谢力之　王继成
　　　　刘中兴　编著

数列递推式

$a_n\}: a_n = f(n, a_k)$

電子工業出版社

科技新书目：151—130

统一书号： 13290.557

定　　价： 1.05元

数列递推式

谢力之　王继成　刘中兴　编著

電子工業出版社

内 容 提 要

怎样由数列递推式求其通项？本书从等差，等比数列入手，到等比差、分式、线性、特殊非线性等数列，系统、完整地进行了介绍。书中不仅介绍了公式，更着眼于开阔读者眼界，提高读者思维能力。

本书读者对象为：中学数学教师，大专数学专业学生和高中、中专、中技、职校学生，自学青年。

数 列 递 推 式

谢力之 王继成 刘中兴 编著

电子工业出版社出版（北京市万寿路）
新华书店北京发行所发行，各地新华书店经售
汉中日报印刷厂印装

开本787×1092毫米 1/32 印张3.75 字数83,000
1987年5月第一版 1987年5月第一次印刷
印数00,001——10,200
统一书号：13290,557 定价：1.05元

前　言

数列$\{a_n\}$的通项公式，是指数列的第n项（通项）a_n，用项数n来表示的式子：

$$a_n=f(n)$$

数列$\{a_n\}$的递推式，是指数列的第n项（通项）a_n，用项数n与它相邻的若干项表示的式子：

$$a_n=f(n, a_k)$$

对于一个数列其通项公式（简称通项）与其递推式之间有什么联系呢？例如：

斐波那契数列$\{a_n\}$的递推式为：

$$a_1=a_2=1,\quad a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

其通项为：

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

怎样由数列的递推式，去求该数列的通项呢？例如对于斐波那契数列，从递推式是怎样求出其通项的呢？这类问题是很多的。例如：

已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$：

$a_1=p$、$b_1=q$、$a_n=pa_{n-1}$、

$b_n=qa_{n-1}+rb_{n-1}$（$n\geqslant 2$）

（p、q、r是已知常数，且$q\neq 0$、$p>r$）

用p、q、r、n表示b_n

又如：设$a_1=a>2$，

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2(a_n-1)}$$

求通项a_n

这本书的目的就是为了解决：怎样由数列的递推式去求其通项而专门编写的。作者不着眼于仅介绍公式，让读者死记公式，而是力图通过对各种方法的介绍，来开阔读者眼界，提高读者思维能力，使之“水到渠成”。

本书作者谢力之副教授，是五十年代末毕业于复旦大学，今是汉中师院数学系副系主任；王继成老师在全国教育系统先进单位——陕西省勉县第一中学，多年从事高中数学教学，有丰富的中学数学教学经验；刘中兴讲师六十年代初毕业于吉林大学，今在北京物资学院任教，具有丰富的应用数学知识。这本书的完成正是在数学教学中理论与实践结合的产物。本书在编写过程中，得到江苏南京市第十九中学马元鹿老师、辽宁抚顺市师专附中杨松棋老师、云南保山市第二中学黄永奇老师以及河北大城师范卢建国老师提出许多宝贵意见，特在此一并致以谢意。但由于作者水平所限，错误必然不少，恳切希望同志们给予批评指教。

编　者

一九八七年五月

目　　录

前言

§ 1 等差、等比递推式 …………………………………… (5)

§ 2 等比差递推式 ……………………………………… (8)

§ 3 可化为等比差的递推式

一、$\alpha a_{n+1}a_n+\beta a_{n+1}+\gamma a_n=0$ ……………… (17)

二、$a_{n+1}=\alpha a_n^{\beta}$ ……………………………… (18)

三、$a_{n+1}=\alpha a_n+\beta_n$ ……………………………… (19)

四、$a_1+\cdots+a_n=\alpha a_n+\beta$ ……………………… (21)

§ 4 递推式为　$a_{n+1}=\alpha a_n+\beta n+\gamma$ ……………… (24)

§ 5 递推式为　$a_{n+1}=\alpha a_n+f(n)$ ………………… (30)

§ 6 递推式为　$a_{n+1}=\alpha_n a_n+\beta_n$

一、$a_{n+1}=\alpha q^n a_n$ …………………………………… (38)

二、$a_{n+1}=\alpha q^n a_n+\beta$ ……………………………… (39)

三、$a_{n+1}=(an+b)a_n+cn+d$ ………………………… (40)

四、$a_{n+1}=\alpha q^n a_n+\beta p^n$ ………………………… (42)

§ 7 分式线性递推式 …………………………………… (42)

§ 8 二阶线性递推式

一、$\alpha a_{n+1}+\beta a_n+\gamma a_{n-1}=0$ ……………………… (48)

二、$\alpha a_{n+1}+\beta a_n+\gamma a_{n-1}+S=0$ ………………… (54)

三、$\alpha a_{n+1}+\beta a_n+\gamma a_{n-1}+Sn+Q=0$ ………… (58)

四、$\alpha a_{n+1}+\beta a_n+\gamma a_{n-1}+Sn^2+Qn+R=0$

……………………………………………………（58）
五、$\alpha a_{n+1}+\beta a_n+\gamma a_{n-1}+Sq^n=0$……………（59）
§9 斐波那契数列……………………………………………（62）
§10高阶线性递推式…………………………………………（66）
§11特殊的非线性递推式
一、$a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{\alpha}{a_{n-1}}\right)$ ……………………（75）
二、$a_n-a_{n-1}=a_na_{n-1}f(n)$ ……………………（77）
三、递推式中含S_n…………………………………………（79）
四、递推式是两个方程………………………………………（80）
五、其它……………………………………………………（82）
§12附录一习题答案…………………………………………（88）
§13附录二第32—36届美国中学数
学考试（AHSME）试题……………………………………（91）
第32届试题……………………………………………（91）
第33届试题……………………………………………（96）
第34届试题……………………………………………（102）
第35届试题……………………………………………（106）
第36届试题……………………………………………（111）

§1 等差、等比递推式

若数列$\{a_n\}$递推式分别为：

$$a_{n+1}-a_n=d\ (d\text{为常数})、$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\quad (q\text{为常数})$$

则分别称数列$\{a_n\}$为等差、等比数列。

对于等差、等比数列的通项a_n公式，这已经是熟知的。我们就从这熟悉的内容开始，来介绍由"递推式求通项"的一些最基本方法。

一、递归法

（1）由等差数列的递推式

$$a_{n+1}-a_n=d$$

求其通项a_n：

$$\because\quad a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_1+2d,$$
$$a_4=a_1+3d,$$
$$\cdots\cdots$$

由递推归纳，得$a_n=a_1+(n-1)d$

（注：这是直观的归纳，若要数学推理的严密性，尚须用数学归纳法去证明。在本书中我们都省去递归法的严密证明）。

（2）由等比数列的递推式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$$

求其通项a_n：

$\because \quad a_2=qa_1,$

$a_3=qa_2=q^2a_1,$

$a_4=qa_2=q^3a_1,$

……

由递推归纳，得$a_n=aq_1^{n-1}$

二、差叠法

由等差数列的递推式

$$a_{n+1}-a_n=d$$

求其通项a_n：

$\because a_2-a_1=d$

$a_3-a_2=d$

$a_4-a_3=d$

……

$a_n-a_{n-1}=d,$

将上面的差值，进行叠加，有

$$a_n-a_1=(n-1)d,$$

$$\therefore a_n=a_1+(n-1)d,$$

三、商乘法

由等比数列的递推式：

$$a_{n+1}:a_n=q$$

求其通项a_n：

$\because \quad \frac{a_2}{a_1}=q,$

$\frac{a_3}{a_2}=q,$

……

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q,$$

将上面的商，进行累乘，有

$$\frac{a_n}{a_1}=q^{n-1},$$

$$\therefore a_n=a_1q^{n-1}$$

四、特征方程法

（1）等差数列 $\{a_n\}$：$a_n-a_{n-1}=d$

求 a_n：

$$由 a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n$$

其对应的特征方程为：

$$\lambda^2+1=2\lambda,$$

解之，有 $\lambda_1=\lambda_2=1$，

$\therefore$ 通项可表示为 $a_n=a\cdot 1^n+bn\cdot 1^n$

（a、b 为待定的常数）

又由 $\begin{cases}a_1=a+b\\ a_2=a+2b\end{cases}$

解得： $b=a_2-a_1=d$，$a=a_1-d$

$$\begin{aligned}\therefore a_n&=a_1-d+dn\\&=a_1+(n-1)d,\end{aligned}$$

（2）等比数列 $\{a_n\}$： $a_n:a_{n-1}=q$

求 a_n：

由 $a_{n+1}-qa_n+0\cdot a_{n-1}=0$

其对应特征方程为：

$$\lambda^2-q\lambda+0=0$$

解之，有 $\lambda_1=0$、 $\lambda_2=q\ (\neq 0)$

$\therefore$ 通项可表示为 $a_n=a\cdot 0^n+b\cdot q^n$

（a、b为待定常数）

又由$a_1=bq$，　得　$b=\frac{a_1}{q}$

$\therefore\ a_n=a_1q^{n-1}$

§2　等比差递推式

若数列$\{a_n\}$的递推式为：

$$a_{n+1}=qa_n+d$$

（q、d为常数），则称此数列为等比差数列。

在等比差数列$\{a_n\}$中，当

$q=1$时，$\{a_n\}$是等差数列；

$q\neq0$、$d=0$时，$\{a_n\}$是等比数列，所以，等差、等比数列是等比差数列的特殊情况。在这一节里，只就

$q\neq0$、1，　$d\neq0$

的情形，由递推式来求等比差数列的通项a_n

一、递归法

由等比差数列$\{a_n\}$的递推式：

$$a_{n+1}=qa_n+d$$

求其通项　a_n　：

$\because\ a_2=qa_1+d$　，

$a_3=qa_2+d=q^2a_1+qd+d$，

$a_4=qa_3+d=q^3a_1+q^2d+qd+d$，

$\cdots\cdots\cdots$

由递推归纳，得

$$a_n=q^{n-1}a_1+q^{n-2}d+q^{n-3}d+\cdots+d$$

$$=q^{n-1}a_1+d\cdot\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$$

$$=\frac{a_1q^n+(d-a_1)q^{n-1}-d}{q-1}$$

二、差叠法

由等比差数列$\{a_n\}$的递推式

$$a_{n+1}=qa_n+d$$

求其通项a_n:

$$\because\quad a_{n+1}=qa_n+d,$$

$$a_n=qa_{n-1}+d,$$

有

$$a_3-a_2=q(a_2-a_1),$$

$$a_4-a_3=q(a_3-a_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n-a_{n-1}=q(a_{n-1}-a_{n-2})$$

将上面的差值，进行叠加，有

$$a_n-a_2=qa_{n-1}-qa_1$$

此时，尚得不到通项a_n，但注意到数列

$$\{b_n\}=\{a_n-a_{n-1}\}$$

是公比为q的等比数列，由等比数列$\{b_n\}$的前$(n-2)$项和：

$$b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}=\frac{(q^{n-2}-1)b_2}{q-1}$$

即

$$a_{n-1}-a_1=\frac{(q^{n-2}-1)(a_2-a_1)}{q-1}$$

$$\therefore\quad a_n=a_2+q\cdot\frac{(q^{n-2}-1)(a_2-a_1)}{q-1}$$

$$=\frac{a_1q^n+(d-a_1)q^{n-1}-d}{q-1}$$

（其中利用了$a_2=qa_1+d$）

三、特征方程法

由等比差数列$\{a_n\}$的递推式

$$a_{n+1}=qa_n+d$$

求其通项a_n:

$$\because\quad a_{n+1}=qa_n+d$$

$$a_n=qa_{n-1}+d$$

相减有 $a_{n+1}-(1+q)a_n+qa_{n-1}=0$,

知对应的特征方程为:

$$\lambda^2-(1+q)\lambda+q=0,$$

解之，有$\lambda_1=1$, $\lambda_2=q$ $(\neq 1)$

$\therefore$ 通项可表示为 $a_n=a\cdot 1^n+bq^n$

(a、b为待定常数),

$$\text{又}\because\quad \begin{cases} a_1=a+bq \\ a_2=a+bq^2 \end{cases}$$

及 $$a_2=qa_1+d,$$

解得 $$b=\frac{a_1-qa_1-d}{q(1-q)}$$

$$a=\frac{d}{1-q}$$

代入a_n，有 $a_n=\dfrac{a_1q^n+(d-a_1)q^{n-1}-d}{q-1}$

四、乘方消项法

求等比差数列$\{a_n\}$: $a_{n+1}=qa_n+d$的通项a_n.

$$\because\quad a_n=qa_{n-1}+d$$

$$a_{n-1}=qa_{n-2}+d$$

$$a_{n-2}=qa_{n-3}+d$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_2=qa_1+d$$

有 $$a_n=qa_{n-1}+d$$

$$q a_{n-1}=q^2 a_{n-2}+dq$$
$$q^2 a_{n-2}=q^3 a_{n-3}+dq^2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$q^{n-2}a_2=q^{n-1}a_1+dq^{n-2},$$

将上面经过乘方的等式叠加，则会消去很多项，有

$$a_n=q^{n-1}a_1+d(1+q+\cdots+q^{n-2})$$
$$=\frac{a_1q^n+(d-a_1)q^{n-1}-d}{q-1}$$

五、加数转化法

对于等比差数列，利用加数转化法来求数列的通项，就是将数列的递推式

$$a_{n+1}=qa_n+d$$

等号两边同时加上一个适当的加数x，使得等比差数列转化为等比数列$\{a_n+x\}$。由于这个方法，对于等比差数列，由递推式求其通项，是最为简便的方法。为此，我们写成定理的形式：

定理一 对于等比差数列$\{a_n\}$的递推式

$$a_{n+1}=qa_n+d$$

两边加上：

$$\frac{d}{q-1},\ (q\neq 1)$$

则原来等比差数列$\{a_n\}$转化为

$$\{b_n\}=\left\{a_n+\frac{d}{q-1}\right\}$$

以公比为q的等比数列

证 $\because\ a_{n+1}=qa_n+d$

有 $a_{n+1}+x=q(a_n+\frac{x+d}{q})$

为了使数列$\{a_n+x\}$是等比数列，则选取常数x为：

$$x=\frac{x+d}{q}$$

得 $x=\frac{d}{q-1}$

即 $\left\{a_n+\frac{d}{q-1}\right\}$是以公比为q的等比数列，从而

$$a_n+\frac{d}{q-1}=\left(a_1+\frac{d}{q-1}\right)q^{n-1}$$

$$\therefore\quad a_n=\left(a_1+\frac{d}{q-1}\right)q^{n-1}-\frac{d}{q-1}$$

$$=\frac{a_1q^n+(d-a_1)q^{n-1}-d}{q-1}$$

六、特解转化法

对于等比差数列$\{a_n\}$：$a_{n+1}=qa_n+d$，为了欲求其通项a_n。设法转化为先求特解（即先求递推式为

$$\overline{a}_{n+1}=q\overline{a}_n$$

的通项$\overline{a}_n$），然后再对一般情形求解。我们归纳为如下结论：

结论 对于等比差数列$\{a_n\}$的递推式

$$a_{n+1}=qa_n+d$$

则$\{a_n\}$的通项为

$$a_n=\overline{a}_n+d\sum_{i=1}^{n-1}q^{i-1}$$

（其中$\overline{a}_n$为递推式是

$$\overline{a}_{n+1}=q\overline{a}_n$$

数列的通项，即

$$\overline{a}_n=a_1q^{n-1})$$

七、例题

已知数列$\{a_n\}$：$a_1=2$，

$$a_{n+1}=2a_n+5$$

求通项a_n

解一（用递归法）

$$\because\quad a_2=2a_1+5=2^2+5$$

$$a_3=2a_2+5=2^3+2\cdot5+5$$

$$a_4=2a_3+5=2^4+2^2\cdot5+2\cdot5+5$$

$$\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad a_n=2^n+5(2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+1)$$

$$=2^n+5\cdot\frac{1-2^{n-1}}{1-2}$$

$$=7\cdot2^{n-1}-5$$

解二（用差叠法）

$$\because\quad a_{n+1}=2a_n+5$$

$$a_n=2a_{n-1}+5$$

有$a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})$，

知$\{a_n-a_{n-1}\}$是以2为公比的等比数列，所以，有

$$a_n-a_{n-1}=(a_2-a_1)\cdot2^{n-2}$$

$$=(9-2)\cdot2^{n-2}$$

$$=7\cdot2^{n-2},$$

得$(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$$=\frac{(a_2-a_1)-7\cdot2^{n-1}}{1-2}$$

$$=7(2^{n-1}-1),$$