

高职高专规划教材

# 线性代数

李龙星 主编



1.2-43

机械工业出版社  
China Machine Press

984

015/2-42  
L33

高 职 高 专 规 划 教 材

# 线 性 代 数

主 编 李龙星  
副主编 崔秋珍 时红霞 程志谦  
参 编 董桂生 魏 巍 运士伟 许 超  
主 审 徐会芳



机 械 工 业 出 版 社

线性代数是工程专科学校一门重要的基础课。教育部对高职高专数学教学要求以“应用为目的，必须够用为度”，为适应高职高专的教学要求，在广泛听取专业课教师意见的基础上，编写了这本《线性代数》。本教材对比较抽象的内容不是简单的回避，而是采用直观说明的方法给予解释，使读者首先对内容有清晰的了解，不拘泥于抽象的细节，着重把握内容的实质，为今后解决实际问题打下基础。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数/李龙星主编. —北京: 机械工业出版社, 2002.8  
高职高专规划教材  
ISBN 7-111-10708-X

I. 线… II. 李… III. 线性代数—高等学校: 技术学校—教材  
IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 055426 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)  
责任编辑: 郑丹 版式设计: 冉晓华 责任校对: 樊钟英  
封面设计: 陈沛 责任印制: 路琳  
北京市樱花印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行  
2002 年 8 月第 1 版 第 1 次印刷  
1000mm×1400mm B5·4.625 印张·175 千字  
0 001—6 000 册  
定价: 12.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换  
本社购书热线电话 (010) 68993821、68326677—2527  
封面无防伪标均为盗版

## 前 言

国家教育部在高职高专数学教学基本要求中强调，基础课教学应该以“应用为目的，必须够用为度”，借用本科教材显然不能适应高职高专的教学要求。为适应高职高专的教学需要，我们组织力量编写了这本《线性代数》。本教材对比较抽象的内容不是简单的回避，而是采用直观说明的方法给予解释，使读者首先对内容有直观的了解，不拘泥于抽象的细节，重在把握内容实质，便于以后更好地应用。

本书由李龙星任主编，崔秋珍、时红霞、程志谦任副主编。第1章行列式由李龙星编写，第2章矩阵由程志谦编写，第3章 $n$ 维向量由时红霞编写，第4章线性方程组解的结构由魏巍编写，第5章相似矩阵及二次型由董桂生编写，第6章线性经济模型简介由崔秋珍编写，魏巍、运士伟、许超核对、验算了全部习题答案。

由于时间仓促，缺点错误在所难免，敬请读者批评指正。

编者

2001年7月

# 目 录

## 前言

<b>第 1 章 行列式</b> .....	1
1.1 二阶、三阶行列式 .....	1
习题 1.1 .....	4
1.2 排列的逆序数及对换 .....	4
习题 1.2 .....	5
1.3 $n$ 阶行列式 .....	5
习题 1.3 .....	8
1.4 行列式的性质 .....	8
习题 1.4 .....	12
1.5 行列式的按行按列展开 .....	12
习题 1.5 .....	15
1.6 克莱姆法则 .....	16
习题 1.6 .....	18
<b>第 2 章 矩阵</b> .....	20
2.1 线性变换与矩阵的概念 .....	20
习题 2.1 .....	22
2.2 矩阵的运算 .....	22
习题 2.2 .....	28
2.3 逆阵 .....	29
习题 2.3 .....	32
2.4 矩阵的初等变换 .....	33
习题 2.4 .....	37
* 2.5 分块矩阵 .....	38
习题 2.5 .....	42
<b>第 3 章 <math>n</math> 维向量</b> .....	44
3.1 消元法解线性方程组 .....	44
习题 3.1 .....	51
3.2 $n$ 维向量 .....	52
习题 3.2 .....	56
3.3 向量组的线性相关性 .....	56
习题 3.3 .....	64

3.4 向量组的秩 .....	65
习题 3.4 .....	68
<b>第 4 章 线性方程组解的结构</b> .....	<b>70</b>
4.1 齐次线性方程组解的结构 .....	70
4.2 非齐次线性方程组解的结构 .....	74
习题 4.2 .....	76
<b>第 5 章 相似矩阵及二次型</b> .....	<b>78</b>
5.1 预备知识——向量的内积 .....	78
5.2 方阵的特征值与特征向量 .....	81
习题 5.2 .....	83
5.3 相似矩阵 .....	84
习题 5.3 .....	88
5.4 实对称矩阵的相似矩阵 .....	88
习题 5.4 .....	91
5.5 二次型及其标准形 .....	91
习题 5.5 .....	96
5.6 正定二次型 .....	96
习题 5.6 .....	98
<b>第 6 章 线性经济模型简介</b> .....	<b>99</b>
6.1 投入产出模型 .....	99
习题 6.1 .....	106
6.2 线性规划问题 .....	107
习题 6.2 .....	113
6.3 图解法及线性规划问题解的性质 .....	115
习题 6.3 .....	118
6.4 单纯形法 .....	118
习题 6.4 .....	129
<b>习题答案</b> .....	<b>130</b>
<b>参考文献</b> .....	<b>140</b>

# 第1章 行列式

在许多实际问题中，人们常常会碰到求解线性方程组的问题。在初等数学中，已经讨论过二元、三元线性方程组的解法。这里我们首先给出二阶、三阶行列式的概念，并利用它们求解二元、三元线性方程组。为研究  $n$  元线性方程组，进一步把二、三阶行列式的概念推广到  $n$  阶，讨论  $n$  阶行列式的概念、性质与计算。

## 1.1 二阶、三阶行列式

为引入二阶行列式的概念，先利用消元法求解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

假设  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 。为今后讨论的方便，这里介绍一下记号，用  $x_i$  表示第  $i$  个未知量； $a_{ij}$  是双下标变量，表示在方程组 (1.1) 中第  $i$  个方程第  $j$  个未知量的系数。

在方程组 (1.1) 中，第一个方程的两边同乘以  $a_{22}$ ，第二个方程的两边同乘以  $-a_{12}$ ，得方程组

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}b_1 \\ -a_{21}a_{12}x_1 - a_{22}a_{12}x_2 = -a_{12}b_2 \end{cases}$$

将两方程式相加得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

于是

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

同样可得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (1.2)$$

利用二阶行列式表示上述二元线性方程组的解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases} \quad (1.3)$$

这样, 当  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  时, 式 (1.3) 成为方程组 (1.1) 解的公式. 在式

(1.3) 中,  $x_1$ 、 $x_2$  的分母都是行列式  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ , 它是方程组 (1.1) 中未知数的系数按原顺序排成的一个行列式, 今后也称它为方程组 (1.1) 的系数行列式.

$x_1$  的分子是  $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ , 它的第一列是方程组 (1.1) 的右边常数形成的列, 也

就是说  $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$  是用方程组的常数列换取系数行列式中的第一列得到的行列式; 同样  $x_2$  的分子行列式为用常数列换取系数行列式中的第二列得到的行列式.

**例 1** 求解二元一次方程组.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 11 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

**解**

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 4 \times 1 = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 11 \times 2 - 4 \times 5 = 2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 1 \times 11 = 4$$

所以,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ .

从例 1 可以看出, 利用二阶行列式表示二元线性方程组的解非常方便, 所以希望从三元一次方程组的求解中也能找出一些规律来. 对下面形式的三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1.4)$$



仍采用消元法求得

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$$

时的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + b_3 a_{12} a_{23} + b_2 a_{13} a_{32} - b_3 a_{13} a_{22} - b_2 a_{12} a_{33} - b_1 a_{23} a_{32}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}} \\ x_2 = \frac{b_2 a_{11} a_{33} + b_3 a_{13} a_{21} + b_1 a_{23} a_{31} - b_3 a_{11} a_{23} - b_2 a_{13} a_{31} - b_1 a_{21} a_{33}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}} \\ x_3 = \frac{b_1 a_{21} a_{32} + b_3 a_{11} a_{22} + b_2 a_{12} a_{31} - b_3 a_{12} a_{21} - b_2 a_{11} a_{32} - b_1 a_{22} a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}} \end{cases}$$

为表示  $x_1$ 、 $x_2$  和  $x_3$  的方便, 引进三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{则有 } x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

显然,  $D$  仍是式 (1.4) 中方程组系数按原顺序排列形成的三阶行列式, 仍称为系数行列式;  $D_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 是用方程组 (1.4) 的常数列换取系数行列式中的第  $i$  列所得的行列式.

**例 2** 求解线性方程组.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 14 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 14 \end{vmatrix} = -9$$

所以，方程组的解为  $x_1=2$ ,  $x_2=1$ ,  $x_3=3$ .

可以看出，对于二元、三元线性方程组来说，在引入了二阶、三阶行列式的概念后，当系数行列式非零时，它们的解都可以用公式表示。求解时先求系数行列式  $D$ ，再求用常数列换取  $D$  中第  $i$  列后所得的行列式  $D_i$ ，用  $D_i$  除以  $D$  即得  $x_i$ ，这种方法是否可以推广到  $n$  元线性方程组的解法中去呢？为此，我们将引入  $n$  阶行列式的概念，在引入  $n$  阶行列式之前，我们还需要作一些准备工作，先讨论一下排列与逆序数。

### 习题 1.1

1. 计算下列行列式。

$$(1) \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} -4 & 6 & 10 \\ -7 & 9 & 0 \\ 7 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

2. 利用二、三阶行列式求解下列方程组。

$$(1) \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 = 9 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

## 1.2 排列的逆序数及对换

在初等数学中已经讨论过把  $n$  个不同元素排成一列的排法共有  $n!$  种。每一种排法叫这  $n$  个元素的一个全排列。可以规定各元素之间有一种标准次序（例如： $n$  个不同自然数，可以规定由小到大的次序为标准次序）。一个排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，即说有 1 个逆序，一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数。逆序数为奇数的排列叫奇排列，逆序数为偶数的排列叫偶排列。

如果一个排列中，排在元素  $p_i$  前且比  $p_i$  大的元素个数有  $t_i$  个，则称  $p_i$  这个元素的逆序数为  $t_i$ 。这样，求一个排列的逆序数也就是求出每个元素的逆序数再求和。而求每个元素的逆序数仅需求出排在这个元素前面而且比这个元素大的元素的个数即可。

例 3 求排列 5 4 1 3 2 的逆序数。

解 5 在首位，逆序数为 0；

排在 4 前面且比 4 大的数有一个，即 5，故逆序数为 1；

排在 1 前面且比 1 大的数有两个, 即 5, 4, 故逆序数为 2;

排在 3 前面且比 3 大的数有两个, 即 5, 4, 故逆序数为 2;

排在 2 前面且比 2 大的数有三个, 即 5, 4, 3, 故逆序数为 3.

于是, 排列的逆序数为  $0+1+2+2+3=8$ , 此排列是偶排列.

在一个排列中, 任意对调两个元素的位置, 保持其余元素的位置不动得到新排列的过程叫对换. 将二相邻元素交换位置的对换叫相邻对换.

**定理 1.1** 对一个排列中的任意两个元素作对换, 排列改变奇偶性.

**证明** 先考虑作相邻对换的情况. 假如这两个相邻元素为  $A, B$ , 对换后变为  $B, A$ . 它们相对于别的元素的逆序数不会改变, 所以, 若  $A > B$ , 变为  $BA$  后逆序总数减少 1; 若  $A < B$ , 变为  $BA$  后逆序总数增加 1. 因此作相邻对换后的逆序数是原排列逆序数增 1 或减 1, 故奇偶性必然改变.

下面考虑非相邻对换情况. 若将  $Ap_1p_2\cdots p_lB$  换为  $Bp_1p_2\cdots p_lA$ , 我们可以将这种对换变为与之等价的一系列相邻对换. 事实上, 可以利用  $A$  与  $p_1$  对换, 再与  $p_2$  对换,  $\cdots$ , 与  $p_l$  对换, 最后与  $B$  对换, 成为  $p_1p_2\cdots p_lBA$ , 共作了  $l+1$  次相邻对换; 让  $B$  与  $p_l$  对换,  $\cdots$ , 与  $p_2$  对换, 直至与  $p_1$  对换, 共作  $l$  次相邻对换后  $p_1p_2\cdots p_lBA$  变为  $Bp_1p_2\cdots p_lA$ . 所以, 从  $Ap_1p_2\cdots p_lB$  变为  $Bp_1p_2\cdots p_lA$  共需作  $2l+1$  次相邻对换, 所以奇偶性与原排列相反.

**推论** 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数, 偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

**证明** 由定理知, 一个排列对换奇数次, 排列的奇偶性改变, 否则奇偶性不变. 再注意到标准次序排列为偶排列即可.

## 习题 1.2

1. 以自然数从小到大为标准顺序, 求下列各排列的逆序数.

(1) 4 1 5 3 2

(2) 1 3  $\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$

2. 把排列 5 4 1 3 2 作一次对换变为 2 4 1 3 5, 问相当于作几次相邻对换? 把排列 1 2 3 4 5 作偶数次对换后所得的新排列是奇排列还是偶排列?

## 1.3 $n$ 阶行列式

在将二、三阶行列式推广到  $n$  阶行列式之前, 我们先研究一下三阶行列式的定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1.5)$$

在上式中, 先不考虑正负号, 右端的每一项都为三个元素的乘积. 这三个元素来自于不同的行不同的列. 所以, 任意一项中第一个下标 (行标) 按标准顺序排列为

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

第二个下标 (列标) 排列为  $p_1p_2p_3$ , 是 1, 2, 3 三个数的某一个全排列. 这样的排列共有 6 种, 恰好对应式 (1.5) 中右边的 6 项. 另外, 各项的正负符号对应列标的排列为:

带正号的三项的列标排列为 123, 231, 312;

带负号的三项的列标排列为 132, 213, 321.

可以看出, 带正号的三项的列标排列均为偶排列, 带负号三项的列标排列均为奇排列. 如果用  $t$  表示每一项的列标排列的逆序数, 则各项所带符号可以表示为  $(-1)^t$ . 所以, 三阶行列式又可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

这里  $t$  为排列  $p_1p_2p_3$  的逆序数,  $\sum$  是关于 1, 2, 3 的所有全排列  $p_1p_2p_3$  求和, 共有 3! 项.

再看一下二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2}, \text{ 其中 } t \text{ 为排列 } p_1p_2 \text{ 的}$$

逆序数,  $\sum$  为对 1, 2 的所有全排列  $p_1p_2$  求和, 共有 2 项. 由此, 我们把二、三阶行列式的概念推广到  $n$  阶行列式情形.

**定义 1.1**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中  $t$  为排列  $p_1p_2 \cdots p_n$  的逆序数,  $p_1p_2 \cdots p_n$  为 1, 2,  $\cdots$ ,  $n$  的全排列,  $\sum$  为关于 1, 2,  $\cdots$ ,  $n$  的所有全排列取和, 共有  $n!$  项.  $a_{ij}$  是  $D$  的第  $i$  行第  $j$  列位置上的元素.

**例 4** 计算三角行列式.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由定义知,  $D$  的  $n!$  项中的每一项可以表示为

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

但从  $D$  的形式可以看出, 当  $i < j$  时有

$$a_{ij} = 0$$

所以, 在  $n!$  项中, 可能不为零的项必有

$$1 \geq p_1, 2 \geq p_2, \cdots, n \geq p_n$$

满足此条件的  $1, 2, \cdots, n$  的全排列只有  $123 \cdots n$ . 所以, 在  $n!$  项中, 最后只有一项可能不为零, 即

$$(-1)^t a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

注意到排列  $123 \cdots n$  是偶排列,  $t = 0$ . 所以,

$$D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

由此可知

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

例 5 计算行列式.

$$D = \begin{vmatrix} & & & & \lambda_1 \\ & & & & \\ & & & & \lambda_2 \\ & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

解 取  $\lambda_i = a_{i, n-i+1}$ , 则有

$$\text{原式} = (-1)^t a_{1n} a_{2, n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^t \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

其中,  $t$  为排列  $n(n-1) \cdots 21$  的逆序数

$$t = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

从而

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

例 6 证明  $n$  阶行列式也可以如下定义:

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

其中  $t$  为行标排列  $p_1 p_2 \cdots p_n$  的逆序数,  $\sum$  为关于  $1, 2, \dots, n$  的所有全排列取和.

**证明** 行列式定义为

$$D_1 = \sum (-1)^t a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$$

我们必须证明  $D_1 = \sum (-1)^t a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$  中每一项恰好对应  $D$  中每一项, 且  $D$  中每一项恰好对应  $D_1$  中每一项. 事实上,  $D_1$  与  $D$  中分别都有  $n!$  项, 仅说明  $D_1$  中每一项恰好对应  $D$  中每一项. 对  $D_1$  中一项

$$(-1)^t a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$$

我们交换顺序使其列标排列成为标准顺序 (逆序数为零), 同时, 行标由标准顺序化为了排列  $q_1 q_2 \cdots q_n$ , 根据对换定理推论知道排列  $p_1 \cdots p_n$  与排列  $q_1 \cdots q_n$  有相同的奇偶性. 若用  $s$  表示排列  $q_1 \cdots q_n$  的逆序数, 则有

$$(-1)^t a_{1 p_1} \cdots a_{n p_n} = (-1)^s a_{q_1 1} \cdots a_{q_n n}.$$

### 习题 1.3

1. 写出四阶行列式中含有因子  $a_{22} a_{33}$  的项.
2. 用行列式定义计算.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

### 1.4 行列式的性质

从  $n$  阶行列式的定义来看, 除了特殊的行列式外, 利用定义计算行列式是非常复杂的. 为此, 下面讨论行列式的性质.

我们把一个行列式的所有行变成对应的列后所得到的行列式称为原行列式的转置行列式, 记为  $D^T$  或  $D'$ .

$$\text{例如设 } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \text{ 则 } D^T = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

由此可以看出,  $D$  中第  $i$  行第  $j$  列位置上的元素与  $D^T$  中第  $j$  行第  $i$  列位置上的元素相等.

**性质 1** 行列式与它的转置行列式相等.

**证明** 设  $D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$ , 则  $a_{ij} = b_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$

所以

$$D^T = \sum (-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

右边是行列式  $D$  的另一种定义形式.

这个性质说明, 行列式转置后值不变, 所以, 行具有的性质列同样具有, 列具有的性质行也同样具有.

**性质 2** 互换行列式两行 (列) 后所得行列式与原行列式大小相等, 符号相反.

**证明** 将  $D$  的第  $i$  行与第  $j$  行交换后, 在  $D$  的每一项中的表现为将

$$a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}$$

中的  $a_{ip_i}$  与  $a_{jp_j}$  互换位置变为

$$a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}$$

逆序数由于排列作一次对换改变奇偶性, 从而, 行列式交换两行位置后变号.

今后记交换第  $i, j$  行为  $r_i \leftrightarrow r_j$ , 交换第  $i, j$  列位置为  $c_i \leftrightarrow c_j$ .

**推论** 若行列式中有两行 (列) 完全相同, 则此行列式值为零.

**证明** 一方面, 由性质 2 知, 交换这两相同的两行位置后, 行列式差一个符号; 另一方面, 从形式上看交换两行后行列式不变, 所以有  $D = -D$ , 必有  $D = 0$ .

**性质 3** 行列式中某行 (列) 有公因子可以提到行列式符号外面.

**证明** 设第  $i$  行有公因子  $k$ , 则第  $i$  行上元素可以写成  $ka_{ij} (j = 1, \dots, n)$ , 从而

$$\begin{aligned} D &= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots (ka_{ip_i}) \cdots a_{np_n} \\ &= k \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

**推论** 行列式中如果有两行 (列) 对应成比例, 则此行列式为零.

**证明** 可以将比例因子提到行列式符号外, 则行列式中有两行 (列) 相同, 所以为 0.

**性质 4** 若行列式某行 (列) 各元素都是两数之和, 如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则  $D$  可以写成如下两行列式相加的形式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

事实上,

$$\begin{aligned} D &= \sum (-1)^{t_{a_{1p_1}}} \cdots (a_{ip_i} + b_{ip_i}) \cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^{t_{a_{1p_1}}} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} + \sum (-1)^{t_{a_{1p_1}}} \cdots b_{ip_i} \cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

**性质 5** 把行列式的某行(列)各元素乘以一个常数  $k$  加到另一行(列)对应元素上去, 行列式值不变(今后以  $r_i + kr_j$  表示把第  $j$  行各元素乘以  $k$  加在第  $i$  行上, 以  $c_i + kc_j$  表示把第  $j$  列乘以  $k$  加在第  $i$  列上).

**证明** 利用性质 4 即可.

由上节例 4 和行列式性质 1 知上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

利用行列式性质把行列式化为简单形式(如三角形行列式), 即可简化计算.

**例 7** 计算行列式.

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{解 } D = D' = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -D$$

从而

$$D = 0$$

**例 8** 计算行列式.



$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

解 原式

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 + (-2)r_1 \\ r_4 + (-3)r_1 \end{array}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -12 & 2 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{r_3 + (1)r_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & -1 & -11 & 1 \\ 0 & -4 & -12 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & -4 & -12 & 2 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{r_4 + (-4)r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 32 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 + (\frac{32}{7})r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{146}{7} \end{vmatrix} = 146 \end{aligned}$$

例 9 计算  $D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$  ( $D$  为  $n$  阶行列式).

解 原式

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\begin{array}{l} c_1 + (1)c_2 \\ \vdots \\ c_1 + (1)c_n \end{array}} \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\ & = (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \end{aligned}$$