高普考必備

材料力學習題詳解

編著者

吳　文　吉

（全一册）

興業圖書股份有限公司

高普考必備

材料力學習題詳解

編著者

吳　文　吉

（全一册

興業圖書股份有限公司

中華民國六十八年三月 出版

材料力學習題詳解

全一冊 定價五十元

編 著 者：吳 文 吉

發 行 人：王 志 康

出版登記證局版台業字第〇四一〇號

出 版 者：興業圖書股份有限公司

發 行 所：興業圖書股份有限公司

台南市勝利路一一八號

電 話：三七三二五三 號

郵撥南字 二一五七三 號

目 錄

習 題 一

拉力、壓力與剪力

1－1 一圓形鋼桿，直徑爲0.8 in，受拉力9,000 lb，求其拉應力？

解： 斷面積 $A=\frac{\pi}{4}d^2=\frac{\pi}{4}(0.8)^2=0.504\ in^2$

拉應力 $\sigma=\frac{P}{A}=\frac{9000}{0.504}=17{,}900\ psi$

1－2 一圓柱形鋼桿，直徑爲1 in，單位伸長爲 0.7×10^{-3}，$E=30\times10^6\ psi$，求其拉力？

解： 斷面積 $A=\frac{\pi}{4}d^2=\frac{\pi}{4}(1)^2=0.785\ in^2$

拉力 $P=A\sigma=A\cdot\epsilon E$

$=0.785\times0.7\times10^{-3}\times30\times10^6$

$=16{,}500\ lb$

1－3 長金屬絲在本身重量下垂直懸之，求使其不致裂斷之最大長度？設(a)爲鋼絲，極限強度爲300,000 psi，(b)爲鋁絲，極限強度爲50,000 psi（鋼重490 pcf，鋁重170 pcf）。

解： $\because\ \Sigma F_x=0 \quad \therefore\ S_x=\gamma Ax$

故 $S_{max}=\gamma AL$

$\because\ \sigma_{max}=\frac{S_{max}}{A}=\gamma L\le\sigma_u$

故 $L\le\frac{\sigma_u}{\gamma}$ 即 $L_{max}=\frac{\sigma_u}{\gamma}$

(a) $L_{max}=\frac{300{,}000\times144}{490}$

$=88{,}200\ ft$

(b) $L_{max}=\frac{50{,}000\times144}{170}=42{,}400\ ft$

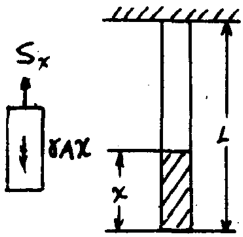

圖1－1

1－4　一短鋼管（ $\sigma_y = 40{,}000\ psi$ ）受 250 $kips$ 之壓縮載荷，基於降伏點之安全因數為 1.8，設厚度為外徑之 $\frac{1}{8}$，求最小外徑？

解：　斷面積 $A = \frac{\pi}{4}(d_o^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{4}[d_o^2 - (d_o - 2t)^2]$

$$= \frac{\pi}{4}[d_o^2 - (d_o - \frac{d_o}{4})^2] = \frac{7\pi d_o^2}{64}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \le \sigma_w = \frac{\sigma_y}{n} \qquad \therefore \quad \frac{250{,}000}{\frac{7\pi d_o^2}{64}} \le \frac{40{,}000}{1.8}$$

$$\therefore \quad d_o \ge \sqrt{\frac{64 \times 250{,}000 \times 1.8}{7\pi \times 40{,}000}} = 5.72$$

$$(d_o)_{min} = 5.72\ in$$

1－5　重物繫於長 L 之轉臂，以角速度 ω 繞光滑軸承迴轉於水平面，設工作應力為 σ_w，並略去臂重，試求臂之斷面積以公式表之。

解：　$P = F_n = mr\omega^2 = \frac{W}{g}L\omega^2$

$$\sigma = \frac{P}{A} \le \sigma_w$$

$$\therefore \quad A \ge \frac{P}{\sigma_w} = \frac{WL\omega^2}{g\sigma_w}$$

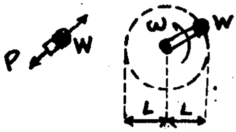

圖 1－2

1－6　設 γ 為前題臂之材料單位體積之重量，將此重量計入解之

解：　$S_x = F_{n1} + F_{n2}$

$$F_{n1} = m_1 a_{n1} = \frac{W}{g}L\omega^2$$

$$dF_{n2} = dm_2 a_{n2} = \frac{\gamma A dy}{g}\, y\omega^2$$

$$F_{n2} = \int_x^L \frac{\gamma A dy}{g}\, y\omega^2$$

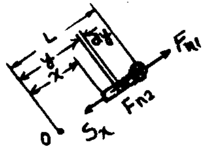

圖 1－3

$$= \frac{\gamma A\omega^2}{g}\int_x^L y\,dy$$

$$= \frac{\gamma A\omega^2}{g}\,\frac{y^2}{2}\Big|_x^L$$

$$= \frac{\gamma A\omega^2}{2g}(L^2 - x^2)$$

$$S_x = \frac{W}{g}L\omega^2 + \frac{\gamma A\omega^2}{2g}(L^2 - x^2)$$

$$\therefore\quad S_{max} = \frac{W}{g}L\omega^2 + \frac{\gamma A\omega^2}{2g}L^2$$

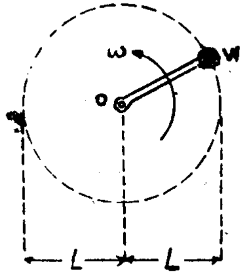

圖 1－4

$$\sigma_{max} = \frac{S_{max}}{A} = \frac{WL\omega^2}{gA} + \frac{\gamma L^2\omega^2}{2g} \le \sigma_w$$

$$\therefore\quad \frac{WL\omega^2}{gA} \le \sigma_w - \frac{\gamma L^2\omega^2}{2g} = \frac{2g\sigma_w - \gamma L^2\omega^2}{2g}$$

$$A \ge \frac{WL\omega^2}{g} \times \frac{2g}{(2g\sigma_w - \gamma L^2\omega^2)}$$

$$= 2WL\omega^2 / (2g\sigma_w - \gamma L^2\omega^2)$$

1－7　設前題轉臂斷面積 A，重 W_1，繫物重 W，求因離心力所生之總伸長量 δ？

解：　由前題 1－6：$S_x = \frac{W}{g}L\omega^2 + \frac{\gamma A\omega^2}{2g}(L^2 - x^2)$

$$d\delta = \frac{S_x\,dx}{EA}$$

$$\delta = \int_0^L \frac{1}{EA}\left[\frac{W}{g}L\omega^2 + \frac{\gamma A\omega^2}{2g}(L^2 - x^2)\right]dx$$

$$= \frac{1}{EA}\left[\frac{W}{g}L\omega^2 x + \frac{\gamma A\omega^2}{2g}L^2 x - \frac{\gamma A\omega^2}{2g}\frac{x^3}{3}\right]_0^L$$

$$= \frac{1}{EA}\left[\frac{WL^2\omega^2}{g} + \frac{\gamma A\omega^2}{2g}L^3 - \frac{\gamma A\omega^2}{2g}\frac{L^3}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{EA}\left[\frac{WL^2\omega^2}{g} + \frac{\gamma AL^3\omega^2}{3g}\right]$$

$$\because \quad W_1 = \gamma AL \quad \therefore \quad \delta = \frac{\omega^2 L^2}{3gEA}(3W+W_1)$$

1－8 圓鋼桿長 20 ft，受拉力 1600 lb，設工作應力為 18,000 psi，容許變位為 0.1 in，求桿之最小直徑？（設鋼之 $E = 30\times10^6\ psi$）

解：$\sigma = \dfrac{P}{A} \le \sigma_w \quad \therefore \quad \dfrac{1600}{\frac{\pi}{4}d_1^2} \le 18000$

$$\therefore \quad d_1 \ge \sqrt{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1600}{18000}} = 0.336\ in$$

$$\delta = \frac{Pl}{EA} \le \delta_w \quad \therefore \quad \frac{1600\times20\times12}{30\times10^6\times\frac{\pi}{4}\cdot d_2^2} \le 0.1$$

$$\therefore \quad d_2 \ge \sqrt{\frac{4\times1600\times20\times12}{30\times10^6\times\pi\times0.1}} = 0.404\ in$$

故 $d_{min} = 0.404\ in$

1－9 外徑 3.5 in，斷面積 2.228 in^2 之鋼管（$E = 30\times10^6\ psi$，$\mu = 0.30$）受拉力作用，求使直徑減少 0.000471 in 所需之軸向力？

解：$\because \quad \mu = \dfrac{\epsilon'}{\epsilon} \quad \therefore \quad \epsilon' = \mu\epsilon \quad \dfrac{\triangle d}{d} = \mu\dfrac{\delta}{l} = \dfrac{\mu}{l}\cdot\dfrac{Pl}{EA} = \dfrac{\mu P}{EA}$

$$\therefore \quad P = \frac{EA\triangle d}{\mu d} = \frac{30\times10^6\times2.228\times0.000471}{0.30\times3.5} = 30{,}000\ lb$$

1－10 直徑 2.25 in 之實心圓桿（$E = 12.5\times10^6\ psi$，$\mu = 0.30$）受軸向力 45,000 lb 壓縮，求(a)直徑之增量 $\triangle d$ (b)設桿長 15 in，求其容積變化。

解：$\epsilon = \dfrac{\delta}{l} = \dfrac{P}{EA} = \dfrac{45{,}000}{12.5\times10^6\times\frac{\pi}{4}\times(2.25)^2}$

$$= 9.05\times10^{-4}$$

(a) $\triangle d = \epsilon' d = \mu\epsilon d = 0.30\times9.05\times10^{-4}\times2.25$

$= 6.1 \times 10^{-4}\ in$

(b) 由P.7公式（1－7）　$\triangle V = V\epsilon(1-2\mu)$

$$\triangle V = \frac{\pi}{4} d^2 l \epsilon (1-2\mu)$$

$$= \frac{\pi}{4}(2.25)^2 \times 15 \times 9.05 \times 10^{-4} \times (1-2\times 0.30) = 0.0216\ in^3$$

1－11 拉力桿如圖所示，斷面積爲 A，彈性模數爲 E，求底端之變位以公式表之，爲伸長抑爲縮短？

解： $\because\ \Sigma F = 0$

$\therefore\ S_1 = P$

$S_2 = P - 2P = -P$

$S_3 = P - 2P + 2P = P$

$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$

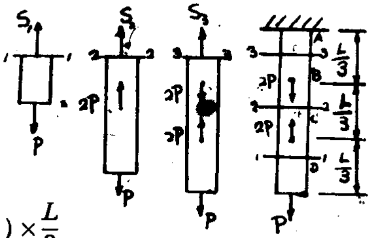

圖1－5

$$= \frac{P\times\frac{L}{3}}{EA} + \frac{(-P)\times\frac{L}{3}}{EA} + \frac{P\times\frac{L}{3}}{EA} = \frac{PL}{3EA}\text{（爲伸長）}$$

1－12 $10\,ft$ 長之圓鋼桿，$5\,ft$ 長之直徑 $d_1 = 0.75\ in$，另 $5\,ft$ 有 $d_2 = 0.5\ in$，求(a)受拉力 $P = 5,000\ lb$ 時之伸長量，(b)同體積之材料製爲 $10\,ft$ 長，相同之直徑 d 時之伸長量。（$E = 30\times 10^6\ psi$）

解： (a) $\delta = \delta_1 + \delta_2 = \dfrac{Pl_1}{EA_1} + \dfrac{Pl_2}{EA_2}$

$$= \frac{5000\times 5\times 12}{30\times 10^6 \times \frac{\pi}{4}(0.75)^2} + \frac{5000\times 5\times 12}{30\times 10^6 \times \frac{\pi}{4}(0.5)^2}$$

$$= 0.0226 + 0.051 = 0.0736\ in$$

(b) $$A=\frac{V}{l}=\frac{\frac{\pi}{4}\times(0.75)^2\times5\times12+\frac{\pi}{4}(0.5)^2\times5\times12}{10\times12}$$

$$=\frac{\pi}{8}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=\frac{13\pi}{128}\doteq0.319\ in^2$$

$$\delta=\frac{Pl}{EA}=\frac{5000\times10\times12}{30\times10^6\times0.319}=0.0627\ in$$

1－13 長L，斷面積A，總重W之稜柱形桿，垂直懸於上端，求因自身重量所生之伸長量，以公式示之。

解： $$d\delta=\frac{S_x dx}{EA}=\frac{\gamma Axdx}{EA}=\frac{\gamma}{E}xdx$$

$$\delta=\int_0^L\frac{\gamma}{E}xdx=\frac{\gamma}{E}\int_0^L xdx=\frac{\gamma}{E}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^L=\frac{\gamma L^2}{2E}=\frac{\gamma AL^2}{2EA}$$

$$=\frac{WL}{2EA}$$

1－14 求稜柱形桿因自身重量所生容積之增加量$\triangle V$，以$WLAE\mu$表之。

解： 由P. 7 公式（1－17）

$$\triangle V=V\epsilon(1-2\mu)=AL\epsilon(1-2\mu)=A\delta(1-2\mu)$$

由前題 1－13 $\delta=\frac{WL}{2EA}$ 代入

$$\triangle V=A\cdot\frac{WL}{2EA}(1-2\mu)=\frac{WL}{2E}(1-2\mu)$$

1－15 矩形斷面桿，厚度t不變，寬自b_1依直線變爲b_2，受拉力P作用，求其伸長δ之公式。

解： $$b_x=b_2+(b_1-b_2)\frac{x}{L}$$

$$\therefore\quad A_x=t\left[b_2+(b_1-b_2)\frac{x}{L}\right]$$

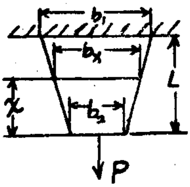

圖1－6

$$\delta=\int_0^L\frac{Pdx}{EA_x}=\int_0^L\frac{Pdx}{Et\left[b_2+(b_1-b_2)\frac{x}{L}\right]}$$

$$=\frac{P}{Et}\int_{0}^{L}\frac{\frac{L}{(b_1-b_2)}d\left[b_2+(b_1-b_2)\frac{x}{L}\right]}{\left[b_2+(b_1-b^2)\frac{x}{L}\right]}$$

$$=\frac{PL}{Et(b_1-b_2)}ln\left[b_2+(b_1-b_2)\frac{x}{L}\right]\Big|_{0}^{L}$$

$$=\frac{PL}{Et(b_1-b_2)}(lnb_1-lnb_2)=\frac{PL}{Et(b_1-b_2)}ln\frac{b_1}{b_2}$$

1－16　求前題桿之容積變化$\triangle V$。

解：　由P. 7公式（1－17）

$$d(\triangle V)=dV\cdot\epsilon(1-2\mu)=A_x dx\,\epsilon_x(1-2\mu)$$

$$\triangle V=\int_{0}^{L}A_x dx\frac{P}{EA_x}(1-2\mu)=\frac{P}{E}(1-2\mu)\int_{0}^{L}d$$

$$=\frac{PL}{E}(1-2\mu)$$

1－17　圓形斷面之柱支承P力及自身重量，半徑r自頂至底變化如圖，材料單位體積重γ，工作壓應力σ_w，求定半徑r之方程式及其容積，使此柱之容積為最小。

解：　$\Sigma F_x=0$

$$\sigma_w A+\gamma A dx=\sigma_w(A+dA)$$

$$\gamma A dx=\sigma_w dA$$

$$\therefore\quad \frac{dA}{A}=\frac{\gamma dx}{\sigma_w}$$

$$lnA-lnK=\frac{\gamma x}{\sigma_w}$$

$$\therefore\quad A=K\cdot e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\pi r^2=A=Ke^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}$$

$$\therefore\quad r=\left(\frac{K}{\pi}e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(2)$$

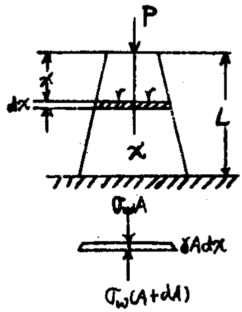

圖1－7

當$x=0$時　$\sigma_w=\frac{P}{A_o}$　即$A_o=\frac{P}{\sigma_w}=K\cdot e^o=K$

$$\therefore \quad r \doteq \left(\frac{P}{\pi\sigma_w} e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad A=\frac{P}{\sigma_w} e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}$$

$$\therefore \quad V=\int_0^L A\,dx=\int_0^L \frac{P}{\sigma_w} e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}\,dx=\frac{P}{\sigma_w}\int_0^L e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}\cdot\frac{\sigma_w}{\gamma}\,d\left(\frac{\gamma x}{\sigma_w}\right)$$

$$=\frac{P}{\sigma_w}\cdot\frac{\sigma_w}{\gamma} e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}\Big|_0^L=\frac{P}{\gamma}\left(e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}-e^{0}\right)=\frac{P}{\gamma}\left(e^{\frac{\gamma x}{\sigma_w}}-1\right)$$

1－18 鋼筋混凝土正方柱，支承軸向壓力P，設鋼筋之橫斷面積為混凝土面積之$\frac{1}{10}$，而鋼之彈性模數爲混凝土彈性模數之10倍，則混凝土承受之載荷爲若干？

解： 設混凝土承受之載荷爲P_c，鋼筋承受之載荷爲P_s

$P_c+P_s=P \cdots\cdots(1) \qquad \because \quad A_s=\frac{A_c}{10}$

$E_s=10E_c$ 且 $\delta_c=\delta_s$

$$\therefore \quad \frac{P_c l}{E_c A_c}=\frac{P_s l}{E_s A_s}=\frac{P_s l}{10E_c\cdot\frac{A_c}{10}}=\frac{P_s l}{E_c A_c}$$

$\therefore \quad P_c=P_s$ 代入(1)式

1－19 長L之AB桿以垂直金屬絲懸於兩端，支懸於水平位置如圖所示，二金屬絲有相同之長度及橫斷面積，但彈性模數分別爲E_1及E_2，不計AB自身重量，則垂直力P應施於何處始能使桿保持水平？

解： $\Sigma M_A=0 \quad S_2L=Px \quad \therefore S_2=\frac{Px}{L}$

$\Sigma M_B=0 \quad S_1L=P(L-x)$

$$\therefore \quad S_1=\frac{P(L-x)}{L}$$

$\because$ 保持水平 $\quad\therefore \quad \delta_1=\delta_2$

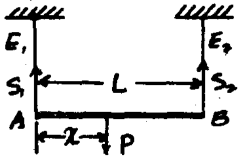

圖 1－8

$$\frac{S_1 l}{E_1 A}=\frac{S_2 l}{E_2 A} \quad \therefore \quad \frac{S_1}{E_1}=\frac{S_2}{E_2}$$

$$\therefore\ \frac{\frac{Px}{L}}{E_2}=\frac{\frac{P(L-x)}{L}}{E_1}\qquad \frac{x}{E_2}=\frac{L-x}{E_1}$$

$$\therefore\ E_1x=LE_2-E_2x\qquad \therefore\ x=\frac{LE_2}{E_1+E_2}$$

1－20 求圖示 AB 桿中央之應力，$P=4800\ lb$，兩端斷面積 $A_1=0.8\ in^2$，中央 $A_2=1.2\ in^2$，$b=3a=15\ in$。

解： 因左右對稱，故兩端張力相等均為 S_1．　$\Sigma F=0$

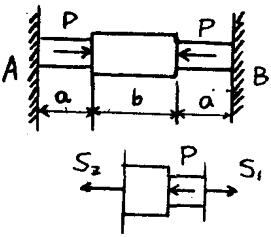

圖 1－9

$\therefore\ S_1=S_2+P$ ………(1)

$\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_1$

$=2\delta_1+\delta_2=0$

$$\therefore\ 2\times\frac{S_1\cdot a}{E\cdot A_1}+\frac{S_2\cdot b}{E\cdot A_2}=0$$

$$\frac{2S_1a}{A_1}+\frac{S_2b}{A_2}=0$$

$$\frac{2\times(S_2+P)\times5}{0.8}+\frac{S_2\times15}{1.2}=0$$

$$30(S_2+P)+30S_2=0$$

$$\therefore\ S_2=-\frac{P}{2}=-\frac{4800}{2}=-2400\ lb$$

$$\therefore\ \sigma_2=\frac{S_2}{A_2}=-\frac{2400}{1.2}=-2000\ psi$$

1－21 正方棒由兩種不同材料合成，彈性模數分別為 E_1 及 E_2，邊長相同，求使二桿受均佈拉力時 P 之偏心距 e。

解： $S_1+S_2=P$ ………(1)

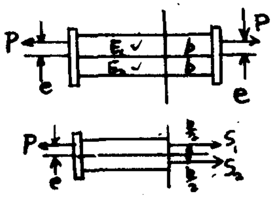

圖 1－10

$$Pe=(S_1-S_2)\cdot\frac{b}{2}\ \cdots(2)$$

$$\because\ \delta_1=\delta_2,\ \frac{S_1l}{E_1A}=\frac{S_2l}{E_2A}$$

$$\therefore\ S_1=\frac{E_1}{E_2}S_2\ \cdots\cdots\cdots(3)$$

由(1)(3)得 $S_2 = \dfrac{PE_2}{E_1+E_2}$， $S_1 = \dfrac{PE_1}{E_1+E_2}$

代入(2)得 $Pe = \dfrac{P(E_1-E_2)}{E_1+E_2} \cdot \dfrac{b}{2}$

$\therefore \quad e = \dfrac{E_1-E_2}{E_1+E_2} \cdot \dfrac{b}{2}$

1－22 AB及CD有相同之橫斷面積$A=3\ in^2$且材料相同，$P=50{,}000\ lb$，求AB及CD之應力。

解： $\Sigma M_E = 0$

$\therefore \quad S_{ab} \cdot a + S_{cd} \cdot 2a = P \cdot 3a \cdots\cdots(1)$

$\because \quad \dfrac{\delta_{cd}}{\delta_{ab}} = \dfrac{2a}{a} = 2$

$\therefore \quad \dfrac{S_{cd} \cdot l}{EA} = 2 \times \dfrac{S_{ab} \cdot l}{EA}$

$\therefore \quad S_{cd} = 2S_{ab} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(2)代入(1) $aS_{ab} + 4aS_{ab} = 3aP$

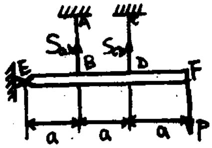

圖 1－11

$\therefore \quad S_{ab} = \dfrac{3}{5}P = 30{,}000\ lb \qquad S_{cd} = 60{,}000\ lb$

$\therefore \quad \sigma_{ab} = \dfrac{30{,}000}{3} = 10{,}000\ psi$ ；

$\sigma_{cd} = \dfrac{60{,}000}{3} = 20{,}000\ psi$

1－23 木材三塊膠接如圖，有相同之斷面積，垂直於圖之長爲8 in，設$\tau = 20{,}000\ lb$，求膠接面之平均剪應力。

解： 因膠接面受雙剪，故

$A_s = 2A = 2 \times 2 \times 8 = 32\ in^2$

$\tau = \dfrac{P}{A_s} = \dfrac{20{,}000}{32} = 625\ psi$

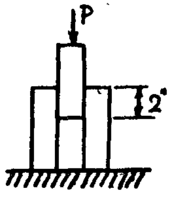

圖 1－12

1－24 求圖示螺栓之直徑，設$P = 8000\ lb$，工作剪應力$\tau_w = 13{,}000\ psi$。

解： $\tau = \dfrac{P}{A_s} = \dfrac{8,000}{2\times\frac{\pi}{4}\times d^2} \leq \tau_w$

$= 13,000$

$\therefore \quad d \geq \sqrt{\dfrac{8,000}{2\times\frac{\pi}{4}\times 13,000}}$

$\doteqdot 0.626\ in$

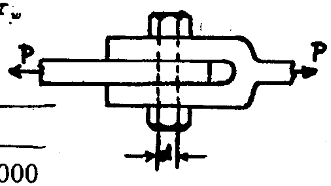

圖1－13

1－25 長 10 in 之稜柱鋼桿，以 $P = 6000\ lb$ 之力壓之，設 $E = 30\times10^6\ psi$，$A = 4\ in^2$，求其應變能，又設 $A = 2 in^2$，求其應變能。

解： 應變能 $U = \dfrac{P^2 l}{2EA}$　(a) $U = \dfrac{(6000)^2\times10}{2\times30\times10^6\times4} = 1.5\ in\text{-}lb$

(b) $U = \dfrac{(6000)^2\times10}{2\times30\times10^6\times2} = 3\ in\text{-}lb$

1－26 稜柱桿垂直懸之，求自身重量所生之應變能，以 L，E，A 及 γ 表之。

解： $S_x = \gamma A x$（習題一：1－3）

$$U = \int_0^L \frac{S_x^2\,dx}{2EA} = \int_0^L \frac{\gamma^2 A^2 x^2\,dx}{2EA} = \frac{\gamma^2 A}{2E}\int_0^L x^2\,dx$$

$$= \frac{\gamma^2 A}{2E}\cdot\frac{L^3}{3} = \frac{\gamma^2 A L^3}{6E}$$

1－27 設前題桿之底端另加軸向載荷 P，求 P 及自重所生之應變能。

解： $S_x = P + \gamma A x$

$$U = \int_0^L \frac{S_x^2\,dx}{2EA} = \int_0^L \frac{(P+\gamma A x)^2\,dx}{2EA}$$

$$= \frac{1}{2EA}\int_0^L (P^2 + 2P\gamma A x + \gamma^2 A^2 \cdot x^2)\,dx$$

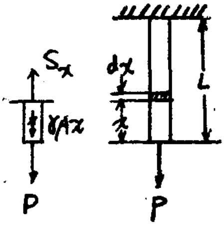

圖1－14

$$= \frac{1}{2EA}\left(P^2x + 2P\gamma A\frac{x^2}{2} + \gamma^2A^2\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^L$$

$$= \frac{1}{2EA}\left(P^2L + P\gamma AL^2 + \frac{\gamma^2A^2L^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{6EA}\left(3P^2 + 3P\gamma AL + \gamma^2A^2L^2\right)$$

1-28 求 1－7 題廻轉桿之應變能，設 $W = 0$。

解： 由習題 1－7，$W = 0$ 得 $S_x = \frac{\gamma A\omega^2}{2g}(L^2 - x^2)$

$$U = \int_0^L \frac{S_x^2\,dx}{2EA} = \int_0^L \frac{\left[\frac{\gamma A\omega^2}{2g}(L^2 - x^2)\right]^2 dx}{2EA}$$

$$= \int_0^L \frac{\gamma^2A^2\omega^4}{8g^2EA}(L^4 - 2L^2x^2 + x^4)\,dx$$

$$= \frac{\gamma^2A^2\omega^4}{8g^2EA}\left(L^4x - \frac{2L^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^L$$

$$= \frac{\gamma^2A^2\omega^4}{8g^2EA}\cdot\frac{8L^5}{15} = \frac{\gamma^2A^2\omega^4L^5}{15g^2EA}$$

$$= \frac{(\gamma AL)^2L^3\omega^4}{15g^2EA} = \frac{W_1^2L^3\omega^4}{15g^2EA}$$

習題二

應力與應變之分析

2－1 直徑 1 in 之圓棒受軸向載荷 $P=18,000\ lb$，求最大剪應力。

解： $$\tau_{max}=\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{A}=\frac{1}{2}\cdot\frac{18000}{\frac{\pi}{4}\times 1^2}=11,500\,psi$$

2－2 正方斷面 2 $in\times 2$ in 之鋼桿，其法線工作應力爲 20,000 psi，剪工作應力爲 13,000 psi，其軸向最大拉力 P 爲若干？

解： $$\sigma_{max}=\frac{P}{A}\leq\sigma_w \quad \therefore \quad P\leq A\sigma_w=2\times2\times20,000$$
$$=80,000\,psi$$

$$\tau_{max}=\frac{1}{2}\cdot\frac{P}{A}\leq\tau_w$$

$$\therefore \quad P\leq 2A\tau_w=2\times2\times2\times13,000=104,000\,psi$$

$$\therefore \quad P_{max}=80,000\,psi$$

2－3 金屬棒於室溫（ 70°F ）時固置於兩端，求溫度升至 200°F 時，斜面 Pq 上之法線應力與剪應力。設 $\alpha=6.5\times10^{-6}/°F$，$E=30\times10^6\ psi$。

解： $$\delta=\delta_t+\delta_l=\alpha l\triangle T+\frac{Pl}{EA}=0$$

$$\therefore \quad \frac{Pl}{EA}=-\alpha l\triangle T$$

$$\therefore \quad \frac{P}{A}=-\alpha E\triangle T=-6.5\times10^{-6}\times30\times10^6\times(200-70)$$
$$=-25350\,psi$$

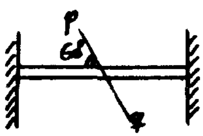

圖 2－1

$$\sigma_\theta=\frac{P}{A}\cos^2\theta=-25350\cos^2 30°=-19,010\,psi$$