数学机械化丛书

数学机械化

吴文俊 著

科学出版社
www.sciencep.com

数学机械化丛书

数 学 机 械 化

吴文俊 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是围绕作者命名的"数学机械化"这一中心议题而陆续发表的一系列论文的综述。本书试图以构造性与算法化的方式来研究数学，使数学推理机械化以至于自动化，由此减轻繁琐的脑力劳动。

全书分成三个部分：第一部分考虑数学机械化的发展历史，特别强调在古代中国的发展历史。第二部分给出求解多项式方程组所依据的基本原理与特征列方法。作为这一方法的基础，本书还论述了构造性代数几何中的若干问题。第三部分给出了特征列方法在几何定理证明与发现、机器人、天体力学、全局优化和计算机辅助设计等领域中的应用。

本书可供数学工作者，数学及计算机专业高年级大学生和研究生以及有关工程人员参阅。

图书在版编目(CIP)数据

数学机械化/吴文俊著．—北京：科学出版社，2003.3
(数学机械化丛书/吴文俊主编)
ISBN 7-03-010764-0

Ⅰ．数… Ⅱ．吴… Ⅲ．数学理论-计算机辅助计算 Ⅳ．O1-1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 063341 号

责任编辑：吕 虹 / 责任校对：柏连海
责任印制：安春生 / 封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003年3月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2003年3月第一次印刷 印张：25
印数：1—2 500 字数：466 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

《数学机械化丛书》前言①

十六七世纪以来，人类历史上经历了一场史无前例的技术革命，出现了各种类型的机器，取代各种形式的体力劳动，使人类进入一个新时代．几百年后的今天，电子计算机已可以有条件地代替一部分特定的脑力劳动，因而人类面临另一场更宏伟的技术革命，处在又一个新时代的前夕．数学是一种典型的脑力劳动，它在这一场新的技术革命中，无疑地将扮演一个重要的角色．为了了解数学在当前这场革命中所扮演的角色，应对机器的作用，以及作为数学的脑力劳动的方式，进行一定的分析．

1．什么是数学的机械化

不论是机器代替体力劳动，或是计算机代替某种脑力劳动，其所以成为可能，关键在于所需代替的劳动已经“机械化”，也就是说已实现了刻板化或规格化．正因为割麦、刈草、纺纱织布的动作已经是机械化刻板化了的，因而可据此造出割麦机、刈草机、纺纱机织布机来．也正因为加减乘除开方等运算这一类脑力劳动，几千年来就已经是机械地刻板地进行的，才有可能使得 17 世纪的法国数学家帕斯卡，利用齿轮传动造出了第一台机械计算机 —— 加法机，并由莱布尼茨改进成为也能进行乘法的机器．数学问题的机械化，就要求在运算或证明过程中，每前进一步之后，都有一个确定的、必须选择的下一步，这样沿着一条有规律的、刻板的道路，一直达到结论．

在中小学数学的范围里，就有着不少已经机械化了的课题．除了四则、开方等运算外，解线性联立方程组就是一个很好的例子．在中学用的数学课本中，往往介绍解线性方程组的各种“消去法”，其求解过程是一个按一定程序进行的计算过程，也就是一种机械的、刻板的过程．根据这一过程编成程序，由电子计算机付诸实施，就可以不仅机器化而且达到自动化，在几分钟甚至几秒钟之内求出一个未知数多至上百个的线性方程组的解答来，这在手工计算

---

① 20 世纪七八十年代之交，我尝试用计算机证明几何定理取得成功，由此并提出了数学机械化的设想．先后在一些通俗报告与写作中，解释数学机械化的意义与前景，例如 1978 年发表于《自然辩证法通讯》的“数学机械化问题”以及 1980 年发表于《百科知识》的“数学的机械化”．二文都重载于 1995 年由山东教育出版社出版的《吴文俊论数学机械化》一书．经过 20 多年众多学者的努力，数学机械化在各个方面都取得了丰富多彩的成就，并已出版了多种专著，汇集成现在的数学机械化丛书．现据 1980 年的《百科知识》的“数学的机械化”一文，稍加修改并作增补，以代丛书前言．

几乎是不可能的. 如果用手工计算, 即使是解只有三四个未知数的方程组, 也将是繁琐而令人厌烦的. 现代化的国防、经济建设中, 大量出现的例如网络一类的问题, 往往可归结为求解很多未知数的线性方程组. 这使得已经机械化了的线性方程组解法在四个现代化中起着一种重要作用.

即使是不专门研究数学的人们, 也大都知道, 数学的脑力劳动有两种主要形式: 数值计算与定理证明 (或许还应包括公式推导, 但这终究是次要的). 著名的数理逻辑学家美国洛克菲勒大学教授王浩先生在一篇有名的《向机械化数学前进》的文章中, 曾列举了这两种数学脑力劳动的若干不同之点. 我们可以简略而概括地把它们对比一下:

计　算	证　明
易	难
繁	简
刻板	灵活
枯燥	美妙

计算, 如已经提到过的加减乘除开方与解线性方程组, 其所以虽繁而易, 根本原因正在于它已经机械化. 而证明的巧而难, 是大家都深有体会的, 其根本原因也正在于它并没有机械化. 例如, 我们在中学初等几何定理的证明中, 就经常要依靠诸如直观、洞察、经验, 以及其他一些模糊不清的原则, 去寻找捷径.

2. 从证明的机械化到机器证明

一个值得提出的问题是: 定理的证明是不是也能像计算那样机械化, 因而把巧而难的证明, 化为计算那样虽繁而易的劳动呢? 事实上, 这一证明机械化的设想, 并不始自今日, 它早就为 17 世纪时的大哲学家、大思想家和大数学家笛卡儿和莱布尼茨所具有. 只是直到 19 世纪末, 希尔伯特 (德国数学家, 1862~1943) 等创立并发展了数理逻辑以来, 这一设想才有了明确的数学形式. 又由于 20 世纪 40 年代电子计算机的出现, 才使这一设想的实现有了现实可能性.

从 20 世纪二三十年代以来, 数理逻辑学家们对于定理证明机械化的可能性, 进行了大量的理论探讨, 他们的结果大都是否定的. 例如哥德尔 (Gödel) 等的一条著名定理就说, 即使看来最简单的初等数论这一范围, 它的定理证明的机械化也是不可能的. 另一方面, 1950 年波兰数学家塔斯基 (Tarski) 则证明了初等几何 (以及初等代数) 这一范围的定理证明, 却是可以机械化的. 只

是塔斯基的结果近于例外，在初等几何及初等代数以外的大量结果都是反面的，即机械化是不可能的． 1956 年以来美国开始了利用电子计算机做证明定理的尝试． 1959 年王浩先生设计了一个机械化方法，用计算机证明了罗素等著的《数学原理》这一经典著作中的几百条定理，只用了 9 分钟，在数学与数理逻辑学界引起了轰动．一时间，机器证明的前景似乎非常乐观．例如 1958 年时就有人曾经预测：在 10 年之内计算机将发现并证明一个重要的数学新定理．还有人认为，如果这样，则不仅许多著名哲学家与数学家，如皮亚诺、怀特海、罗素、希尔伯特以及图灵等人的梦想得以实现，而且计算将成为科学的皇后，人类的主人！

然而，事情的发展却并不如预期那样美好．尽管在 1976 年，美国的哈肯等人，在高速计算机上用了 1200 小时的计算时间，解决了数学家们 100 多年来所未能解决的一个著名难题 —— 四色问题，因此而轰动一时，但是，这只能说明计算机作为定理证明的辅助工具有着巨大潜力，还不能认为这样的证明就是一种真正的机器证明．用王浩先生的说法，哈肯等关于四色定理的证明是一种使用计算机的特例机证，它只适用于四色这一特殊的定理，这与所谓基础机器证明之能适用于一类定理者有别．后者才真正体现了机械化定理证明，进而实现机器证明的实质．另一面，在真正的机械化证明方面，虽然塔斯基在理论上早已证明了初等几何的定理证明是能机械化的，还提出了据以造判定机也即是证明机的设想，但实际上他的机械化方法非常繁，繁到不可收拾，因而远远不是切实可行的． 1976 年，美国做了许多在计算机上证明定理的实验，在塔斯基的初等几何范围内，用计算机所能证明的只是一些近于同义反复的“儿戏式”的“定理”．因此，有些专家曾经发出过这样悲观的论调：如果专依靠机器，则再过 100 年也未必能证明出多少有意义的新定理来．

3. 一条切实可行的道路

1976 年冬，我们开始了定理证明机械化的研究． 1977 年春取得了初步成果，证明初等几何主要一类定理的证明可以机械化．在理论上说来，我们的结果已包括在塔斯基的定理之中．但与塔斯基的结果不同，我们的机械化方法是切实可行的，即使用手算，依据机械化的方法逐步进行，虽然繁复，也可以证明一些艰深的定理．

我们的方法主要分两步，第一步是引进坐标，然后把需证定理中的假设与终结部分都用坐标间的代数关系来表示．我们所考虑的定理局限于这些代数

关系都是多项式等式关系的范围，例如平行、垂直、相交、距离等关系都是如此. 这一步可以叫做几何的代数化. 第二步是通过代表假设的多项式关系把终结多项式中的坐标逐个消去，如果消去的结果为零，即表明定理正确，否则再作进一步检查. 这一步完全是代数的，即用多项式的消元法来验证.

上述两步都可以机械与刻板地进行. 根据我们的机械化方法编成程序，以在计算机上实现机器证明，并无实质上的困难. 事实上中国科学院数学研究所某些同志以及国外的王浩先生都曾在计算机上试行过. 我们自己也曾在国产的长城 203 台式机上证明了像西摩松线那样不算简单的定理. 1978 年初我们又证明了初等微分几何中主要的一类定理证明也可以机械化. 而且这种机械化方法也是切实可行的，并据此用手算证明了不算简单的一些定理.

从我们的工作中可以看出，定理的机械化证明，往往极度繁复，与通常既简且妙的证明形成对照，这种以量的复杂来换取质的困难，正是利用计算机所需要的.

在电子计算机如此发展的今天，把我们的机械化方法在计算机上实现不仅不难，而且有一台微型的台式机也就够了. 就像我们曾经使用过的长城 203，它的存数最多只能到 234 个 10 进位的 12 位数，就已能用以证明西摩松线那样的定理. 随着超大规模集成电路与其他技术的出现与改进，微型机将愈来愈小型化而内存却愈来愈大，功能愈来愈多，自动化的程度也愈来愈高. 进入 21 世纪以后，这一类方便的小型机器将为广大群众普遍使用. 它们不仅将成为证明一些不很简单的定理的武器，而且还可用以发现并证明一些艰深的定理，而这种定理的发现与证明，在数学研究手工业式的过去，将是不可想象的. 这里我们应该着重指出，我们并不鼓励以后人们将使用计算机来证明甚至发现一些有趣的几何定理. 恰恰相反，我们希望人们不再从事这种虽然有趣却对数学甚至几何学本身也已意义不大的工作，而把自己从这种工作中解放出来，把自己的聪明才智与创造能力贯注到更有意义的脑力劳动上去.

还应该指出，目前我们所能证明的定理，局限于已经发现的机械化方法的范围，例如初等几何与初等微分几何之内. 而如何超出与扩大这些机械化的范围，则是今后需要长期探索的理论性工作.

4. 历史的启示与中国古代数学

我们发现几何定理证明的机械化方法是在 1976 至 1977 年之间. 约在两年之后，我们发现早在 1899 年出版的希尔伯特的经典名著《几何基础》中，就有着一条真正的正面的机械化定理：初等几何中只涉及从属与平行关系的

定理证明可以机械化. 当然, 原来的叙述并不是以机械化的语言来表达的, 也许就连希尔伯特本人也并没有对这一定理的机械化意义有明确的认识, 自然更不见得有其他人提到过这一定理的机械化内容. 希尔伯特是以公理化的典范而著称于世的, 但我认为, 该书更重要之处, 是在于提供了一条从公理化出发, 通过代数化以到达机械化的道路. 自然, 处于希尔伯特以及其后数学的一张纸一支笔的手工作业时代里, 公理化的思想与方法得到足够的重视与充分的发展, 而机械化的方向与意义受到数学家的忽视是完全可以理解的. 但在电子计算机已日益普及, 因而繁琐而重复的计算已成为不足道的现代, 机械化的思想应比公理化思想受到更大重视, 似乎是合乎实际的.

其次应该着重指出, 我们在从事机械化定理证明工作获得成果之前, 对塔斯基的已有工作并无接触, 更没有想到希尔伯特的《几何基础》会与机械化有任何关系. 我们是在中国古代数学的启发之下提出问题并想出解决办法来的.

说起来道理也很简单: 中国的古代数学基本上是一种机械化的数学. 四则运算与开方的机械化算法由来已久. 汉初完成的《九章算术》中, 对开平、立方与解线性联立方程组的机械化过程, 都有详细说明. 宋代更发展到高次代数方程求数值解的机械化算法.

总之各个数学领域都有定理证明的问题, 并不限于初等几何或微分几何. 这种定理证明肇始于古希腊的欧几里得传统, 现已成为近代纯粹数学或核心数学的主流. 与之相异, 中国的古代学者重视的是各种问题特别是来自实际要求的具体问题的解决. 各种问题的已知数据与要求的数据之间, 很自然地往往以多项式方程的形式出现. 因之, 多项式方程的求解问题, 也就自然成为中国古代数学家研究的中心问题. 从秦汉以来, 所研究的方程由简到繁, 不断有所前进, 有所创新. 到宋元时期, 更出现了一个思想与方法的飞跃: 天元术的创立.

“天元术”到元代朱世杰时又发展成四元术, 所引入的天元、地元、人元、物元实际上相当于近代的未知元或未知数. 将这些未知元作为通常的已知数那样加减乘除, 就可得到与近代多项式与有理函数相当的概念与相应的表达形式与运算法则. 一些几何性质与关系很容易转化成这种多项式或有理函数的形式及其关系. 这使得过去依题意列方程这种无法可循需要高度技巧的工作从此变得轻而易举. 朱世杰 1303 年的《四元玉鉴》又给出了解任意多至四个未知元的多项式方程组的方法. 这里限于 4 个未知元只是由于所使用的计

算工具（算筹和算板）的限制. 实质上他解方程的思想路线与方法完全可以适用于任意多的未知元.

不问可知，在当时的具体条件下，朱世杰的方法有许多缺陷. 首先，当时还没有复数的概念，因之朱世杰往往限于求出（正）实值. 这无可厚非，甚至在 17 世纪笛卡儿的时代也还往往如此. 但此外朱世杰在方法上也未臻完善. 尽管如此，朱世杰的思想路线与方法步骤是完全正确的，我们在上世纪 70 年代之末，遵循朱世杰的思想与方法的基本实质，采用美国数学家里特 (Ritt) 在 1932, 1950 年关于微分方程代数研究书中所提供的某些技术，得出了解任意复多项式方程组的一般算法，并给出了全部复数解的具体表达形式. 此后又得出了实系数时求实解的方法，为重要的优化问题提供了一个具体的方法.

由于多种问题往往自然导致多项式方程组的求解，因而我们解方程的一般方法可被应用于形形色色的问题. 这些问题可以来自数学自身，也可以来自其他自然科学或工程技术. 在本丛书的第一本，吴文俊的《数学机械化》一书中，可以看到这些应用的实例. 工程技术方面的应用，在本丛书中有高小山的《几何自动作图与智能 CAD 》与陈发来和冯玉瑜等的《代数曲面造型》两本专著. 上述解多项式方程组的一般方法已推广至微分方程的情形. 许多应用以及相应论著正在酝酿之中.

5. 未来的技术革命与时代的使命

宋元时代天元术与四元术的创造，把许多问题特别是几何问题转化成代数方程与方程组的求解问题. 这一方法用于几何可称为几何的代数化. 12 世纪的刘益将新法与“古法”比较，称“省功数倍”. 这可以说是减轻脑力劳动使数学走上机械化道路的一项伟大的成就.

与天元术的创造相伴，宋元时代的数学又引进了相当于现代多项式的概念，建立了多项式的运算法则和消元法的有关代数工具，使几何代数化的方法得到了有系统的发展，俱见于宋元时代幸以保存至今的杨辉、李冶、朱世杰的许多著作之中. 几何的代数化是解析几何的前身，这些创造使我国古代数学达到了又一个高峰. 可以说，当时我国已到达了解析几何与微积分的大门，具备了创立这些数学关键领域的条件，但是各种原因使我们数学的雄伟步伐就在这些大门之前停顿下来. 几百年的停顿，使我们这个古代的数学大国在近代变成了数学上的纯粹入超国家. 然而，我国古代机械化与代数化的光辉思想和伟大成就是无法磨灭的. 本人关于数学机械化的研究工作，就是在这些思想与成

就启发之下的产物，它是我国自《九章算术》以迄宋元时期数学的直接继承.

恩格斯曾经指出，枪炮的出现消除了体力上的差别，使中世纪的骑士阶级从此销声匿迹，为欧洲从封建时代进入到资本主义时代准备了条件. 近年有些计算机科学家指出，个人用计算机的出现，其冲击作用可与枪炮的出现相比. 枪炮使人们在体力上难分强弱，而个人用计算机将使人们在智力上难分聪明愚鲁. 又有人对数学的未来提出看法，认为计算机的出现，将使数学现在一张纸一支笔的方法，在历史的长河中，无异于石器时代的手工方法. 今天的数学家们，不得不面对计算机的挑战，但是，也不必妄自菲薄. 大量繁复的事情交给计算机去做了，人脑将仍然从事富有创造性的劳动.

我国在体力劳动的机械化革命中曾经掉队，以致造成现在的落后状态. 在当前新的一场脑力劳动的机械化革命中，我们不能重蹈覆辙. 数学是一种典型的脑力劳动，它的机械化有着许多其他类型脑力劳动所不及的有利条件. 它的发扬与实现对我国的数学家是一种时代的使命. 我国古代数学的光辉，都鼓舞着我们为实现数学的机械化，在某种意义上也可以说是真正的现代化而勇往直前.

吴文俊

2002 年 6 月于北京

前　言

本书作者 1977 年以来，围绕被作者命名为数学机械化的这一中心，陆续发表了一系列论著，本书实质上是这些论著的一个综合报告．所谓数学机械化，其思想实质在于以构造性与算法化的方式从事数学研究，使数学的推理过程机械化以至自动化，以尽量减少聪明才智的要求，并由此减轻艰难的重脑力劳动．

使数学机械化甚至使一切推理都自动化的愿望至少可追溯到 G. W. Leibniz(+1646, +1716)．但是，作者认为，数学机械化或更一般的推理自动化，其真正的缔造者应该是 D.Hilbert(+1862, +1943)．Hilbert 关于有限基定理的存在性证明以及数学的公理化曾取得了极大成功．Hilbert 又与当时的数学权威 L.Kronecker(+1823, +1891) 曾有激烈论争，而后者可以认为是当时构造性数学的旗手．因而 Hilbert 在数学机械化方面的功绩被长期掩盖不张．尽管如此，Hilbert 应被认为是数学机械化的真正缔造者，这应可从他在其他众多影响巨大的成就中得到印证．现举数例说明如下：

例 1. 1900 年巴黎的世界数学家大会上，Hilbert 作了关于数学问题的著名演讲，所列举的 23 个问题中，第 10 个问题是问如何找到解不定方程的自动化算法．1970 年时，苏联 21 岁的青年数学家 Y. Matijasevic 给出了算法不可能存在的否定解答．尽管如此，有关的研究却给出了对现代纯粹数学极为重要的正面结果．参阅 M. Davis 等在 Proc. Symp in Pure Mathematics 卷 28, 1976 年的综合报告．

例 2. 1899 年 Hilbert 刊行了他的经典著作《几何基础》一书，其中有一段晦涩难明的章节．在以后的多次再版中，这一段改写称定理 62. 经过适当注释，可以把这一章节解读为某种特殊类型几何定理的机械化或自动化证明．其后 1950 年波兰数学家 A. Tarski 的工作以及后人在几何定理机械化证明的许多尝试，都可视为 Hilbert 在上述初等几何的一个狭隘范围的工作的延伸．由于这一理由，作者曾把 Hilbert 书中的定理 62 重述为 Hilbert 机械化定理．

例 3. Hilbert 关于数学相容性的宏伟意愿蕴含了用一个普通的方法以自动证明数学中一切定理的庞大计划．Gödel 的发现粉碎了 Hilbert 这一过于雄心勃勃的意愿．虽然如此，Hilbert 的努力催生了一门新的数学学科——数理逻辑，并指出了一个新的途径：不管是定理求证还是问题求解，不是一个一个地证明或一个一个地解决，而是一类一类地证明或一类一类地解决，这种处理

方式在数理逻辑学界称为定理类或问题类的可判定性. 上述 Hilbert 机械化定理, 可视为可判定性的实例, 虽简单却意义深刻而值得令人深思.

除以上数例以外, 还可提到 Hilbert 的不少论文, 其中的定理往往是以构造性与算法化的方式来证明的, 举例来说, 现在关于理想的通称为 Hilbert 函数的证明就是如此. 我们还可以注意到 Hilbert 关于有限基定理的证明, 是在于求得一有限基, 而这一有限基, 也是以构造性与算法化的方式来求得的. 本书可视为遵循 Hilbert 的思想路线, 描述数学机械化理论与方法的一个初步尝试.

全书分成三个部分, 第一部分考虑数学机械化的历史发展, 特别强调在古代中国的发展情况. 这是理所应当的. 事实上, 纯粹数学的近代发展, 大体上依照了古希腊欧几里得公理化体系这一模式. 与之相反, 中国的古代数学则是高度构造性、算法性与计算性的. 很大一部分的结果, 往往以算法的形式表达. 即使在几何这一领域, 古代中国的数学, 也对几何定理及其证明不屑一顾, 而专注于几何问题与各种问题的求解. 由此自然导致多项式方程的求解. 正因如此, 多项式方程的求解问题, 在古代中国数学中占据着中心的位置, 贯穿于几千年的发展过程. 本书遵循我国古算的这一传统, 把重点集中于多项式方程的求解, 而以几何的定理求证与几何的问题求解作为它的两个主要的应用. 这个处理的方式从本书的节题可以清楚看出.

本书的第二部分, 标题是原理与方法, 分成第三、四、五章. 这一部分的目的, 在于说明解多项式方程所依据的基本原理. 这里的方程将局限于系数所在数域的特征为零. 依据所说的基本原理, 我们将指出如何发现求解任意上述多项式方程组的一般方法. 为了这一目的, 我们将放弃通常使用的理想这一概念, 而采取多项式组零点集这一朴素而又自然的概念. 通过对多项式组零点集的分析, 在基本原理的指引之下, 引导至特征集这一概念以及有关的种种原理与定理, 如整序原理, 零点分解定理与簇分解定理等. 这些原理与定理, 构成了解任意多项式方程组方法的依据. 应该指出, 我们解多项式方程组的基本原理来源于古代的中国数学, 特别是元代 1303 年时朱世杰的《四元玉鉴》这一著作. 不言而喻, 在朱的著作中有许多疏漏而不完全之处, 但他指出了解任意多项式组的正确途径. 为了弥补朱的创作中的缺陷, 我们借助了 J.F. Ritt 关于微分方程代数研究的两本经典著作. Ritt 的工作是高度构造性、算法化与计算性的. 它们奠基于 Van der Waerden 在代数几何的早期工作. Van der Waerden 的这些早期工作与以后代数几何的现代发展不同, 基本是构造性、算法性的,

而且大体上也是计算性的. 它奠基于极为有用的母点与特定化这些概念, 而这些概念已在后来的发展中消失无踪, 对此作者深表遗憾.

作为 Van der Waerden 早期方法的一个具体应用, 在本书的 §5.3 中, 我们指出如何通过母点这一概念, 对具有任意奇点的代数簇, 也可以定义所谓陈 (省身) 类与陈 (省身) 数. 虽然陈类与陈数有种种不同的推广概念, 但我们的处理方法有着独到之处. 它们是易于计算的. 举例来说, 著名的 Miyaoka – 丘不等式, 经过简易的计算, 即可推广到有任意奇点的代数簇. 而且经过计算, 中科院数学机械化研究中心的石赫还得到了一大批高维情形陈数间的不等式与等式的关系. Miyaoka – 丘不等式只是在二维无奇点曲面的一个最简单的极端情形. 以上俱见 §5.3. 关于母点概念的另一应用, 可见第三部分中的 §8.4. 这些实例说明在近代代数几何发展中已被淘汰的 Van der Waerden 早期方法的威力. 作者希望不久能给出这一早期方法的另外一些应用. 通常解多项式方程组是在复域中进行的. 但是, 当方程系数为实数时, 在实域中求解有着特别重要的意义. 一个实例是优化问题的需要, 这只有实值的解答才有意义. 在第三章中给出了一个一般的方法, 可以至少在理论上给出多项式组在复域中的全部解答. 但在实解情形, 只能取得部分成功, 答案离要求很远. 在 §5.5 中, 我们将指出, 对于有重要意义的优化问题, 可以确定一实数的有限集, 只要所求的全局最大或最小值已知存在, 则这一有限实数集的最大或最小值也就是所求优化问题的全局最大或最小值. 注意通常计算数学中用极限逼近所求得的是个别的局部的极大或极小值. 最近有实例证明, 国外文献中某些双重优化问题, 用计算数学方法加上曲折的特殊技巧, 求得所谓的全局最优化值, 其实并不是真正的全局优化值. 用我们的方法所求得的才是真正的全局最优值.

我们的全局优化方法还可以对牵涉到不等式的问题取得某些成功, 但还远不足以满意. 总之, 在实域中求解多项式组的问题, 还须进一步认真研究.

本书的第三部分的标题为应用与举例, 分成第六、七、八章. 第六章有关解多项式方程组的应用. 注意虽然本书第二部分已经说明了解系数属于零特征域的任意多项式方程组的原理与方法, 并指出至少在理论上可给出它们的全部解答, 但是这种方法有着极高的计算复杂度, 由于是符号计算, 在计算过程中往往会出现极其庞大的多项式, 使计算难以进行到底. 看来唯一的出路在于寻找某种混合算法, 融合符号计算与数值计算于一体, 使两者优势互补. 在 §6.2 中, 我们提出了这样的一种混合算法. 这一算法有着牢固的理论基础. 作者相信, 在实际中产生的多种多样的多项式方程组求解问题, 通过这一混合算

法，应大体上都可获得解决．但我们还缺少实践，还需要真正的实例来证明这一点．第三部分的第七章讨论几何定理的机械化证明，它将作为解多项式方程组的一般原理与方法的一个具体应用来处理．第三部分的第八章则讨论形形色色的问题，它们表面上看来与多项式方程组不相干，但却可以通过某种方法引导至解适当的多项式方程组，然后用我们的一般方法来处理．

作为数学机械化的初步起步，本书对方程的求解全部局限于多项式的情形．对于在几何定理证明与几何问题求解上的应用，也只是限于初等几何即不牵涉到微分运算的那部分几何学．但在 §8.5 中，我们将约略提出把本书的理论与方法推广至微分几何与微分方程的可能发展，对于数学机械化在微分情形以及在数学其他领域中的研究，我们将俟诸异日．

作者在此对科学技术部 (前身为国家科委)，国家自然科学基金委员会，以及中国科学院表示诚挚的谢意．没有他们在精神上的鼓励与组织上的支持，以及经济与设备方面的资助，数学机械化的研究是无法进行的，更不用说能像今天那样在国内如此繁荣了．相信今后数学机械化的发展，还将一如既往，获得多方面的支持．作者对在数学机械化道路上多年来志同道合共同奋斗的许多好友，特别是对于中国科学院数学与系统科学研究院数学机械化研究中心的许多同甘苦共患难的同事们致以最真挚的感谢．由于人数众多，而且其中很大一部分都已散见于本书的各个章节，他们的姓名在此就不再一一列举了．

吴文俊

2002 年 5 月于北京

中国科学院科学出版基金资助出版

《数学机械化丛书》获国家基础研究发展规划项目“数学机械化与自动推理平台”与“数学机械化应用推广专项经费”资助

《数学机械化丛书》编委员会

目　　录