

Bethe-Salpeter方程 及其应用

陈教凯 著

中国原子能出版社

Bethe-Salpeter方程及其应用

陈教凯 著

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

Bethe-Salpeter方程及其应用 / 陈教凯著.— 北京:中国原子能出版社, 2014.11

ISBN 978-7-5022-6454-3

I. ①B… II. ①陈… III. ①粒子物理—研究 IV. ①O572.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第275083号

内容简介

本书讨论了Bethe-Salpeter方程及其在粒子物理重介子领域的应用,其中包含了近年来相关领域研究的热点问题。全书共五章,分别为Bethe-Salpeter方程、Bethe-Salpeter波函数的一般形式、Bethe-Salpeter方程的化简、Bethe-Salpeter方程的求解以及Bethe-Salpeter方程的应用。本书可供粒子物理专业及相关专业的研究生和科研人员参考使用。

Bethe-Salpeter方程及其应用

出版发行	中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路43号 100048)
责任编辑	肖 萍
装帧设计	马世玉
责任校对	冯莲凤
责任印制	潘玉玲
印 刷	北京九州迅驰传媒文化有限公司
经 销	全国新华书店
开 本	880 mm × 1230 mm 1/32
印 张	6.125
字 数	157 千字
版 次	2014年11月第1版 2014年11月第1次印刷
书 号	ISBN 978-7-5022-6454-3 定 价 25.00 元

网址: <http://www.aep.com.cn>

E-mail: atomep123@126.com

发行电话: 010-68452845

版权所有 侵权必究

目 录

第一章	Bethe-Salpeter方程	1
1.1	标量-标量粒子束缚态	1
1.1.1	Bethe-Salpeter方程	1
1.1.2	归一化条件	6
1.2	Bethe-Salpeter方程的相关讨论	9
1.2.1	波函数	9
1.2.2	作用核	10
1.2.3	传播子	10
1.2.4	方程的解	11
1.3	其他类型的Bethe-Salpeter方程	12
1.3.1	费米子-费米子束缚态类型	12
1.3.2	费米子-标量粒子束缚态类型	13
1.3.3	矢量粒子-矢量粒子束缚态类型	14
1.3.4	其他类型	15
第二章	Bethe-Salpeter波函数的一般形式	17
2.1	费米子-反费米子束缚态	17
2.1.1	宇称分析	17
2.1.2	电荷共轭分析	20
2.2	标量粒子-标量粒子束缚态	23
2.3	费米子-标量粒子束缚态	24
2.4	其他类型	27
第三章	Bethe-Salpeter方程的化简	28
3.1	概述	28

3.1.1	梯形近似	28
3.1.2	自由传播子近似	29
3.1.3	瞬时近似	30
3.1.4	规范选取	31
3.1.5	各种简化	31
3.2	Salpeter方程的常见形式	32
3.2.1	Salpeter方程	32
3.2.2	归一化	34
3.2.3	解的性质	37
3.2.4	宇称为 $\eta_P = (-1)^{j+1}$ 的态	41
3.2.5	宇称为 $\eta_P = (-1)^j$ 的态	45
3.2.6	波成分的分离	49
3.2.7	其他两粒子束缚态	55
3.3	Salpeter方程的协变形式	56
3.4	Spinless Salpeter方程	59
3.4.1	Reduced Salpeter方程	59
3.4.2	Spinless Salpeter方程	60
3.4.3	无旋相对论Coulomb问题	61
3.5	其他简化形式	63
3.6	有效势	65
3.6.1	费米子-费米子束缚态	65
3.6.2	标量粒子-标量粒子束缚态	68
3.6.3	费米子-标量粒子束缚态	69
3.7	Breit方程	70
3.7.1	公式推导	71
3.7.2	不等质量束缚态系统	73

3.7.3	等质量束缚态系统	80
3.8	Virial定理	83
3.9	束缚态的虚度	90
第四章	Bethe-Salpeter方程的求解	93
4.1	概述	93
4.2	解析求解	93
4.2.1	Wick-Cutkosky模型	93
4.2.2	反常解	97
4.3	本征函数与势	98
4.4	Nyström方法	100
4.4.1	概述	100
4.4.2	Landé subtraction方法	101
4.4.3	Truncation方法	107
4.4.4	Nyström方法	110
4.4.5	数值结果	111
4.4.6	分支现象	116
4.5	Spectral方法	117
4.5.1	区间变换	118
4.5.2	Gauss-Legendre积分	119
4.5.3	矩阵方程	122
4.5.4	数值结果	124
4.6	数值解的可靠性	125
4.6.1	本征波函数	126
4.6.2	本征值	126
4.6.3	分支现象和本征值的收敛方向	131
4.7	展开法	132

	4.7.1 广义Laguerre多项式	132
	4.7.2 计算矩阵元	134
	4.7.3 Gegenbauer函数	138
第五章	Bethe-Salpeter方程的应用	140
5.1	质谱	141
5.1.1	简介	141
5.1.2	势	142
5.1.3	相互作用核	143
5.1.4	正负电子偶素	146
5.1.5	超对称强子质谱	146
5.2	产生与衰变	148
5.2.1	产生	148
5.2.2	衰变	152
5.2.3	波函数简化	154
5.3	一些其他应用	155
附录 A	符号约定	158
A.1	单位	158
A.2	度规	158
A.2.1	闵氏空间	158
A.2.2	欧氏空间	159
A.2.3	球坐标系	159
附录 B	常用公式	162
B.1	全反对称张量	162
B.2	Fourier变换	162
B.3	极化矢量与极化张量	163
B.3.1	极化矢量	163

B.3.2 高自旋情况	164
B.3.3 极化张量的球坐标表述	166
B.4 Dirac矩阵	167
B.5 Dirac旋量	168
B.6 $SU_c(3)$ 色矩阵	169
B.7 留数定理	170
参考文献	172

第一章 Bethe-Salpeter方程

在量子场论中,束缚态问题仍是当前最重要的基本问题之一。尤其是当不能忽略相对论性质和必须考虑组分粒子之间的延迟效应时,束缚态问题变得极为复杂。在微观领域,束缚态问题的研究无疑具有极其重要的地位,起着极其重要的作用。当研究的对象为非相对论情形时,用Schrödinger方程就可以很好地处理;但是,当处理相对论问题时,Schrödinger方程毫无疑问已经不再适用了。原则上讲,在相对论量子场论框架内处理束缚态问题的适当的标准工具是Bethe-Salpeter方程^[1,2]。

Bethe-Salpeter方程^[1]是Salpeter和Bethe两人在1951年基于Feynman图提出的一个四维的相对论方程。同年Gell-Mann和Low^[3]从量子场论出发给出了严格的推导。而Schwinger则用泛函积分的方法得到了Bethe-Salpeter方程^[4]。Bethe-Salpeter方程既可以处理散射问题,也可以处理束缚态问题;既可以处理两粒子问题,也可以处理多粒子问题。本书主要从重味介子物理^①的角度讨论Bethe-Salpeter方程及其应用。

1.1 标量-标量粒子束缚态

我们首先讨论比较简单的由两个标量粒子构成的束缚态的Bethe-Salpeter方程^[1-8]。

1.1.1 Bethe-Salpeter方程

定义标量粒子系统的四点Green函数为

$$G(x_1, x_2; y_1, y_2) = \langle 0 | T \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_1^\dagger(y_1) \phi_2^\dagger(y_2) | 0 \rangle \quad (1.1)$$

^① 重味介子是指含有一个或两个重夸克的介子。

式(1.1)中两个标量场 ϕ_1 和 ϕ_2 是可分辨的。 $|0\rangle$ 为物理真空， T 为Wick编时乘积算符， $\dagger$ 为取Hermite共轭。Green函数(1.1)满足Bethe-Salpeter方程，

$$G(x_1, x_2; y_1, y_2) = G_0(x_1, x_2; y_1, y_2) + \int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z'_1 d^4 z'_2 G_0(x_1, x_2; z_1, z_2) \times K(z_1, z_2; z'_1, z'_2) G(z'_1, z'_2; y_1, y_2) \quad (1.2)$$

上式用图表示为图1.1，公式(1.2)可以简记为

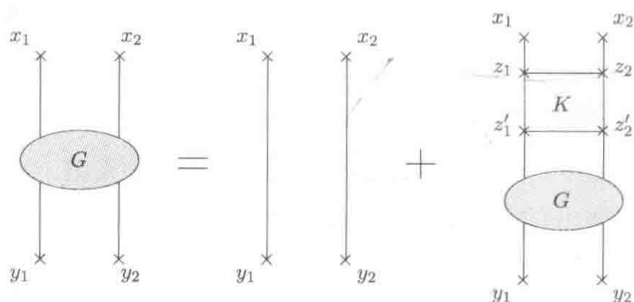


图 1.1 坐标空间Bethe-Salpeter方程的图示

$$G = G_0 + G_0 K G \quad (1.3)$$

还可以写为

$$G = G_0 + G K G_0 \quad (1.4)$$

式中， K 为四点截腿不可约作用核， G_0 为自由四点Green函数

$$G_0(x_1, x_2; y_1, y_2) = \Delta_{F_1}(x_1 - y_1) \Delta_{F_2}(x_2 - y_2) \quad (1.5)$$

式中标量粒子的完全传播子为

$$\Delta_{F_i}(x - y) = \langle 0 | T \phi_i(x) \phi_i^\dagger(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \Delta_{F_i}(p) \quad (1.6)$$

在实际计算时,通常用自由传播子来替代完全传播子。在动量空间中,标量粒子的自由传播子为

$$\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.7)$$

式中, p 为粒子的四维动量, m 理解为粒子的有效质量。

在场论中,束缚态单粒子的Fock态的归一化条件和完备性条件为

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P} | \mathbf{P}' \rangle &= (2\pi)^3 2\omega_P \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{P}'), \quad \omega_P = \sqrt{M^2 + \mathbf{P}^2}, \\ 1 &= \int \frac{d^3\mathbf{P}}{(2\pi)^3} |\mathbf{P}\rangle \frac{1}{2\omega_P} \langle \mathbf{P}| + \cdots \end{aligned} \quad (1.8)$$

式中, M 为束缚态的质量, $\mathbf{P}$ 为束缚态动量。

定义Bethe-Salpeter波函数为

$$\begin{aligned} \chi(x_1, x_2) &= \langle 0 | T \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) | P \xi \rangle, \\ \bar{\chi}(y_1, y_2) &= \langle P \xi | T \phi_1^\dagger(y_1) \phi_2^\dagger(y_2) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \bar{T} \phi_1^\dagger(y_1) \phi_2^\dagger(y_2) | P \xi \rangle^* \end{aligned} \quad (1.9)$$

式中, P 为束缚态四维动量, $P = (P_0, \mathbf{P})$ 。 ξ 为束缚态其他的量子数, 在下面的记法中将略去不写。 $\bar{T}$ 为反编时乘积算符, $*$ 表示取复共轭。应用公式(1.1) 和公式(1.9), 可以得到描述束缚态的Bethe-Salpeter方程

$$\begin{aligned} \chi(x_1, x_2) &= \int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z'_1 d^4 z'_2 G_0(x_1, x_2; z_1, z_2) \times \\ &\quad K(z_1, z_2; z'_1, z'_2) \chi(z'_1, z'_2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

上式的共轭方程为

$$\begin{aligned} \bar{\chi}(x_1, x_2) &= \int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z'_1 d^4 z'_2 \bar{\chi}(z_1, z_2) \times \\ &\quad K(z_1, z_2; z'_1, z'_2) G_0(z_1, z_2; x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1.11)$$

式中, K 为Bethe-Salpeter方程的相互作用核, 是所有两粒子不可约Feynman图的和。

通过平移不变性把Bethe-Salpeter波函数变换为

$$\begin{aligned}\chi(x_1, x_2) &= e^{-iP \cdot X} \chi_P(x) = e^{-iP \cdot X} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \chi_P(p), \\ \bar{\chi}(x_1, x_2) &= e^{iP \cdot X} \bar{\chi}_P(x) = e^{iP \cdot X} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \bar{\chi}_P(p)\end{aligned}\quad (1.12)$$

式中, X 为质心坐标, x 为相对坐标, P 为质心动量, 它满足质壳条件 $P^2 = M^2$, M 为束缚态质量,

$$x_1 = X + \eta_2 x, \quad x_2 = X - \eta_1 x \quad (1.13)$$

或

$$X = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2, \quad x = x_1 - x_2 \quad (1.14)$$

η_1 和 η_2 可以任意取值, 满足 $\eta_1 + \eta_2 = 1$ 。一般地, η_1 和 η_2 取为

$$\eta_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \eta_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.15)$$

m_1 与 m_2 分别为组分粒子1、2的质量。

在实际运用中, 应用动量空间中的Bethe-Salpeter方程更为方便。由平移不变性, 有

$$\begin{aligned}G(x_1, x_2; y_1, y_2) &= G(x, y; X - Y), \\ K(x_1, x_2; y_1, y_2) &= K(x, y; X - Y)\end{aligned}\quad (1.16)$$

通过Fourier变换把Bethe-Salpeter波函数(1.12)变换到动量空间为

$$\begin{aligned}\chi_P(p_1, p_2) &= \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} \chi_P(x_1, x_2) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - P) \chi_P(p)\end{aligned}\quad (1.17)$$

式中

$$\chi_P(p) = \int e^{ip \cdot x} \chi_P(x) d^4x, \quad \bar{\chi}_P(p) = \int e^{-ip \cdot x} \bar{\chi}_P(x) d^4x \quad (1.18)$$

相对动量 p 和质心动量 P 为

$$\begin{aligned} P &= p_1 + p_2, & p &= \eta_2 p_1 - \eta_1 p_2, \\ p_1 &= \eta_1 P + p, & p_2 &= \eta_2 P - p \end{aligned} \quad (1.19)$$

p_1 和 p_2 是场 ϕ_1 和 ϕ_2 所携带的动量。在这里没有像在非相对论运动学里变量分离所给出的相对动量的自然定义。在非相对论运动学里这是从特殊的选择公式(1.15)而得出的结果。还需要注意到组分粒子是不能在壳的(on-shell)，否则不能形成束缚态。所以有

$$M_B < m_1 + m_2, \quad p_i^2 \neq m_i^2 \quad (i = 1, 2) \quad (1.20)$$

与Bethe-Salpeter波函数变换类似，四点Green函数(1.1)的Fourier变换为

$$\begin{aligned} G(p_1, p_2; p'_1, p'_2) &= \int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2 - ip'_1 y_1 - ip'_2 y_2} \times \\ &G(x_1, x_2; y_1, y_2) \end{aligned} \quad (1.21)$$

或

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \int \frac{d^4P d^4P' d^4p d^4p'}{(2\pi)^{16}} e^{-iPX + iP'Y - ipx + ip'y} \times \\ &G(p, p'; P, P') \end{aligned} \quad (1.22)$$

式中， $G(p, p'; P, P') = (2\pi)^4 \delta^4(P - P') G(P, p, p')$ 。不可约核的Fourier变换为

$$\begin{aligned} K(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \int \frac{d^4P d^4P' d^4p d^4p'}{(2\pi)^{16}} e^{-iPX + iP'Y - ipx + ip'y} \times \\ &K(p, p'; P, P') \end{aligned} \quad (1.23)$$

式中, $K(p, p'; P, P') = (2\pi)^4 \delta^4(P - P') K(P, p, p')$ 。从而可以将(1.3)写为

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [I(P, p, k) - K(P, p, k)] G(P, k, p') = (2\pi)^4 \delta(p - p') \quad (1.24)$$

式中, $I(P, p, k) = (2\pi)^4 \delta^4(p - k) \Delta_{F_1}^{-1}(p_1) \Delta_{F_2}^{-1}(p_2)$ 。可以将Bethe-Salpeter方程(1.10) 写为如下形式

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [I(P, p, k) - K(P, p, k)] \chi_P(k) = 0 \quad (1.25)$$

上式齐次积分方程为动量空间中的Bethe-Salpeter方程。

在动量空间中, 相对于非齐次方程(1.24), Bethe-Salpeter波函数(1.18)满足的齐次Bethe-Salpeter方程的常见形式为

$$\begin{aligned} \chi_P(p) &= \Delta_{F_1}(p_1) \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} K(P, p, p') \chi_P(p') \Delta_{F_2}(p_2), \\ \bar{\chi}_P(p) &= \Delta_{F_2}(p_2) \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \bar{\chi}_P(p') K(P, p, p') \Delta_{F_1}(p_1) \end{aligned} \quad (1.26)$$

式中, $\Delta_{F_1}(p_1)$ 和 $\Delta_{F_2}(p_2)$ 是两个标量粒子的完全传播子。

1.1.2 归一化条件

Bethe-Salpeter方程(1.26)和Bethe-Salpeter波函数的归一化条件共同决定了Bethe-Salpeter方程的解, 本征值和本征波函数。下面列出Bethe-Salpeter波函数的归一化条件。由于束缚态Bethe-Salpeter波函数满足的Bethe-Salpeter方程为齐次方程, 所以Bethe-Salpeter波函数的归一化条件是不能由该方程得出的。

在公式(1.1)中插入完全集, 有

$$\begin{aligned}
 G(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \sum \langle 0 | T \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) | P \rangle \langle P | \phi_1^\dagger(y_1) \phi_2^\dagger(y_2) | 0 \rangle \\
 &= \sum \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(P^2 - \omega_P^2) \chi_P(x_1, x_2) \bar{\chi}_P(y_1, y_2) \times \\
 &\quad \theta(P_0) \theta(X_0 - Y_0) \\
 &= \sum \int \frac{d^3 \mathbf{P}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_P} e^{-i\omega_P(X_0 - Y_0) + i\mathbf{P} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} \times \\
 &\quad \chi_P(x) \bar{\chi}_P(y) \theta(X_0 - Y_0)
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

式中, 表示时序次序的阶跃函数更准确的应表示为

$$\theta(X_0 - Y_0) \rightarrow \theta \left(X_0 - Y_0 - \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} (x_0 - y_0) - \frac{|x_0|}{2} - \frac{|y_0|}{2} \right) \tag{1.28}$$

上式中, $\theta(X_0 - Y_0)$ 为阶跃函数 (heaviside step function), 其定义为

$$\theta(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{y + i\epsilon} e^{-ixy} dy = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{y - i\epsilon} e^{ixy} dy \tag{1.29}$$

因为附加的相因子并不会改变 $P_0 = \omega_P$ 点处的留数, 所以可以使用公式(1.27)中的阶跃函数。应用公式(1.28), 并作变换 $P_0 \rightarrow P_0 - \omega_P$, 公式(1.27)可写为

$$\begin{aligned}
 G(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \sum i \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} e^{-iP_0(X_0 - Y_0) + i\mathbf{P} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} \times \\
 &\quad \frac{\chi_P(x) \bar{\chi}_P(y)}{2\omega_P(P_0 - \omega_P + i\epsilon)}
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

由上式可得束缚态贡献, 即极点处贡献为

$$G(P, p, p') = \frac{i \sum \chi_P(p) \bar{\chi}_P(p')}{2\omega_P(P_0 - \omega_P + i\epsilon)} + R \tag{1.31}$$

式中, R 在极点处是正则的。极点留数的因子化性质对于用束缚态来解释是本质的。反粒子态(或束缚态的CPT变换态)的贡献也需要考虑进来, 公式(1.31)变为

$$G(P, p, p') = \frac{i \sum \chi_P(p) \bar{\chi}_P(p')}{P^2 - M^2 + i\epsilon} + R \quad (1.32)$$

把公式(1.32)代入公式(1.24), 比较方程两边的留数, 同样可以得到齐次Bethe-Salpeter方程(1.25)。

非齐次Bethe-Salpeter方程(1.3)可以变形为

$$G = G(G_0^{-1} - K)G \quad (1.33)$$

应用公式(1.32)和公式(1.33), 比较方程两边的留数, 可得

$$\lim_{P^2 \rightarrow M^2} i \frac{\bar{\chi}(G_0^{-1} - K)\chi}{P^2 - M^2 + i\epsilon} = 1 \quad (1.34)$$

其等价的协变表示为^[5,6,9]

$$i\bar{\chi} \left[\frac{\partial}{\partial P^\mu} (G_0^{-1} - K) \right] \chi = 2P_\mu \quad (1.35)$$

上面公式(1.35)的显式表示为

$$i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \left[\bar{\chi}_P(p) \frac{\partial}{\partial P^\mu} (G_0^{-1}(P, p, p') - K(P, p, p')) \chi_P(p') \right] = 2P_\mu \quad (1.36)$$

式中, $G_0^{-1}(P, p, p') = (2\pi)^4 \delta^4(p - p') \Delta_{F_1}^{-1}(p_1) \Delta_{F_2}^{-1}(p_2)$ 。在推导公式(1.36)过程中, 用到了积分公式

$$\int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^n} = \pm 2\pi i \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} f(z) \Big|_{z=z_0} \quad (1.37)$$

式中, 函数 $f(z)$ 在回路 C 内是解析的, $\pm$ 取决于回路取逆时针方向还是顺时针方向。

1.2 Bethe-Salpeter方程的相关讨论

尽管Bethe-Salpeter方程在形式上是严格的，但是在实际应用中面临着相当严重的问题。Bethe-Salpeter方程(1.26)中完整的作用核 K 是无法得到的；即使能够得到作用核，一般地讲，Bethe-Salpeter方程也是无法求解的。只有在极个别的特殊情况下，Bethe-Salpeter方程才有严格解。比如，对于通过交换零质量标量粒子进行相互作用的两个标量粒子形成的束缚态，Wick和Cutkosky提出了著名的Wick-Cutkosky模型，这个方程就是可以严格求解的。还有，在非阿贝尔(non-Abelian)规范理论中，比如，量子色动力学(QCD)，由于有Dyson-Schwinger方程把传播子和作用核联系在一起，取自由传播子近似和Bethe-Salpeter禁闭作用核会出现明显地不一致。即便Bethe-Salpeter方程有这些缺陷，在解决相对论束缚态问题时，Bethe-Salpeter的框架仍是不可或缺的。

1.2.1 波函数

Bethe-Salpeter波函数 $\chi(x)$ 或 $\chi(p)$ ^[10]与非相对论Schrödinger方程中的波函数明显不同，这种不同在坐标空间中体现为Bethe-Salpeter波函数对相对时间变量的依赖，在动量空间中体现为对相对能量的依赖。这种依赖对束缚态起到什么作用到目前还不完全清楚。相对时间或相对能量的出现是相互作用延迟效应的反映。从数学角度上讲，它导致了求解的复杂性。

Bethe-Salpeter波函数没有直接的概率解释，但是却可以出现在包含束缚态的散射过程中和矩阵元里。对于束缚态出现在圈积分中的过程来说，Bethe-Salpeter波函数对相对时间或相对能量的依赖尤为重要^[11]。

一般地，解决Bethe-Salpeter波函数对相对时间或相对能量的依赖的办法是定义等时波函数或瞬时波函数，也叫Salpeter波