泛函微分方程与测度微分方程

徐远通编著

中山大学出版社

泛函微分方程与测度微分方程

徐远通 编著

中 山 大 学 出 版 社

1 9 8 8 年

全书共十章，分两大部分。前五章介绍泛函微分方程理论，后四章介绍测度微分方程理论，最后一章介绍了测度微分方程在最优控制、生物学、经济学等领域的应用。

本书可作为研究生教材，也可作数学系高年级教材或教学参考书，对从事系统工程、自动控制、生物数学、经济数学研究的科技人员也有很大的参考价值。

泛函微分方程与测度微分方程

徐远通　编著

*

中山大学出版社出版
广东省新华书店经销
广州红旗印刷厂印刷

*

850×1168毫米　32开本　9.75印张　23.4万字
1988年9月第1版　1988年9月第1次印刷
印数：1—2000册
ISBN 7-306-00071-3/O·5
统一书号：13339·31　定价：2.20元

序　　言

现代的许多科学领域中，经常采用常微分方程作为数学工具描述各种客观规律。随着科学研究逐步深入，为适应客观世界的复杂性和多样性，常微分方程这一工具也不断发展和演变。本书，将介绍当代正在发展起来的两类微分方程：泛函微分方程与测度微分方程。

一般常微分方程描述的客观现象，总是假定事物在每个时刻发展变化的趋向仅由当时的状态决定。但客观世界有许多现象并非如此，事物在每个时刻发展变化的趋向不但依赖当时的状态，而且还取决于该时刻的前后一段时间的状态。自18世纪末以来，在连续体力学、种群生态学、电子学、核反应堆动力学、经济学及现代控制论等领域都发现具有上述现象的大量事实。例如，Volterra 在研究捕食动物与被捕食动物的生态模型时，考察过方程

$$\dot{x}(t)=[\alpha_1-\beta_1 y(t)-\int_{-r}^{0}F_1(\theta)y(t+\theta)d\theta]x(t),$$

$$\dot{y}(t)=[-\alpha_2+\beta_2 x(t)+\int_{-r}^{0}F_2(\theta)x(t+\theta)d\theta]y(t);$$

Levin 和 Nohel 等人在研究核反应堆燃料循环的理论时曾考虑方程

$$\dot{x}(t)=-\int_{t-r}^{t}a(t-u)g(x(u))du;$$

Красовский在研究最优控制理论时讨论了系统

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\quad y(t)=Q(t)x(t),$$
$$\dot{u}(t)=\int_{-r}^{0}[d_{\theta}\eta(t,\ \theta)]y(t+\theta)\ +\int_{-r}^{0}[d\ \mu(t,\ \theta)]u(t+\theta);$$

Driver 在电动力学方面研究过方程

$$\dot{x}(t)=f_1(t,\ x(t),\ x(g(t)))+f_2(t,\ x(t),\ x(g(t)))\dot{x}(g(t));$$

Brayton研究无损耗传输线连接问题时引入了方程

$$\dot{x}(t)-k\dot{x}\left(t-\frac{2}{S}\right)=f\left(x(t),\ x\left(t-\frac{2}{S}\right)\right);$$

在许多数学分支研究过程中也会遇到这样一类方程，如 Cherwell 在研究质数分布问题时对于质数密度导出了方程

$$Z'(n)=-Z(n)Z(\sqrt{n})/2n;$$

Poisson 也曾提出一个几何问题，要求曲线满足方程

$$x^2(t)+x^2(t)[\dot{x}(t)]^2=a+x^2(t+x(t)\dot{x}(t)),$$

上述这些数学模型所用的微分方程已不是经典的常微分方程，它不但含有自变量 t，还含有象 $t-\tau(t)$这样的带有滞量的变元，这些变元并非新的独立变量，所以这类方程也不是偏微分方程。自1959年以后，H. H. Красовский 用泛函分析观点对这类方程作了创造性的研究，把它们写成标准形式的方程，方程的右端是定义在某个函数空间中的泛函，它一般与自变量 t 有关，并且还依赖于轨线段，因此，称为泛函微分方程。在70年代，J. K. Hale 等进一步使若干基本概念精确化。目前较普遍的方程形式是

$$\dot{x}=f(t,\ x_t)\ \text{或}\ \frac{d}{dt}D(t,\ x_t)=f(t,\ x_t),$$

前者称为滞后型泛函微分方程，后者称为中立型泛函微分方程。

由于方程的解映射是在无穷维空间上考虑的，与常微分方程相比，性质上有很多差别。80年代以来，在研究无穷延滞泛函微分方程中，这种差别揭示得更为明显。因此，无论是从数学理论的发展还是从实际应用的需要来考虑，对这类方程的各种性质，诸如解的存在性、唯一性、可延拓性、稳定性以及线性系统、周期系统的性质等等，都有必要作专门的探讨研究。我们将在本书的前五章介绍和论述这方面的问题。

本书的后半部分将考虑另一个方面的问题。众所周知，一个用常微分方程描述的系统受到扰动时，假如扰动是连续或者可积的，则扰动后的系统仍是常微分方程，解仍是连续的。但是，如果扰动是脉冲型的，那么，扰动后系统的状态就不是随时间连续变化，而是呈现一种瞬动的性态。对这类数学模型的研究导出另一类方程，即测度微分方程。其一般形式可写为

$$Dx = F(t, x) + G(t, x)Du$$

这种方程所含的导数是分布导数，解将不是连续的。在客观世界中，含有瞬动性态的现象不胜枚举，例如，生物体中的心脏跳动、血液循环、神经网络活动等都有瞬动性态。在最优控制问题中若控制函数$u(t)$是脉冲型的，控制系统同样会产生瞬动性态，描述这样的系统就需采用测度微分方程

$$Dx = f(t, x, u) + g(t, x, u)Du,$$

甚至，对于随机现象的数学模型，例如Itô随机微分方程

$$dx = f(t, x)dt + g(t, x)dw(t)$$

其中，w是在欧氏空间中可分的维纳过程（布朗运动），这种方程解性态的研究也和测度微分方程有紧密的联系。由于测度微分方程的解一般是有界变差函数，其瞬动性态用经典方法便显得难以分析，因此，需要利用泛函分析和测度论方法作恰当的描述。本书将就测度微分方程的解存在性、唯一性、有界性、稳定性及

渐近等价性、线性瞬动系统基本性质等方面作专门的介绍和研究。同时，还将用实际应用的例子作一些有趣的讨论。

泛函微分方程和测度微分方程在近十多年来有迅速的发展，基本理论逐步成熟，在应用方面也越来越显示这些数学工具的重要性，并提出许多有趣的数学问题，因而对这领域的研究将有广阔的前景。

本书的意图是向读者介绍两类方程有关的基本理论，以便于掌握这领域研究的主流，或掌握这些数学工具有关技巧应用于其它的实际工作。本书要求读者应具有一定的微分方程、实变函数和泛函分析方面的基础知识，但对于较深入或较专门的知识都尽量详述，以方便读者。本书可作为研究生教材，也可用作数学系高年级选修课的教材或参考书。

由于作者水平所限，编写时间仓促，缺点错误在所难免，诚恳希望读者及时赐教。

作　者

目　　录

第一章

滞后型泛函微分方程基本性质

在这一章，我们介绍一类最基本又较简单的泛函微分方程——滞后型泛函微分方程。这类方程的特点是，所考察的当前发展趋向依赖于以前的历史状况，就是存在着时间滞后的现象。它是在常微分方程、微分差分方程及带有滞后变元的微分方程基础上自然推广而来的，由 H. H. Красовский首先提出，J. K. Hale作出精确定义。本章将叙述这类方程有关的概念及解的各种基本性质。

§1 基本概念

首先，设R^n是实域上的n维欧氏空间，令$C([a,b], R^n)$表示$[a,b]$映射入R^n的连续函数所构成的Banach空间。对于$\phi\in C([a,b], R^n)$，其范数为

$$\|\phi\| = \sup_{a\leq\theta\leq b}|\phi(\theta)|$$

特别，对非负实数$r\geqslant 0$，我们记$C=C([-r,0],R^n)$，称为状态空间（或相空间）。

设$R=(-\infty,\infty)$，对$A\geqslant 0,\sigma\in R,x\in C([\sigma-r, \sigma+A],R^n)$，我们对任何$t\in[\sigma,\sigma+A]$，定义$x_t$如下：

$$x_t(\theta)=x(t+\theta), \quad -r\leqslant\theta\leqslant 0$$

显然，$x_t\in C$。

若D是$R\times C$的一个子集，$f:D\to R^n$是给定的泛函，则称方程

$$\dot{x}=f(t,x_t) \qquad (1.1)$$

是集合D上的滞后型泛函微分方程(retarded functional differential equation，简记为RFDE)。这里，“$\dot{x}$”表示x对t的右导数。

定义1.1 如果存在$\sigma\in R,A>0$及$x\in C([\sigma-r,\sigma+A),R^n)$，对于$t\in[\sigma,\sigma+A)$有

i) $(t,x_t)\in D$,

ii) $\dot{x}(t)=f(t,x_t)$

就称x是方程(1.1)在$[\sigma-r,\sigma+A)$上的一个解。

定义1.2 如果对给定的$\sigma\in R$及$\phi\in C$，存在$A>0$，$x\in C([\sigma-r,\sigma+A)$，$R^n)$满足

i) x是方程(1.1)在$[\sigma-r,\sigma+A)$上的一个解，

ii) $x_\sigma=\phi$,

就称x是方程(1.1)通过(σ,ϕ)的解，记为$x(\sigma,\phi,f)(t)$。

值得指出的是，这里定义的滞后型泛函微分方程(1.1)是具有普遍性的一类方程。当泛函f选取各种特定形式时，可化为各式各样的微分方程。比如：

1)若对$(t,\phi)\in D$，泛函f定义为

$$f(t,\phi)=F(t,\phi(0))$$

其中$F:R\times R^n\to R^n$是已知的函数，则方程(1.1)化成一般的常微分方程

$$\dot{x}(t)=F(t,x(t))$$

2)若对$(t,\phi)\in D$及$r>0$，泛函f定义为

$$f(t,\phi)=F(t,\phi(0),\phi(-r))$$

其中$F:R\times R^n\times R^n\to R^n$是已知的函数，则方程(1.1)化成微分差分方程

$$\dot{x}(t)=F(t,x(t),x(t-r))$$

3)若对$(t,\phi)\in D$及$r>0$，泛函f定义为

$$f(t,\phi)=F(t,\phi(0),\phi(-\tau(t)),\cdots,\phi(-\tau_p(t)))$$

其中$F:R\times R^n\times\cdots\times R^n\to R^n$，$0\leqslant\tau_i(t)\leqslant r$，$i=1,2,\cdots,p$，则方程(1.1)化成带有界滞后变元的微分方程

$$\dot{x}(t)=F(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_p(t)))$$

4)若对$(t,\phi)\in D$及$r>0$，泛函f定义为

$$f(t,\phi)=\int_{-r}^{0}g(t,\theta,\phi(\theta))d\theta$$

其中g是已知函数，则方程(1.1)化为微分积分方程

$$\dot{x}(t)=\int_{-r}^{0}g(t,\theta,x(t+\theta))d\theta$$

和常微分方程一样，滞后型泛函微分方程也可分为线性与非线性、自治与非自治等各类方程。如果泛函f可表示为

$$f(t,\phi)=L(t,\phi)+h(t)$$

其中$L(t,\phi)$当t固定时是ϕ的线性泛函，而h是在$[\sigma,\infty)$每个紧集上 Lebesgue 可积的函数，则称方程(1.1)是线性滞后型泛函微分方程，简称线性方程。若$h\neq 0$，称为线性非齐次方程；若$h\equiv 0$，称为线性齐次方程。此外，如果泛函f不依赖于t，则称方程(1.1)是自治的。

对于线性齐次的自治方程，根据 Riesz 表示定理，若泛函f连续，则可表为

$$f(\phi)=\int_{-r}^{0}[d\eta(\theta)]\phi(\theta)$$

其中$\eta(\theta)$是$n\times n$有界变差矩阵，积分是 Stieltjes 积分。此时，方程形状为

$$\dot{x} = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)] x_t(\theta)$$

类似地，非自治线性方程有时也写成

$$\dot{x} = \int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(t,\theta)] x(t+\theta) + h(t)$$

作为一个特例，我们来考虑$n=1$时的线性齐次自治方程，如果取有界变差函数为

$$\eta(\theta) = \begin{cases} 0 & (\theta = -r) \\ b & (-r < \theta < 0) \\ a+b & (\theta = 0) \end{cases}$$

这里，a和b是常数，用这个$\eta(\theta)$定义泛函f，对任何$\phi \in C$，可算得

$$f(\phi) = \int_{-r}^{0} [d\eta(\theta)] \phi(\theta)$$

$$= \lim_{\max \Delta\theta_K \to 0} \sum \phi(\xi_K)[\eta(\theta_K) - \eta(\theta_{K-1})]$$

$$= a\phi(0) + b\phi(-r)$$

这时的方程实际是微分差分方程

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-r)$$

从这里看到，线性的微分差分方程可作为线性的滞后型泛函微分方程的一种特例，今后，有些结论可以用它作为特殊情形来验证。

§2 解的存在性与唯一性

本节，我们利用Schauder不动点定理讨论滞后型泛函微分方程解的存在性，对解的唯一性将证明一个结论，并用实际例子说明一下泛函微分方程对解唯一性的要求与常微分方程不同之

处.

引理1.1 若$x\in C([\sigma-r,\ \sigma+\alpha],\ R^n)$，且$\alpha>0$，则$x_t$对$t\in[\sigma,\ \sigma+\alpha]$是连续的.

【证】 由于x在$[\sigma-r,\ \sigma+\alpha]$上连续，故在$[\sigma-r,\sigma+\alpha]$上一致连续，对任何$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得$t,\ \ \tau\in[\sigma-r,\ \sigma+\alpha]$及$|t-\tau|<\delta$时

$$|x(t)-x(\tau)|<\varepsilon$$

因为对$\theta\in[-r,\ 0]$有$|(t+\theta)-(\tau+\theta)|=|t-\tau|<\delta$，所以仍有

$$|x(t+\theta)-x(\tau+\theta)|=|x_t(\theta)-x_\tau(\theta)|<\varepsilon$$

因此可知

$$\|x_t-x_\tau\|=\sup_{-r\leq\theta\leq 0}|x_t(\theta)-x_\tau(\theta)|\leqslant\varepsilon$$

引理得证.

引理1.2 若f是D上的连续泛函，对给定的$(\sigma,\phi)\in D$，初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,x_t) & (t\geqslant\sigma)\\ x_\sigma=\phi\end{cases}$$

等价于求解积分方程

$$\begin{cases}x(t)=\phi(0)+\int_\sigma^t f(s,\ x_s)ds, & t\geqslant\sigma\\ x_\sigma=\phi\end{cases}\tag{1.2}$$

【证】 若$x(t)\in C([\sigma-r,\sigma+A),R^n)$是方程(1.1)过$(\sigma,\phi)$的一个解，则

$$\dot{x}(t)\equiv f(t,x_t),\ \ t\geqslant\sigma$$

这时，由于$x(t)$连续，而从引理1.1知x_t对t连续，故$f(t,x_t)$对t连续，即右导数$\dot{x}(t)$连续，于是必有

$$\int_\sigma^t\dot{x}(s)ds=x(t)-x(\sigma)\quad(t\geqslant\sigma)$$

为证明上式成立，令 $F(t)=x(t)-x(\sigma)-\int_\sigma^t \dot{x}(s)ds$，往证 $F(t)\equiv 0$，若不然，则存在 $0\leqslant k\leqslant n$，有 $t_0>\sigma$，使 $F_k(t_0)\neq 0$，不妨设 $F_k(t_0)<0$，记

$$G(t)=F_k(t)-F_k(t_0)\frac{t-\sigma}{t_0-\sigma}$$

由于 $G(t_0)=G(\sigma)=0$ 及 $\dot{F}_k(t)\equiv 0$，推知 $\dot{G}(t)=-\frac{F_k(t_0)}{t_0-\sigma}>0$.

所以 G 在 $[\sigma,t_0)$ 内某点有正的最大值，设在 τ 达到，则 $\dot{G}(\tau)\leqslant 0$，此与 $\dot{G}(t)>0$ 矛盾，故要证的等式是成立的。

计及 $x(\sigma)=x_\sigma(0)=\phi(0)$，于是

$$\int_\sigma^t \dot{x}(s)\,ds=x(t)-\phi(0)=\int_\sigma^t f(s,x_s)ds,\quad x_\sigma=\phi.$$

即 $x(t)$ 满足积分方程(1.2)。

反之，若 $x(t)$ 满足(1.2)，则 $x(t)$ 是连续的，利用引理1.1又知 x_t 对 t 连续，从而积分方程右端对 t 可微，且

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t),\quad x_\sigma=\phi$$

引理得证。

引理1.3 若 f 是 D 上的连续泛函，给定 $(\sigma,\phi)\in D$，令

$$\hat{\phi}(t)=\begin{cases}\phi(t-\sigma) & t\in[\sigma-r,\sigma]\\ \phi(0) & t\in[\sigma,\sigma+\alpha]\end{cases}\tag{1.3}$$

则 $x\in C([\sigma-r,\sigma+\alpha),R^n)$ 是方程(1.1)通过 (σ,ϕ) 的解等价于

$$y(t)=x(t+\sigma)-\hat{\phi}(t+\sigma),\quad t\in[-r,\alpha)$$

是下述积分方程的解

$$\begin{cases}y(t)=\int_0^t f(\sigma+s,\ \hat{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds & (t\geqslant 0)\\ y_0=0\end{cases}\tag{1.4}$$

【证】若$x(t)$是(1.1)通过(σ,ϕ)的解，由引理1.2知

$$x(t)=\phi(0)+\int_{\sigma}^{t}f(s,x_s)ds,\ \ x_{\sigma}=\phi$$

因$\hat{\phi}_{\sigma}=\phi$，故$x_{\sigma}=\hat{\phi}_{\sigma}$。注意到$y_s=x_{\sigma+s}-\hat{\phi}_{\sigma+s}$，从而

$$y_0=x_{\sigma}-\hat{\phi}_{\sigma}=0$$

又因$t\geqslant 0$时$\hat{\phi}(t+\sigma)=\phi(0)$，按$y(t)$的定义，

$$\begin{aligned}y(t)&=x(t+\sigma)-\phi(0)\\&=\phi(0)+\int_{\sigma}^{t+\sigma}f(s,x_s)ds-\phi(0)\\&=\int_0^t f(\sigma+s,\ x_{\sigma+s})ds\\&=\int_0^t f(\sigma+s,\hat{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds,\end{aligned}$$

反之，若$y(t)$是(1.4)的解，从$y_0=x_{\sigma}-\hat{\phi}_{\sigma}=x_{\sigma}-\phi=0$，知$x_{\sigma}=\phi$，而对$t\geqslant 0$有

$$x(t+\sigma)=y(t)+\hat{\phi}(t+\sigma)=y(t)+\phi(0)$$

因此，对$t\geqslant\sigma$，

$$\begin{aligned}x(t)=y(t-\sigma)+\phi(0)&=\int_0^{t-\sigma}f(\sigma+s,\hat{\psi}_{\sigma+s}+y_s)ds+\phi(0)\\&=\phi(0)+\int_0^{t-\sigma}f(\sigma+s,x_{\sigma+s})ds=\phi(0)+\int_{\sigma}^{t}f(s,x_s)ds\end{aligned}$$

根据引理1.2知$x(t)$是方程(1.1)通过(σ,ϕ)的解，引理得证。

引理1.4（Schauder不动点定理） 若D是Banach空间X的有界凸闭子集，而$T:D\to D$是全连续映射，则T在D内至少有一个不动点。

下面，我们将证明滞后型泛函微分方程解的存在定理。这里，用$C(\Omega,R^n)$表示连续泛函$f:\Omega\to R^n$的集合所构成的空间。又用$C^{\circ}(\Omega,R^n)$表示有界连续泛函$f:\Omega\to R^n$的集合所构成的空间。

定理1.1（解的存在性定理） 设开集$\Omega\subset R\times C$，$f\in C(\Omega,$