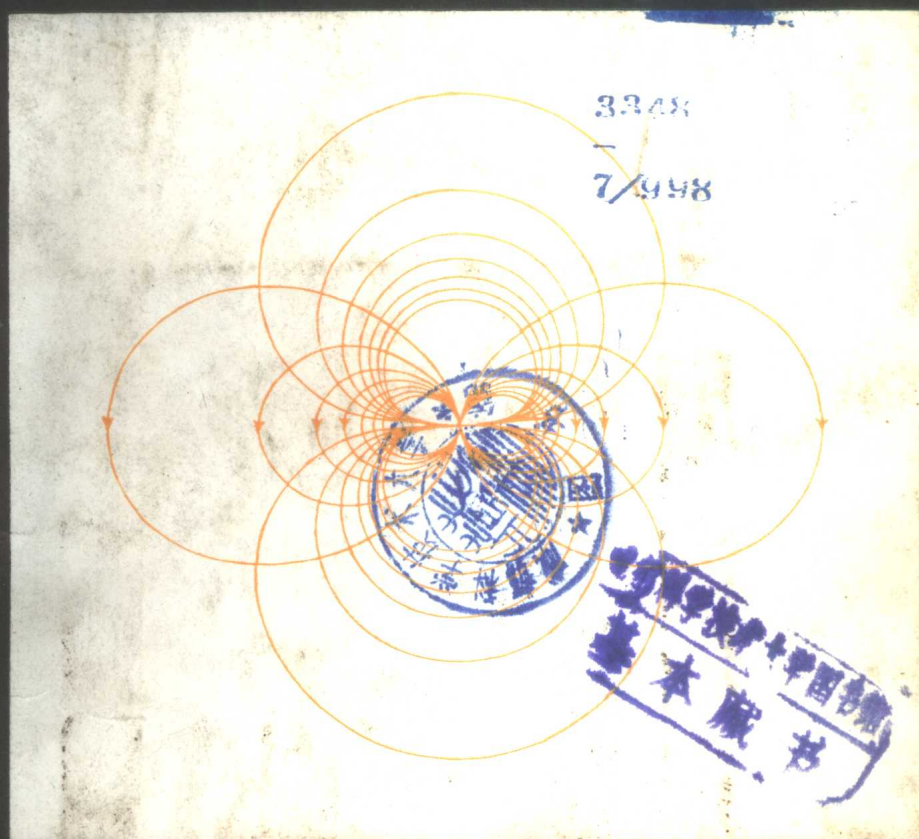


电磁场与电磁波 解题指南

[美] P. 劳兰 编

程庆祥 王义民 译



高等教育出版社

48

998

电磁场与电磁波 解题指南

[美] P. 劳 兰 编
程庆祥 王义民 译

高等教育出版社

电磁场与电磁波解题指南

[美] P. 劳兰 编

程庆祥 王义民 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民邮电出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 12 字数 274 000

1987 年 5 月第 1 版 1987 年 5 月第 1 次印刷

印数 00 001—7,630

书号 15010·0747 定价 2.30 元

译者前言

P. 劳兰是加拿大蒙特利尔大学的知名物理教授, 他和美国康乃尔大学的D. R. 考森教授合著的两部电磁学著作《电磁场与电磁波》(中译本由高等教育出版社 1980 年出版)及《电磁学原理与应用》(中译本由安徽教育出版社 1984 年出版), 不但在北美和欧洲颇为流传, 也深受我国读者的欢迎和好评。1984 年夏天劳兰教授又将他亲自编解的《电磁场与电磁波: 解题指南》一书的英文版寄赠给我们, 并支持我们译成中文供我国大学生在学习电磁场理论时参考。正如劳兰教授在《电磁学原理与应用》一书的中译本前言中所说的, 他和考森教授都为他们的著作能与广大中国读者见面感到莫大光荣。

这本指南是为了配合《电磁场与电磁波》(中译本由陈成钧同志翻译, 以后引用此书时简称陈译本)一书的学习而编写的。作者从原书 400 多道习题中挑选了约 180 道比较典型而又有一定难度的习题, 逐一作了详解; 其中很大一部分是某一电磁公式或结论的证明题。这对于学生掌握电动力学的原理和规律有很大帮助, 有助于提高学生分析和解决电磁理论问题的能力。

作者对精心挑选的每道习题都重新作了审核, 对有些习题做了修订, 少数习题完全改写。遇到这种情况, 我们都以加译者注的方式指出与陈译本的不同之处。对题解中的个别疏漏之处, 我们在翻译时也作了补充。但由于脱稿匆忙, 加之水平所限, 若还有未尽之处, 谨请读者在使用时指正。

本书的 1~4 章和 7~9 章由安徽工学院程庆祥翻译, 5~6 章和 10~14 章由合肥工业大学王义民翻译。全书插图由若水绘底图, 薛凌绘墨线图, 在此深表感谢。

目 录

第一章	矢量	1
第二章	静电场 I: 真空中的静电场	4
第三章	静电场 II: 电 介 质	20
第四章	静电场 III: 解拉普拉斯方程和泊松方程的普遍方法	32
第五章	相对论 I: 基本 概念	53
第六章	相对论 II: 运动电荷 的电场和磁场	66
第七章	磁场 I: 稳恒电流和非磁性物质	78
第八章	磁场 II: 感生电动势和磁能量	93
第九章	磁场 III: 磁性物质	115
第十章	麦克斯韦方程组	126
第十一章	电磁波的传播 I: 无限介质 中的平面波	134
第十二章	电磁波的传播 II: 反射和折射	150
第十三章	电磁波的传播 III: 导波	164
第十四章	电磁波的辐射	174

第一章 矢 量

1-16 只要 A 是一个常矢量, 就可以推测出 $\nabla \cdot (A \times r/r^3)$ 恒等于零。对不对?

解
$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{A_y z - y A_z}{r^3} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{A_z x - z A_x}{r^3} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{A_x y - x A_y}{r^3} \right] \\ &= [A_y z - y A_z] \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r^3} \right] + [A_z x - z A_x] \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{r^3} \right] + [A_x y - x A_y] \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r^3} \right] \\ &= [A_y z - y A_z] (-3) \frac{1}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} + [A_z x - z A_x] (-3) \frac{1}{r^4} \frac{\partial r}{\partial y} + [A_x y - x A_y] (-3) \frac{1}{r^4} \frac{\partial r}{\partial z} \\ &= [A_y z - y A_z] \left[-\frac{3x}{r^5} \right] + [A_z x - z A_x] \left[-\frac{3y}{r^5} \right] + [A_x y - x A_y] \left[-\frac{3z}{r^5} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

可见, 原题的说法是正确的。

1-21 在笛卡尔坐标中, 证明:

$$\nabla \cdot (\nabla^2 A) = \nabla^2 (\nabla \cdot A)$$

证

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla^2 A) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] A_x \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] A_y \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] A_z \\ \nabla^2 (\nabla \cdot A) &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \\ &= \nabla \cdot (\nabla^2 A) \end{aligned}$$

1-22 通过对 r 的适当表达式进行微分, 证明速度 $\dot{r}$ 在圆柱坐标系中是

$$\dot{\rho} \rho_1 + \rho \dot{\phi} \phi_1 + \dot{z} z_1$$

而在球坐标系中是

$$\dot{r} r_1 + r \dot{\theta} \theta_1 + r \sin \theta \dot{\phi} \phi_1$$

证

(i) 在圆柱坐标系中:

$$\begin{aligned} r &= \rho \rho_1 + z z_1 \\ \dot{\rho}_1 &= \dot{\phi} \phi_1; \dot{\phi}_1 = -\dot{\phi} \rho_1; \dot{z}_1 = 0 \\ \therefore \dot{r} &= \dot{\rho} \rho_1 + \rho \dot{\phi} \phi_1 + \dot{z} z_1 \end{aligned}$$

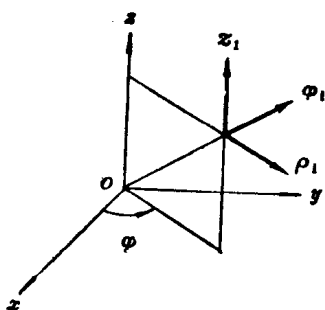


图 1-22(a)

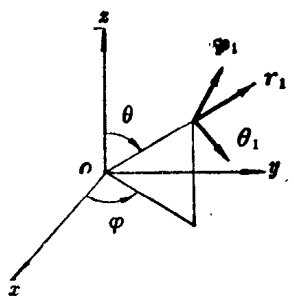


图 1-22(b)

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\rho_1 + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\phi_1 + \ddot{z}z_1$$

(ii) 在球坐标系中

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\mathbf{r}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_1 &= \dot{\theta}\theta_1 + \sin\theta\dot{\phi}\phi_1 \\ \dot{\theta}_1 &= -\dot{\theta}\mathbf{r}_1 + \dot{\phi}\cos\theta\phi_1 \\ \dot{\phi}_1 &= -\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{r}_1 - \dot{\phi}\cos\theta\theta_1 \\ \therefore \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\theta_1 + r\sin\theta\dot{\phi}\phi_1 \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\mathbf{r}_1 \\ &\quad + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\theta_1 \\ &\quad + (2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\cos\theta\dot{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi})\phi_1 \end{aligned}$$

1-29 证明:

$$\int_{\tau} \nabla f d\tau = \int_S f d\mathbf{a}$$

式中 f 是 (x, y, z) 的函数, 而 S 是包围体积 τ 的曲面。

证

将等式两边乘以常矢量 $\mathbf{c}$

$$\int_{\tau} \mathbf{c} \cdot \nabla f d\tau = \int_S f \mathbf{c} \cdot d\mathbf{a}$$

现在

$$\nabla \cdot (f\mathbf{c}) = f(\nabla \cdot \mathbf{c}) + \mathbf{c} \cdot \nabla f$$

由于 $\mathbf{c}$ 与 x, y, z 无关, 故式中 $\nabla \cdot \mathbf{c} \equiv 0$ 。

由散度定理得

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \mathbf{c} \cdot \nabla f d\tau &= \int_{\tau} \nabla \cdot (f\mathbf{c}) d\tau \\ &= \int_S f \mathbf{c} \cdot d\mathbf{a} \end{aligned}$$

1-30 证明:

$$\int_{\tau} (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = - \int_S \mathbf{A} \times d\mathbf{a}$$

式中 $\mathbf{A}$ 为任意矢量, S 为包围体积 τ 的曲面。

证

将等式两边乘以常矢量 $\mathbf{c}$

$$\int_{\tau} \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = - \int_S \mathbf{c} \cdot (\mathbf{A} \times d\mathbf{a})$$

现在

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$$

于是

$$\int_{\tau} \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = \int_{\tau} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{c}) d\tau$$

$$= \int_S \mathbf{A} \times \mathbf{c} \cdot d\mathbf{a}$$

$$= - \int_S \mathbf{c} \cdot \mathbf{A} \times d\mathbf{a}$$

第二章 静电场 I: 真空中的静电场

2-4 一电荷 $+Q$ 位于 $(-a, 0, 0)$ 处, 另一电荷 $-2Q$ 位于 $(a, 0, 0)$ 处, 空间有没有 $E=0$ 的点?

解

根据叠加原理, 合电场 E 为两个电荷的电场的矢量和。所求的点只有在 x 轴上, 它们的场强才可能互相抵消。

在区域 C 内, 位于 x 轴上任意一点的场强为

$$E_C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x+a)^2} - \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0(x-a)^2}$$

同理, 在区域 B 和区域 A 内,

$$E_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x+a)^2} + \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0(x-a)^2}$$

$$E_A = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x+a)^2} + \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0(x-a)^2}$$

在区域 A 和区域 C 内, 若

$$\frac{1}{(x+a)^2} = \frac{2}{(x-a)^2}$$

则

$$E=0$$

由此解得

$$x = (-3 \pm 2\sqrt{2})a$$

因其中一根不在区域 A 或 C 内, 故

$$x = -5.83a$$

在区域 B 内, 要 $E=0$, 只有假设

$$\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{2}{(x-a)^2} = 0$$

但因这个方程式的根是复数, 所以空间 $E=0$ 的地方只有一点, 此点的坐标为

$$x = -5.83a; y=0; z=0.$$

2-6 试证: 由两条平行的、各带有等量而异号的电荷线, 在空间某观察点产生的电势是: $(\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(r_1/r_2)$, 其中 r_1 为观察点到带负电荷线的距离, r_2 为观察点到带正电荷线的距离。

假如你计算的结果成为 $0/0$, 试用其他方法。

证

如图 2-6 所示, 设在 $+a$ 与 $-a$ 处, 各有线电荷密度 $+\lambda C/m$ 和 $-\lambda C/m$ 。则在 $P(x, y)$ 处,

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1}$$

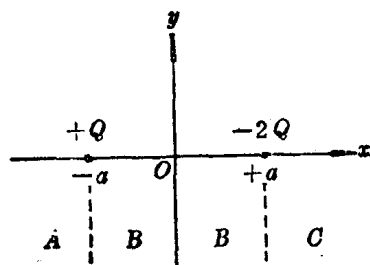


图 2-4

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_1} (\cos\theta_1 \mathbf{i} + \sin\theta_1 \mathbf{j})$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} \mathbf{j} \right]$$

同理可求出 E_2 。

故有

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(x-a)^2 + y^2} [(x-a)\mathbf{i} + y\mathbf{j}] \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x+a)^2 + y^2} [(x+a)\mathbf{i} + y\mathbf{j}] \right\}$$

设在 $x=0$ 平面上, 电势为零。则

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^x \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right] dx$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_0^x \left[\frac{x}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{a}{(x+a)^2 + y^2} + \frac{a}{(x-a)^2 + y^2} \right] dx$$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} \ln r_2^2 - \frac{a}{y} \arctan \frac{x+a}{y} - \frac{1}{2} \ln r_1^2 - \frac{a}{y} \arctan \frac{x-a}{y} \right.$$

$$\left. + \frac{a}{y} \arctan \frac{x+a}{y} + \frac{a}{y} \arctan \frac{x-a}{y} \right]$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

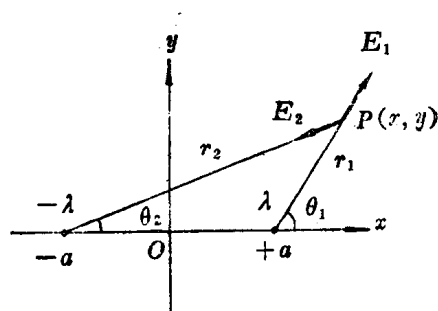


图 2-6

2-9 在一根无限长直线上, 电荷密度按 $\lambda = \lambda_0 / (|x| + k)$ 规律分布, 其中 k 为一正的常数。

(a) 总电荷是否为无穷大*?

(b) 你能否算出在 $x=0$ 处, 与直线相距为 ρ 的某点的电势 V ? 如果算不出, 能否表明它是无穷大*?

解

(a)

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dx = 2\lambda_0 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x+k}$$

$$= 2\lambda_0 [\ln(x+k)]_0^{\infty} \rightarrow \infty$$

(b)

(i)

$$V = 2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda_0 dx}{(x+k) 4\pi\epsilon_0 \sqrt{\rho^2 + x^2}}$$

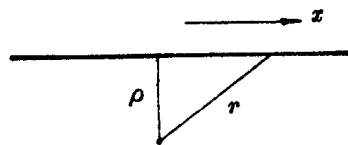


图 2-9

* 陈译本为有限, 按原文应译为无穷大。——译者注

令

$$t = \frac{\lambda_0}{x+k} = \begin{cases} \frac{1}{k} & (x=0) \\ 0 & (x \rightarrow \infty) \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} V &= \frac{-\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \int_{1/k}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-2kt + (\rho^2 + k^2)t^2}} \\ &= \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{1-2kt + (\rho^2 + k^2)t^2}} \\ &= \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + k^2}} \{ \ln [2\sqrt{(\rho^2 + k^2)} [1 - 2kt + (\rho^2 + k^2)t^2]^{1/2} \\ &\quad + 2(\rho^2 + k^2)t - 2k] \} \Big|_0^{1/k} \\ &= \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + k^2}} \ln \frac{2\sqrt{(\rho^2 + k^2)}(-1 + \rho^2/k^2 + 1) + 2(\rho^2 + k^2)/k - 2k}{2\sqrt{\rho^2 + k^2} - 2k} \\ &= \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + k^2}} \ln \left[\frac{\rho}{k} \frac{\sqrt{\rho^2 + k^2} + \rho}{\sqrt{\rho^2 + k^2} - k} \right] \end{aligned}$$

例如 当 $\rho=1$ 和 $k=1$ 时, 则有

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \times 1.27$$

(ii) 用下述方法, 可以证明电势 V 是有限的, 因为

$$\frac{1}{x+k} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2xk + k^2}} < \frac{1}{\sqrt{x^2 + k^2}}$$

故

$$V < \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k^2} \sqrt{x^2 + \rho^2}}$$

若令 $\alpha = \min\{k, \rho\}$, 即 k, ρ 中较小者, 则有

$$V < \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}$$

由于下式积分为有限,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{x}{\alpha} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2\alpha}$$

所以

$$V < \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\lambda_0}{4\epsilon_0\alpha} \text{ 为有限}$$

2-12 一个电场, 到处都是在 z 方向上。

(a) 在下面两种情况下, 你能给 E_z 对 x, y 和 z 的偏导数作出什么结论: (i) 如果电荷线密度 ρ 是零; (ii) 如果电荷线密度 ρ 不是零?

(b) 对几种可能存在的场和不可能存在的场, 画出力线草图。

解

(a) (i)

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{k}$$

$$\rho = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \therefore \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{j} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$$

所以若 ρ 为零, 则 E 与 x, y 和 z 无关。

(ii)

$$\rho \neq 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad \therefore \frac{\partial E_z}{\partial z} \neq 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \therefore \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$$

则 E 随 z 而改变, 但与 x, y 无关。

(b) 在平面二极管中, 若 $\rho \neq 0$, 则 E_z 为 z 的函数。图 2-12 所示的电场图, 即属于不可能存在的一例。

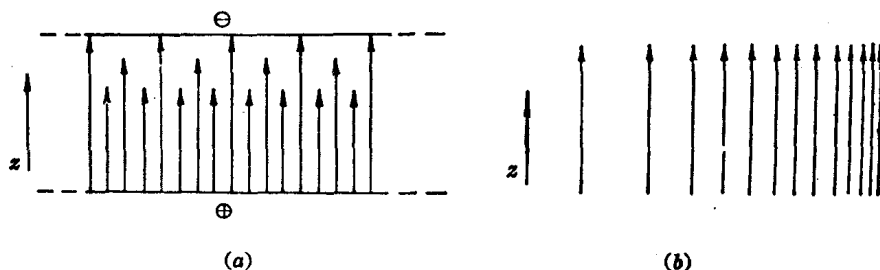


图 2-12

2-13 一束 $1.00 \mu\text{A}$ 的质子束, 通过 $10\,000\text{V}$ 的电势差而被加速。

(a) 计算质子刚被加速完后的电荷密度。假设电流密度在直径 2.00mm 的质子束内是均匀的, 在束外为零。

(b) 计算质子束内部和质子束外部的径向电场强度。

(c) 画出径向电场强度随 r 的变化曲线, r 的变化范围为从 0 到 1.00cm 。

(d) 把质子束放在内半径为 1.00cm 的圆柱形导体的轴线上, 而圆柱形导体是接地的, 画出管内 V 的图形。

解

(a) 单位长度的电荷为

$$\lambda = \frac{i}{v} = \frac{i}{(2eV/m)^{1/2}} = i \left(\frac{m}{2eV} \right)^{1/2} = 10^{-8} \left(\frac{1.6725 \times 10^{-27}}{2 \times 1.602 \times 10^{-19} \times 10^4} \right)^{1/2} \text{C/m}$$

故电荷密度为

$$\rho = \frac{\lambda}{\pi r_0^2} = 2.300 \times 10^{-7} \text{C/m}^3$$

(b) 质子束外部的径向电场为

$$\begin{aligned} E_{\text{外}} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{i}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{m}{2eV} \right)^{1/2} \frac{1}{r} \\ &= \frac{1.299 \times 10^{-2}}{r} \end{aligned}$$

在 $r = 10^{-3} \text{m}$ 处, $E_{\text{外}} = 12.99 \text{V/m}$ 。

质子束内部的径向电场为

$$E_{\text{内}} = \frac{\pi r^2 \rho}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} = 1.299 \times 10^4 r$$

在 $r = 10^{-3} \text{m}$ 处, $E_{\text{内}} = 12.99 \text{V/m}$

注意: 这些场强都与导体管的半径无关。

(c) $V-r$ 图和 $E-r$ 图见图 2-13。

(d) 在质子束外, 电势为

$$\begin{aligned} V_{\text{外}} &= - \int_{10^{-3}}^r E_r dr = - \int_{10^{-3}}^r 1.299 \times 10^{-2} \times \frac{dr}{r} = -1.299 \times 10^{-2} \times \ln r \Big|_{10^{-3}}^r \\ &= -(5.982 + 1.299 \ln r) \times 10^{-2} \end{aligned}$$

在 $r = 10^{-3} \text{m}$ 处, $V_{\text{外}} = 2.991 \times 10^{-2} \text{V}$ 。

在质子束内, 电势为

$$V_{\text{内}} = 2.991 \times 10^{-2} - \int_{10^{-3}}^r 1.299 \times 10^4 r dr = 2.991 \times 10^{-2} - 6.495 \times 10^3 \times (r^2 - 10^{-6})$$

在 $r = 0$ 处, $V_{\text{内}} = 36.41 \times 10^{-3} \text{V}$ 。

2-14 两块无限大的平行平板, 相距为 s , 电势分别为 0 和 V_0 。

(a) 在两块平板之间, 空间的电荷密度是 $\rho = \rho_0(x/s)$ 。距离 x 是从电势为零的平板算起的。试用泊松方程求出两板之间的区域内的电势 V 。

(b) 在平板上的电荷密度是多少?

解

$$\begin{aligned} (a) \quad \nabla^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho_0 x}{\epsilon_0 s} \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{\rho_0 x^2}{2\epsilon_0 s} + A \\ V &= -\frac{\rho_0 x^3}{6\epsilon_0 s} + Ax + B \end{aligned}$$

在 $x = 0$ 处 $V = 0$, 则 $B = 0$

在 $x = s$ 处 $V = V_0$, 则 $A = \frac{V_0}{s} + \frac{\rho_0 s}{6\epsilon_0}$

最后得

• 8 •

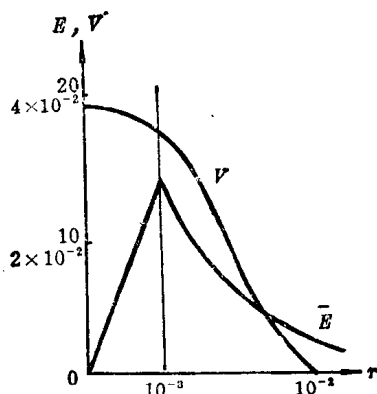


图 2-13

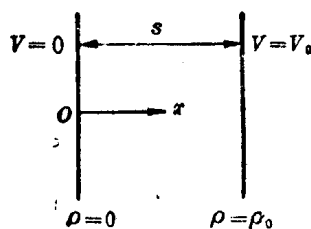


图 2-14

$$V = \left[\frac{V_0}{s} + \frac{\rho_0 s}{6\epsilon_0} \right] x - \frac{\rho_0 x^3}{6\epsilon_0 s}$$

(b) 在 $x=0$ 处,

$$E_0 = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_0 = -A$$

若图 2-14 中 V_0 和 ρ_0 均为正值, 则 E_0 和 σ_0 均为负值, 即

$$\sigma_0 = \epsilon_0 E_0 = -\epsilon_0 A = -\frac{\epsilon_0 V_0}{s} - \frac{\rho_0 s}{6}$$

在 $x=s$ 处,

$$E_s = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_s = -A + \frac{\rho_0 s}{2\epsilon_0}$$

现在 σ_s 可以是正值, 也可以是负值:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= -\epsilon_0 E_s = \epsilon_0 A - \frac{\rho_0 s}{2} \\ &= \frac{\epsilon_0 V_0}{s} + \frac{\rho_0 s}{6} - \frac{\rho_0 s}{2} \\ &= \frac{\epsilon_0 V_0}{s} - \frac{\rho_0 s}{3} \end{aligned}$$

注意: 在这两种情形下, σ 均由两项组成, 一项含有 V_0 , 另一项含有 ρ_0 .

在平板上由 ρ_0 感应的每平方米总电荷为

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) \rho_0 s = \rho_0 s / 2$$

这就是空间每平方米的电荷。

2-15 一个二维静电场, 随坐标 x 和 y 而改变, 但与 z 无关。

试证: 在任何平行于 xy 平面的圆周上, 电势 V 的平均值等于在圆周中心上的电势, 只要在此区域内的电荷密度为零。

证

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} V R d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V d\theta \\ \frac{d\bar{V}}{dR} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dV}{dR} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_R d\theta = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} E_R R d\theta = 0 \end{aligned}$$

由高斯定理, 上式的最后积分为零, 故平均电势 $\bar{V}$ 与 R 无关, 这样就得到

$$\bar{V} = V_{\text{中心}}$$

2-21 一球形的电荷分布, 由下式给出:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) & (r \leq a) \\ \rho &= 0 & (r > a) \end{aligned}$$

(a) 计算总电荷 Q 。

(b) 求出电荷分布外部的电场强度 E 和电势 V 。

(c) 求出内部的 E 和 V 。

(d) 试证 E 的最大值在 $(r/a) = 0.745$ 处。

(e) 上述电荷分布, 对轻原子核大致可以适用。对钙(原子序数为 20)画出 ρ 、 E 和 V 作为 r/a 的函数图形。假设 $\rho_0 = 5.0 \times 10^{25} \text{C/m}^3$, $a = 4.5 \text{fm}$ ($1 \text{fm} = 10^{-15} \text{m}$)。

解

(a)

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^a 4\pi r^2 \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) dr \\ &= \frac{8}{15} \pi \rho_0 a^3 \end{aligned}$$

(b) 在外部

$$\begin{aligned} V &= \frac{(8/15) \pi \rho_0 a^3}{4\pi \epsilon_0 r} \\ &= \frac{2}{15} \frac{\rho_0 a^3}{\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

在 $r=a$ 处,

$$V = \frac{2}{15} \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{2}{15} \frac{\rho_0 a^3}{\epsilon_0 r^2}$$

在 $r=a$ 处,

$$E = \frac{2}{15} \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0}$$

(c) 在内部

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^2} \int_0^r 4\pi r^2 \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) dr = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right)$$

在 $r=a$ 处,

$$E = \frac{2}{15} \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0}$$

你可以证明: 在 $r=0.745a$ 处, $E_{\max} = 0.166 \rho_0 a / \epsilon_0$

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{15} \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0} - \int_a^r \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right) dr \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2}\right) \end{aligned}$$

在 $r=a$ 处

$$V = \frac{2}{15} \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0}$$

在 $r=0$ 处

$$V = \frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0}$$

(e) 图 2-21 绘出了 $\rho-r/a$ 图、 $E-r/a$ 图、 $V-r/a$ 图。

2-22 在第 12 章中我们将知道, 一束电磁波入射在导体上, 给传导电子施加一压力。设想有一直径为 $1\mu\text{m}$ 的绝缘铜珠, 突然用一束强大的激光脉冲去照射它, 几乎把所有的传导电子都

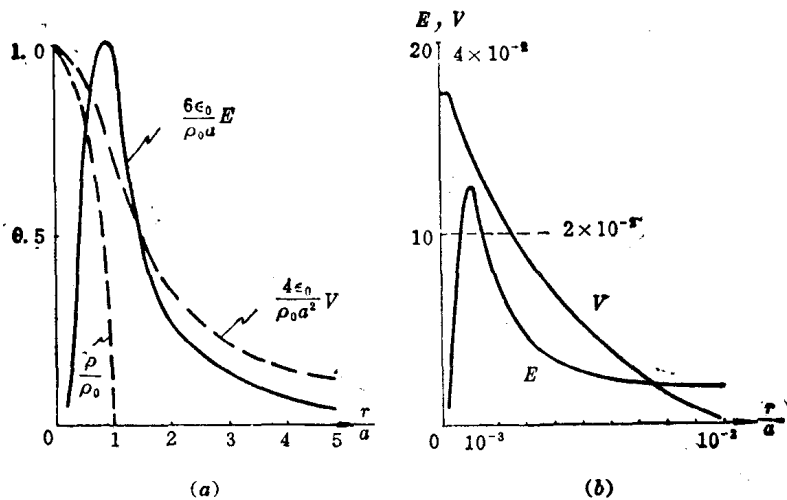


图 2-21

击出铜珠之外。在铜珠内每个铜原子含有一个传导电子。

- 照完以后铜珠表面电势是多少？
- 激光脉冲需要多大能量？
- 你认为这个实验是可以实现的吗？

解

- 铜珠面的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \approx 36 \times 10^9 \rho R^2$$

铜分子量为 64，铜的密度为 9。故 1m^3 的铜重 $9 \times 10^3 \text{kg}$ ，含有 $[9 \times 10^3 / (64 \times 10^{-3})] \times 6 \times 10^{23} \approx 10^{29}$ 个原子。

$$\rho = 1.6 \times 10^{-19} \times 10^{29} = 1.6 \times 10^{10}$$

$$R = 5 \times 10^{-7} \text{m}$$

$$V = 36 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{10} \times (5 \times 10^{-7})^2 = 1.44 \times 10^8 \text{V}$$

- 激光束所供给的能量，至少需等于珠内正离子的静电能量。

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int \rho V d\tau = \frac{1}{2} \int_0^R \rho \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6} \right) 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4\pi \rho^2}{15\epsilon_0} R^5 = 0.757 \text{J} \end{aligned}$$

- 此实验不可能实现，因为光子仅具有几个电子伏特的能量，因而每个电子必须受到大约 10^8 个光子的连续性冲击才能被击出珠外。

2-25 精确地计算一个偶极子的电势，并给出四极项和八极项。

解

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 + 2rs\cos\theta}} \right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 + \frac{s^2}{r^2} - 2\frac{s}{r} \cos\theta \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{s^2}{r^2} + 2\frac{s}{r} \cos\theta \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

因为

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} - \dots \quad (-1 < x < 1)$$

所以

$$\begin{aligned} V &= \frac{Qs}{2\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta - \frac{Qs^3}{4\pi\epsilon_0 r^4} (3\cos\theta - 5\cos^3\theta) + \frac{Qs^5}{4\pi\epsilon_0 r^6} \left(\frac{15}{4}\cos\theta - \frac{35}{2}\cos^3\theta \right) + \dots \\ &= \underbrace{\frac{Qs}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}}_{\text{偶极项}} + \underbrace{\frac{Qs^3}{2\pi\epsilon_0} \frac{5\cos^3\theta - 3\cos\theta}{2r^4}}_{\text{八极项}} + \dots \end{aligned}$$

这里无四极项。

注意: $[] = r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$

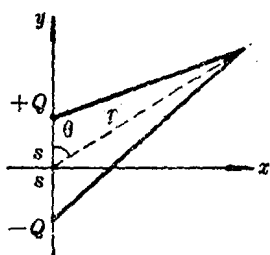


图 2-25

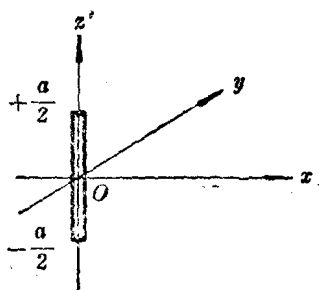


图 2-27

2-27 电荷 Q 均匀地分布在长度为 a 的直线上。

- 用积分法计算电势 V 。坐标原点选择在电荷中心点上。
- 计算出 V 的多极展开式中的单极项、偶极项以及四极项。
- r 为何值时,四极项小于单极项的百分之一? r 为观察点到电荷中心点的距离。
- 把由(a)求出的 V 的表达式展开到 $1/r^2$ 项,并与(b)进行比较。

解

(a)

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 - 2zz' + z'^2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln \left(\sqrt{r^2 - 2zz' + z'^2} + z' - z \right) \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln \left\{ \frac{\sqrt{r^2 - az + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2} - z}{\sqrt{r^2 + az + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2} - z} \right\} \end{aligned}$$

$$(b) V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$