测定面积的方法及精度

A.B. 馬斯洛夫 著

测 绘 出 版 社

測定面积的方法及精度

A.B. 馬斯洛夫 著

蔣夏林 王兆彬 譯

燕 香 江 校

測繪出版社

1960·北京

А. В. МАСЛОВ

СПОСОБЫ и ТОЧНОСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ

ГЕОДЕЗИЗДАТ МОСКВА 1955

本書采根据苏联 A.B. 馬斯洛夫所著“测定面积的方法及精度”一書譯出。原書由苏联测繪出版社1955年于莫斯科出版。

書中詳尽地介紹了实地及图上测定地区面积的各种方法，并根据实地测量誤差、制图誤差以及图上测定面积的誤差，对各种方法测定面积之精度作了精辟的分析。

本書第一至三章由蔣夏林同志譯出，第四至六章由王兆彬同志譯出，全書由蔣杏江同志审校。

本書可供土地勘测設計人員、农学院师生及研究人員参考。

测定面积的方法及精度

著者　A. B. 馬斯洛夫

譯者　蔣夏林、王兆彬

出版者　测繪出版社
北京西四羊市大街地質部内
北京市書刊出版業營業許可証出字第081号

发行者　新华書店科技发行所

經售者　各地新华書店

印刷者　地質出版社印刷厂
北京安定門外六鋪炕40号

印数(京)1—1700册　1960年7月北京第1版

开本850×1168 1/32　1960年7月第1次印刷

字数210 000　印张7 7/8

定价(10)1.00元

目 录

原　序

制訂与土地利用有关的各种計划，研究地区的自然財富，計算和利用土地时都需要测定面积。

实施这些工作时，須測定小地区或大块土地的面积，以及有某种自然或經济特征的諸不邻接地区面积之和。

在有些情况下，只要有关于地区和大片土地面积的概略資料就行了，但在另一些情况下，必須較精确的測定面积，精度甚至須达小数后二位。因此，在知道面积的同时，常須知道測定面积之精度。

按照地区的大小及測定面积所要求之精度，須采用各种不同的方法。面积可根据实地量綫和測角的結果确定，也可以利用表示出了該地区和土地輪廓的各种測图的平面图和地图来測定。

根据实地測量的結果測定面积时，其精度取决于这些測量的質量，而按平面图（或地图）測定面积时，則其精度取决于实地測量（平面图或地图就是根据这些測量結果編制的）的質量，平面图上該地区作图的質量以及平面图上測定面积之精度。

因此，在解决关于面积測定之精度問題时，不仅要考虑到按平面图用某种方法測定面积之誤差，而且要考虑到制图誤差，据以編制平面图的实地測量的誤差。

本書闡述測定面积的各种方法（第一章），并研究測定面积的精度問題（考虑到全部測量誤差）。

本書是作者組織专門試驗和計算作业資料之研究成果。

在第二章里推导出了轉折点个数不同的，已平差的各种形状經緯仪多边形以及与国家大地控制网点連接的多边形面积誤差之計算公式。

第三章和第四章闡述了用某种测图方法所测平面图上繪制經緯仪多边形和个別地区（地物輪廓）之精度問題。不解决这些問題，要想提高图上測定面积之精度，就沒有根据了，因为测图和制图誤差会抵消掉图上測定面积所达到的精度。

在第五章里，用新的方法闡明用定极求积仪測定面积之精度問題。經过試驗检驗过的理論研究結果，使我們能够确定求积仪的校正和使用規則。書中首次导出了用求积透明板測定面积的精度的数学公式。

第六章里，依据实地測量、制图和图上測定面积之誤差，对于用各种方法測定面积之精度作了估算。

由于有些公式过于复杂并且利用这些公式时不得不进行大量的計算，所以，作者为了要得出最簡单和最便于利用的公式，曾采用了測量学上著名的簡略法，例如，假定該地区为有規則的几何形状或为矩形，平行四边形，而且这些公式在作业中可以作为实用公式使用。

希望这本書有助于讀者对測定地区面积之精度有新的了解，在解决与选择測图比例尺、組織和实施測定面积工作的科学研究和生产任务时提供新的資料。

第一章　面积之测定

§1. 测定面积的方法

根据地区的經济意义、面积的大小、图形及长度、地图資料的有无以及地区的地形条件，常采用下列各种方法測量面积：

（1）解析法。用此法測定面积时，面积系按实地量綫及量綫和測角之結果算出，或按所測直綫及角度之函数（图形中点坐标）算出；

（2）图解法。用此法測定面积时，面积系按平面图（地图）上量綫之結果算出；

（3）器械法。用此法測定面积时，系用专門的仪器（求积仪）及其它各种工具（如求积透明板），按平面图求出面积。

上面这几种方法有时混合使用，比如面积計算中一部分直綫数值按平面图求出，而另一部分則自实測結果中取得。还时常有这种情况，即被經緯仪多角导綫（即多边形）所包围的某一地区的主要面积用解析法測定，而多角导綫范围以外和包括在多角导綫与特征地之間的面积，則用图解法或器械法求出。

解析法是最精确的方法，因为用此法測定面积，只有实地測量的誤差，能影响測定面积的精度；而采用图解法及器械法时，除了实地測量的誤差以外，还受編制平面图及按平面图測定面积两种誤差的影响。

但是解析法要求按地区之边界进行量綫及測角和庞大的計算工作量（取决于角度个数的多少）。

如果地区边界角度数量不多（不超过10—15），最好采用解析法。

器械法是精度最差而应用最广的方法，因为利用这种方法可以按平面图迅速而簡单地求出任何形状地区的面积。

地区的边界为折綫形而轉折的次数不多时，宜于采用图解法。

§2. 解析法采用的公式

解析法采用几何、三角及解析几何的公式。这种公式非常多，但是所采用的却极其有限。为了統計建筑物、园地、耕地的面积而在不大的地区测定面积时，要将此地区分成最簡单的几何图形，通常分为三角形、长方形，有时也分成梯形，各图形的面积应用常用的几何公式，由底和高两直綫因素計算求得，而各图形面积之和，即为整个地区之面积[1]。

如果沿地区之边界施測經緯仪导綫，則整个地区或部分地区之面积可用适合于下列各种图形的公式算出（图1）。

三角形（图1，a）按l_1及l_2两条边及其夹角β_2求三角形之面积。

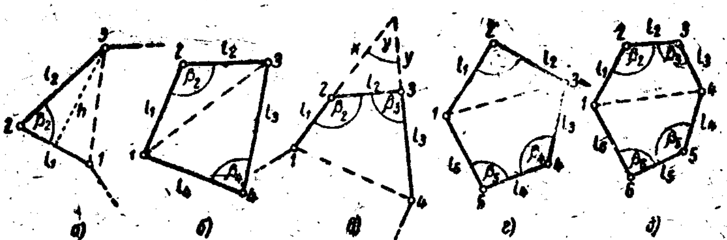

图 1. 地区及計算面积之元素

图1，a表明二倍的面积

$$2P = l_1 h,$$

但

$$h = l_2 \sin \beta_2,$$

所以，

$$2P = l_1 l_2 \sin \beta_2. \tag{1}$$

四边形，已知四边l_1，l_2，l_3，l_4及两个对角β_2及β_4（图1，$б$）

---

[1] 在統計耕作面积、耕地面积及收获面积时，也是按联动机的行程及其耕作的寬度测定。

根据公式（1）得：

$$2P=l_1l_2\sin\beta_2+l_3l_4\sin\beta_4. \qquad (2)$$

根据l_1,l_2,l_3三条边及諸边間所組成之两个夹角β_2及β_3（图1,б）再根据公式（1），得：

$$2P=(l_1+x)(l_3+y)\sin\gamma-xy\sin\gamma=$$
$$=l_1l_3\sin\gamma+l_1y\sin\gamma+l_3x\sin\gamma,$$

但

$$x=\frac{l_2\sin(180-\beta_3)}{\sin\gamma}=\frac{l_2\sin\beta_3}{\sin\gamma},$$

$$y=\frac{l_2\sin(180^\circ-\beta_2)}{\sin\gamma}=\frac{l_2\sin\beta_2}{\sin\gamma},$$

$$\gamma=\beta_2+\beta_3-180^\circ,$$

所以

$$2P=l_1l_2\sin\beta_2+l_2l_3\sin\beta_3+l_1l_3\sin(\beta_2+\beta_3-180^\circ). \quad (3)$$

图形中点坐标如为已知时，三角形及四边形的面积按公式(18)及(19)計算比較方便。

五边形（图1,в）。根据五条边及三个角β_2,β_4,β_5并根据公式（1）及公式（3）得：

$$2P=l_1l_2\sin\beta_2+l_3l_4\sin\beta_4+l_4l_5\sin\beta_5+$$
$$+l_3l_5\sin(\beta_4+\beta_5-180^\circ). \qquad (4)$$

六边形（图1,д），根据六条边、四个角$\beta_2,\beta_3,\beta_5,\beta_6$及公式（3）得：

$$2P=l_1l_2\sin\beta_2+l_2l_3\sin\beta_3+l_1l_3\sin(\beta_2+\beta_3-180^\circ)+$$
$$+l_4l_5\sin\beta_5+l_5l_6\sin\beta_6+l_4l_6\sin(\beta_5+\beta_6-180^\circ). \quad (5)$$

公式（1）—（5）的应用，方便的是在多边形概略平差前可以用来計算多边形全部或其部分面积。应用公式（2）、（4）、（5）計算时，可应用其他角度及直綫之組合进行重复計算作为

检查之用，而应用公式（1）及（3）計算时，应由两人分别进行。

公式（1）—（5）表明角的数量增多时，表示面积的公式的项数也同样增多，对于六边形而言，公式（5）已知为六项。計算 n 边形（图2）面积的公式可按下列方式得出。

将多边形的一个角頂(比如第一个角頂)与其它各角頂連接起来，則得出 $n-2$ 个三角形。設以 $l_2, l_3 \cdots\cdots l_{n-1}$ 依次表示各三角形之底，則各三角形之相应高为：

$$h_1 = l_1 \sin\beta_2,$$

$$h_2 = l_1 \sin\gamma + l_2 \sin\beta_3 = l_1 \sin(\beta_2 + \beta_3 - 180°) + l_2 \sin\beta_3.$$

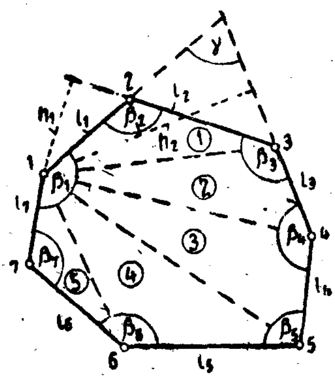

图 2. 按角及边测定多边形之面积

繼續得出：

$$h_3 = l_1 \sin(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 - 360°) + \\ + l_2 \sin(\beta_3 + \beta_4 - 180°) + l_3 \sin\beta_4.$$

同样

$$h_4 = l_1 \sin(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 - 540°) + l_2 \sin(\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 - \\ - 360°) + l_3 \sin(\beta_4 + \beta_5 - 180°) + l_4 \sin\beta_5,$$

$$h_5 = l_1 \sin(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 - 720°) + l_2 \sin(\beta_3 + \\ + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 - 540°) + l_3 \sin(\beta_4 + \beta_5 + \beta_6 - 360°) +$$

$$+l_4\sin(\beta_5+\beta_6-180^\circ)-l_5\sin\beta_6$$

……………………………………………………………………

于是，图 2 各三角形二倍之面积得出：

$$2p_1=l_1l_2\sin\beta_2,$$

$$2p_2=l_2l_3\sin\beta_3+l_1l_3\sin(\beta_2+\beta_3-180^\circ),$$

$$2p_3=l_3l_4\sin\beta_4+l_2l_4\sin(\beta_3+\beta_4-180^\circ)+$$
$$+l_1l_4\sin(\beta_2+\beta_3+\beta_4-2\cdot180^\circ),$$

$$2p_4=l_4l_5\sin\beta_5+l_3l_5\sin(\beta_4+\beta_5-180^\circ)+l_2l_5\sin(\beta_3+\beta_4+$$
$$+\beta_5-2\cdot180^\circ)+l_1l_5\sin(\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5-3\cdot180^\circ),$$

$$2p_5=l_5l_6\sin\beta_6+l_4l_6\sin(\beta_5+\beta_6-180^\circ)+l_3l_6\sin(\beta_4+$$
$$+\beta_5+\beta_6-2\cdot180^\circ)+l_2l_6\sin(\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6-3\cdot180^\circ)+$$
$$l_1l_6\sin(\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6-4\cdot180^\circ).$$

将各等式相加，得出 n 边形之面积：

$$2P'=l_1l_2\sin\beta_2+l_2l_3\sin\beta_3+\cdots\cdots+l_{n-2}l_{n-1}\sin\beta_{n-1}+$$
$$+l_1l_3\sin(\beta_2+\beta_3-180^\circ)+l_2l_4\sin(\beta_3+\beta_4-180^\circ)+$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+l_{n-3}l_{n-1}\sin(\beta_{n-2}+\beta_{n-1}-180^\circ)+$$
$$+l_1l_4\sin(\beta_2+\beta_3+\beta_4-2\cdot180^\circ)+l_2l_5\sin(\beta_3+\beta_4+\beta_5-2\cdot$$
$$\cdot180^\circ)+\cdots+l_{n-4}l_{n-1}\sin(\beta_{n-3}+\beta_{n-2}+\beta_{n-1}+2\cdot180^\circ)+$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$$
$$+l_1l_{n-1}\sin\{\beta_2+\beta_3+\cdots\cdots+\beta_{n-1}-180^\circ(n-3)\}. \quad (6)'$$

必須指出，图 1,6 用的公式（3）是公式（6）′的个别情况。

公式（11）或（12）經过一系列的换算以后，可以得出公式（6）′。

在公式（6）′中，完全不包括 β_1 和 β_7 两个角及其夹边 l_7。为了得出均匀地包括多边形各角及各边的公式，依次将各角頂与其余各角頂連接，可以写出 n 边形面积的 n 个公式。如果 n 边形由第二个角頂用直綫連接其余角頂而分成諸三角形时，則

$$2P''=l_2l_3\sin\beta_3+l_3l_4\sin\beta_4+\cdots\cdots+l_{n-1}l_n\sin\beta_n+$$
$$+l_2l_4\sin(\beta_3+\beta_4-180^\circ)+l_3l_5\sin(\beta_4+\beta_5-180^\circ)+$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+l_{n-2}l_n\sin(\beta_{n-1}+\beta_n-180^\circ)+$$
$$+l_2l_5\sin(\beta_3+\beta_4+\beta_5-2\cdot180^\circ)+l_3l_6\sin(\beta_4+\beta_5+\beta_6-2\cdot$$
$$\cdot180^\circ)+\cdots\cdots+l_{n-3}l_n\sin(\beta_{n-2}+\beta_{n-1}+\beta_n-2\cdot180^\circ)+$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$$
$$+l_2l_n\sin\{\beta_3+\beta_4+\cdots\cdots+\beta_n-180^\circ(n-3)\},\qquad(6)''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

如果直綫由第 n 个角項連接其余各角項，则

$$2P^{(n)}=l_nl_1\sin\beta_1+l_1l_2\sin\beta_2+\cdots\cdots+l_{n-3}l_{n-2}\sin\beta_{n-2}+$$
$$+l_nl_2\sin(\beta_1+\beta_2+180^\circ)+l_1l_3\sin(\beta_2+\beta_3-180^\circ)+$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+l_{n-4}l_{n-2}\sin(\beta_{n-3}+\beta_{n-2}-180^\circ)+$$
$$+l_nl_3\sin(\beta_1+\beta_2+\beta_3-2\cdot180^\circ)+l_1l_4\sin(\beta_2+\beta_3+\beta_4-2\cdot$$
$$\cdot180^\circ)+\cdots+l_{n-5}l_{n-2}\sin(\beta_{n-4}+\beta_{n-3}+\beta_{n-2}-2\cdot180^\circ)+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+l_nl_{n-2}\sin\{\beta_1+\beta_2+\cdots\cdots+\beta_{n-3}+\beta_{n-2}-180^\circ(n-3)\}.\ (6)^{(n)}$$

如果多边形已概略平差，即图形内所有几何条件均已达到，则$2P'$，$2P''\cdots\cdots2P^{(n)}$之値应彼此相等，所以将它們相加，即得$2nP$。

相加时須注意，在相加的各項中有数値相等而符号相反的对应項，因此，各項之和等于零。各項边之乘积相等，而角度之和互为补角，直到得出多边形角度之总和为止，例如：

$$l_{n-1}l_1\sin(\beta_n+\beta_1-180^\circ)+l_1l_{n-1}\sin\{\beta_2+\beta_3+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\beta_{n-1}-180^\circ(n-3)\}=0,$$
$$l_nl_3\sin(\beta_1+\beta_2+\beta_3-360^\circ)+l_3l_n\sin\{\beta_4+\beta_5+\cdots\cdots$$
$$+\beta_n-180^\circ(n-4)\}=0,$$

依次类推。

于是

$$2nP=(n-2)\sum_1^n l_kl_{k+1}\sin\beta_{k+1}+$$
$$+(n-4)\sum_1^n l_kl_{k+2}\sin(\beta_{k+1}+\beta_{k+2}-180^\circ)+$$

$$+(n-6)\sum_{1}^{n} l_k l_{k+3} \sin(\beta_{k+1}+\beta_{k+2}+\beta_{k+3}-2\cdot 180^\circ)+$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+$$

$$+(n-2i)\sum_{1}^{n} l_k l_{k+i} \sin\{\beta_{k+1}+\beta_{k+2}+\cdots\cdots+\beta_{k+i}-$$

$$-180^\circ(i-1)\}. \qquad (7)$$

式中i相当于总和$\sum\limits_{1}^{n}$的顺序編号。当n为偶数时，它的最大值为$\frac{n-2}{2}$，当n为奇数时，其最大値为$\frac{n-1}{2}$，因此，当n为偶数时，系数$(n-2i)$在最后的总和中将等于2，而当n为奇数时，则等于1。

还可能有其它的表示式及换算法以求得公式（7）[1]之形式。

公式（6）及公式（7）非常麻煩，因此計算面积时并不采用。

如果多边形的角数超过六个，則其面积按角頂的坐标或多边形平差后的坐标增量可以迅速得出，而且有很好的检查。

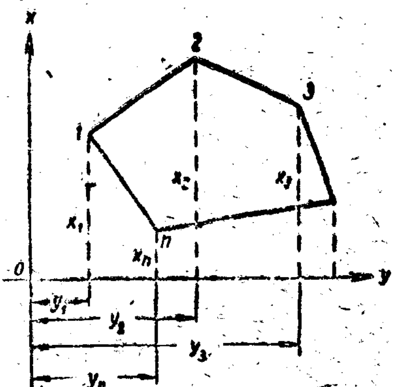

图3．按多边形各項点坐标测定多边形之面积

現在我們写出 П.С. 赫列諾夫教授和 В.Н. 干新副教授所提出的根据多边形角頂决定面积的公式所推演的結論（見参考文献〔29〕）。

图（3）表明多边形$1-2-3\cdots\cdots-n$的面积是以$x_1, x_2, \cdots\cdots$为底和以(y_2-y_1)，$(y_3-y_2)\cdots\cdots$为高的n个梯形面积的代数和，因此，多边形之面积可以用下式表示：

---

[1] 見参考文献〔3〕的692頁及〔22〕的9、19頁及〔6〕。

$$2P=\sum_1^n(x_k+x_{k+1})(y_{k+1}-y_k).$$

去括弧

$$2P=\sum_1^n(x_ky_{k+1}-x_ky_k+x_{k+1}y_{k+1}-x_{k+1}y_k)=$$

$$=\sum_1^n(x_ky_{k+1}-x_{k+1}y_k)+\sum_1^n(x_{k+1}y_{k+1}-x_ky_k) \qquad (8)$$

考虑到得出的公式中的第二项之和等于零，所以得

$$2P=\sum_1^n x_ky_{k+1}-\sum_1^n x_{k+1}y_k. \qquad (9)$$

由公式（8）及公式（9）可以得出其它公式。由于公式（8）中$\sum_1^n x_{k+1}y_{k+1}=\sum_1^n x_ky_k$，所以可以把它写成如下形式：

$$2P=\sum_1^n(x_ky_{k+1}-x_ky_k-x_{k+1}y_k+x_ky_k)=$$

$$=\sum_1^n\{x_k(y_{k+1}-y_k)-y_k(x_{k+1}-x_k)\}.$$

但

$$x_{k+1}-x_k=\Delta x_k,\quad y_{k+1}-y_k=\Delta y_k,$$

所以

$$2P=\sum_1^n x_k\Delta y_k-\sum_1^n y_k\Delta x_k. \qquad (10)$$

其次，因为

$$\sum_1^n x_{k+1}y_k=\sum_1^n x_ky_{k-1},$$

所以，由公式（9）得出已知的公式

$$2P=\sum_1^n x_k(y_{k+1}-y_{k-1}). \qquad (11)$$

同样可以得出下列公式

$$2P=\sum_{1}^{n} y_k(x_{k-1}-x_{k+1}).\tag{12}$$

公式（11）及（12）中的坐标差可以用坐标增量之和代替，于是（見〔30〕），

$$2P=\sum_{1}^{n} x_k(\Delta y_{k-1}+\Delta y_k).\tag{13}$$

同样

$$2P=-\sum_{1}^{n} y_k(\Delta x_{k-1}+\Delta x_k).\tag{14}$$

由公式（13）直接推出下列公式

$$2P=\sum_{1}^{n} x_k\Delta y_k+\sum_{1}^{n} x_{k+1}\Delta y_k,\tag{15}$$

此公式及公式（10）即为Л.С.赫列諾夫教授和В.Н.干新副教授得出的公式（見〔29〕）。

公式（15）可以写成这样的形式：

$$2P=\sum_{1}^{n}\Delta y_k(x_k+x_{k+1});$$

但

$$x_k+x_{k+1}=2x_k+\Delta x_k,$$

所以

$$2P=\sum_{1}^{n}\Delta y_k(2x_k+\Delta x_k)=\sum_{1}^{n}\Delta y_k\Delta x_k+2\sum_{1}^{n}x_k\Delta y_k$$

或

$$P=\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\Delta x_k\Delta y_k+\sum_{1}^{n}\Delta y_k x_k,\tag{16}$$

同样

$$-P=\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\Delta x_k\Delta y_k+\sum_{1}^{n}\Delta x_k y_k.\tag{17}$$

公式（16）及（17）是Е.И.奥利霍夫斯基副教授得出的（見〔21〕）。

按公式（11）很容易得出按中点坐标計算三角形及四边形面

积的簡便公式。

比如計算三角形（图1,a）面积，按公式（11）得

$$2P=x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2).$$

同时加减乘积$x_2(y_2-y_3)$，再进行相应的演算，則得

$$2P=x_1(y_2-y_3)-x_2(y_2-y_3)+x_2y_2-x_2y_3+x_2y_3-$$
$$-x_2y_1+x_3(y_1-y_2)=(y_2-y_3)(x_1-x_2)+$$
$$+x_2(y_2-y_1)+x_3(y_1-y_2)$$

及

$$2P=(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(y_1-y_2)(x_2-x_3). \quad (18)$$

按公式（11）求四边形（图1,б,в）之面积得

$$2P=x_1(y_2-y_4)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_1-y_3),$$

由此

$$2P=(x_1-x_3)(y_2-y_4)-(y_1-y_3)(x_2-x_4). \quad (19)$$

§3. 解析法計算面积的方法

用手搖計算机及其它半自动及自动計算机計算面积时，应用解析法最为方便。計算的数量不多时，可用对数的方法計算。

因为边长通常用五位及四位有效数字表示（如352.8米），所以用对数法及非对数法計算时，利用五位对数表或五位自然三角函数表已足够应用。

我們以多边形中的一个四边形作例子来計算面积（图1中的в），表1系由坐标明細表中摘录出此四边形之坐标。

三个因子（及三个因子以上）的乘积，可以用带有累积計算装置及专門的鍵子的自动計算机（如自动計算机P-38 CM）計算（无中間記录）。

按坐标計算面积而不作中間記录也可以利用手搖計算机或自动及半自动計算机。为了这个目的，就要将第一个乘积的因子