - bx_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^m x_i (y_i - a - bx_i) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

则正规方程为

$$am + b \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i$$

该式也可表示为

$$a \sum_{i=1}^m x_i + b \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i y_i \quad (1-13)$$

令平均值为

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{m} \quad (1-14)$$

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^m \frac{y_i}{m}$$

则由式 (1-9) 可得

$$a + b \bar{x} = \bar{y}$$

整理得到

$$a = \bar{y} - b \bar{x} \quad (1-15)$$

同样, 从式 (1-13) 可得

$$b = \frac{\sum_{i=1}^m x_i y_i - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m x_i \right) \left(\sum_{i=1}^m y_i \right)}{\sum_{i=1}^m x_i^2 - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2} \quad (1-16)$$

由于式 (1-15) 和式 (1-16) 中所有的量都是试验数据, 因此可得回归直线方程式中的常数 a 及回归系数 b 。

3. 非线性拟合

在研究对某些金属材料的应力应变关系的测试数据的处理等问题时, 经常采用幂函数、指数函数等非线性函数进行拟合。这时将得到非线性方程组, 这里简单介绍指数函数拟合。设观测值为 $\{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, 选取

$$y = a_0 e^{a_1 x} \quad (1-17)$$

即

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x \quad (1-18)$$

记 $Y = \ln y$, $A_0 = \ln a_0$, 原问题仍可以按线性拟合中的公式来计算。

运用曲线拟合技术应该注意以下两点:

(1) 对原始数据要严格分析筛选。不可将含有很大过失误差的数据混入拟合点列, 因为这将严重歪曲实验曲线。

(2) 拟合时, 除精心选择拟合函数形式 (这是拟合成功与否的前提) 之外, 合理选择待定参数的数量和形式, 从滤除测量误差的干扰和避免数值计算中的误差积累的角度看, 并非待定参数选用越多越有利。尤其当原始数据精确度不高时, 切忌这样选择。

对于一般的非线性最小二乘拟合问题, 也可以通过分析将不易求解的非线性方程组转化为易于求解的形式。也可借助于几何作图、级数展开、数值近似计算等方法进行处理。

随办公软件的发展, 数据筛选后, 可以直接应用 Excel 试验数据处理程序进行指数函数、幂函数、线性函数、多项式等拟合。

1.5 实验结果的表示方法

在实验中除需对测得的数据进行整理并计算实验结果外, 一般还要采取图表或曲线来表达实验成果。实验曲线应绘在坐标纸上。图中应注明坐标轴所代表的物理量和比例尺。

通过实验观测、采集、记录到需要的原始数据, 经过分析处理, 得到直接测量的测量值及其误差范围, 再经过分析、计算, 求得间接测量的测试结果和测量精度。事实上, 在实测之前就要根据测试结果的精确度的要求, 制定实验测试方案、测试线路和程序, 进行设备仪器的选配。并事先设计好相应的原始数据的记录、分析表格, 以便既不遗漏, 又不重复地采集、记录原始数据, 使整个数据处理、分析计算过程思维清晰、流畅高效, 为最终完成实验报告打好基础。实测结束并得到最终测量结果之后, 为了清晰、准确、简明、直观地将这些结果表达出来, 也应该认真地选择有效的表示方法和表达形式, 以便于查阅、交流和工程应用。常见的方法有表格法、图示法和解析法。

1. 表格法

表格法就是将测量的结果, 通过直接列表的方法表示出来。表格法的优点是简单、明了, 可以直接读取数据、估计误差; 便于对数据进行简单的加减、积分等运算处理; 便于对记录的数据进行直观对比。但是表格法无法直接得出数值的变化趋势, 必须经过简单计算或详细比较才能得到。