高等學校教學用書

結構靜力學

（第二册）

A·B·達爾科夫
B·И·庫滋聶錯夫
合著

人民鐵道出版社

高等學校教學用書

結 構 靜 力 學

(第 二 册)

A・B・達爾科夫
B・И・庫滋聶錯夫 合著
俞 忽 譯

人 民 鐵 道 出 版 社
一九五五年・北京

本書經蘇聯高等教育部認可作爲鐵路運輸學院的教科書。現譯本是依據該書第四版重寫本譯成，比較前幾次版本增加了一部分新的材料，又增訂了各個章節，可供各種結構工程技術工作人員研究參考之用。

原書共十三章，現譯本分爲三冊出版，此外並將譯者俞忽先生的補充教材彙集爲參考資料另訂一冊，共成四冊。本第二冊包括力的彈性工和求偏移的通常方法，力法和它在計算最簡單的靜不定結構方面的用途，連續梁，實心拱四章。

結 構 靜 力 學

（第二冊）

СТАТИКА СООРУЖЕНИЙ

蘇聯 А. В. ДАРКОВ 及 В. И. КУЗНЕЦОВ 合著

蘇聯國家鐵路運輸出版社（一九五一年莫斯科俄文版）

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ТРАНСПОРТНОЕ

ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

Москва 1951

俞 忽 譯

責任編輯 陳思誠

人民鐵道出版社出版（北京市霞公府十七號）

北京市書刊出版營業許可證出字第零壹零號

新 華 書 店 發 行

人民鐵道出版社印刷廠印（北京市建國門外七聖廟）

一九五五年十月初版 第一次印刷 平裝印1—1,580冊

書號：396 開本：787×1092 1/16 印張 9 203千字 定價（8）1.29元

第二冊目錄

第六章　力的彈性工和求偏移的通常方法

第七章　力法和它在計算最簡單的靜不定結構方面的用途

第八章　連續梁

第九章 實 心 拱

第六章 力的彈性工和求偏移的通常方法

41. 小 引

設計許多靜定建築的時候，不但須要求得他的內部的應力，往往也要求得他在荷重作用之下發生的彈性偏移。

計算靜不定的結構時須成立各種形變方程式，這些方程的裏面的各項都是和各點的偏移有關係的。

任何彈性結合體的偏移都可用這一章裏叙述的通用方法求得，他的根據就是偉大的俄國科學家M.B.Ломоносов發現的能力不滅律。

我們首先把關於結構上面的外力和內力所做的工的廣泛觀念說一說，以後再叙述偏移的求法。

§42. 外力所做的工

逐漸的緩緩的放在任何一個結構上面的荷重，喚做靜力荷重，這種荷重放在結構上的時候，結構上面不會發生任何振動。

圖 263 表示一根懸臂梁，他的自由端有一個靜力荷重 P. 把這個靜力荷重放在梁上的時候，他的數值從零增加到他的最後數值須經過很長的時間。在實際情形之下，如果荷重 P 作用的時候，發生形變的物體上面產生的惰性力比在結構上面作用的任何力都渺小的話，這個荷重 P 就可當做靜力荷重看待。這樣我們可以不算惰性力，在這個梁上，在任何時間，外力和梁上的彈性力是互相平衡的，就是說結構上面建立了彈性的靜力平衡。

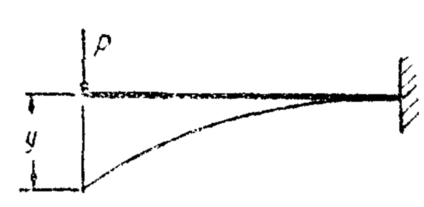

圖 263

研究彈性偏移的時候，我們假定，偏移和荷重中間有直線的聯繫，因此豎向偏移 y_x 和 P_x 力有下面方程式的關係：

$$y_x = \alpha P_x.$$

這裏 α 是一個常數，表示逐漸長成的靜力 P_x 和偏移 y_x 的關係。在特殊情形之下，在

一根懸臂梁的上面，如果荷重力放在自由端，這個係數 $\alpha = \dfrac{l^3}{3EI}$。

我們拿y代表和力的最後值P相應的偏移 y_x 的最後值。

我們要知道懸臂梁的自由端得到他的最後的偏移y 之後，P力做了多少的工。

爲了這個，我們可設想偏移y是許多非常小的偏移 dy 積聚成功的。在每一個小偏移dy發生的時候，我們可假定在梁上作用的力P_x固定不變(就是說不算dP_x 項)，成立微分工的算式：

$$dT = P_x dy。$$

把這個公式從偏移的起始值積分到他的最後值，就是說從零積分到y。同時利用y_x和P_x的關係，就把逐漸長成的靜力P 所做的工的全值求得了：

$$T = \int_0^y P_x dy = \int_0^y \frac{y_x}{\alpha} dy = \frac{y^2}{2\alpha},$$

但是
$$y = P\alpha.$$

因此
$$T = \frac{1}{2} Py.$$

這個工不等於Py (就是一數值固定之力P 把它的作用點移動了一個距離y所作之工)，前面有一個系數$\frac{1}{2}$，凡是逐漸長成的靜力，同時力和偏移有直線的關係時結果都是如此。

在另一方面，在偏移增長過程的中間，荷重是時時在那裏改變的，從他的零值增加到他的最後數值。因此我們的懸臂梁的自由端經過的路程裏面，因爲偏移和荷重有直線的關係，任何一很小部份dy都有一個和他相應的力P_x。這個 P_x 值總是小於這個力的最後數值P。只有在梁的自由端經過他的路程的最後的很小部份dy 的時候（如果我們可以這樣說的話），他才達到他的『最後』數值 P。因爲這樣，公式內的$P/2$ 值可以當做 P 力在他的逐漸成長的過程中間的平均值。我們可以說，在這條路線作用的力彷彿不是一個從零逐漸增加到他的最後值P的P_x 力，卻是一個數值始終固定的力 $P/2$。這裏須要說明工等於力和力的作用點在力作用方向裏面經過的距離的乘積。在各種情形之下，y 總是等於 P 力的作用點的總偏移在 P 力的作用線上的投影。譬如 P 力的方向和橫平線中間有一個 α 角時（圖 264）偏移 y 須用實在的偏移 aa_1 對力 P 的方向的投影的長度 ab 去量。

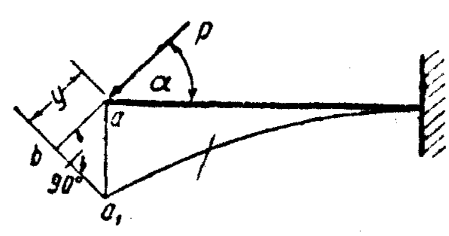

圖 264

如果在一個結構上面作用的是一個力矩等於M的力偶（集中彎矩），工的公式可用同樣的方法求得。當然囉，我們須用和集中彎矩相關的偏移，就是彎矩作用的桿子的截面的角度偏移。

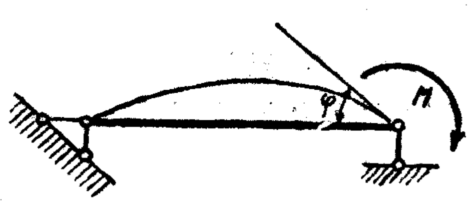

圖 265

譬如在圖 265 表示的梁上面作用的靜力彎矩所做的工是

$$T=\frac{1}{2}M\varphi,$$

這裏φ是彎矩M作用的那一個橫截面旋轉的角度的弧度值。

因此**在任何彈性結構上面作用的靜力所做的工等於這個力的最後值和與這個力相應的偏移的最後值的乘積的一半**。爲了要把剛才得到的結論推廣一下，以後我們用『力』這一個名詞的時候，我們指的是在彈性結構上面作用的任何因數，就是說我們指的不一定是集中力，也可能是彎矩，也可能是分佈荷重（强度依照任何規律改變的分佈荷重），也可能是各種因素併合在一起。

同時我們也把名詞『偏移』推廣一下；作工的是那一種『廣義的力』，我們就用那一種廣義的偏移。和集中力相應的是地位偏移，和彎矩相應的是角度偏移，和包括好幾種荷重的『廣義力』相應的是『廣義偏移』。

最後我們要說，上面推得的和下面還要作出的結論只限於很小很小的偏移，在這種偏移發生之後，結構的基本尺寸是沒有改變的。

§43. 內 力 所 做 的 工

譬如這裏有一根桿子或幾根桿子構成的彈性結構，上面有任何廣義的靜力荷重。在這些荷重作用的結果，這個結構的任一根桿子的橫截面上面就發生內力，同時也發生相應的形變，因此內力在他生長過程的中間（外力增高的時候，內力也跟着增加）完成一定數量的工。

彈性結構發生形變時，消耗在其他方面的工，如克服內摩擦力，發生熱度，改變物體的磁性和其他物性等等都很小，可以不算。根據能力不滅律，外力所作的工在數目值上應該和內力所做的工相等，這樣在外來荷重移走之後，物體完全恢復他原來的形狀和尺寸。在恢復過程的中間，內力所做的工和以前外力在他上面所花費的工相等。

這樣，彈性物體有儲蓄能的能力。這個能力就喚做形變的位能，通常拿字母U來表示。

位能U的公式可以這樣求得。在桿的上面拿兩個和桿的軸線垂直的橫截面把他的一個很小的短段ds分離開來（圖266）。在普通情形之下如果外力是在一個平面裏面作用的話，在這個短段上面作用的大概有一個軸向力N，一個彎矩M和一個剪力Q，這三個分力對於這短段的ds發生的影響可以分開來研究。

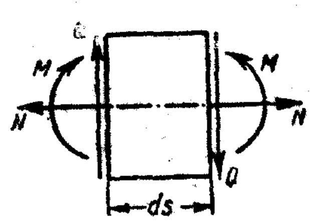

圖 266

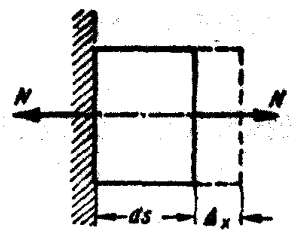

圖 267

圖267表示短段 ds 上面只有

軸向力 N。假定他的左橫截面固定不動，他的右橫截面在這個軸向力的影響之下一定要向右移動，移動的尺寸是

$$\Delta_x = \frac{N ds}{EF},$$

這裏 EF 是桿的橫截面在張力（或壓力）作用之下的剛度。逐漸長成的靜力 N 在橫截面發生這個偏移之後所做的工是

$$dU_N = \frac{1}{2} N \Delta_x = \frac{N^2 ds}{2EF}。$$

短段 ds 在彎矩 M 的影響之下（圖268），他的兩端兩個橫截面必定發生相對的角度旋轉。如果他的左方的橫截面固定不動，這個相對的角度旋轉就等於右方的橫截面的角度旋轉，就是說等於 $\Delta\varphi$ 角，這個角的大小可從下面的公式求得：

$$\Delta_\varphi = \frac{M ds}{EI},$$

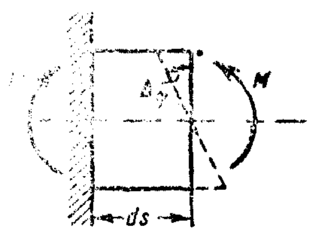

圖 268

這裏 EI 是桿的橫截面在彎矩作用之下的剛度。逐漸長成的靜力彎矩在橫截面發生這個角度偏移之後所做的工是

$$dU_M = \frac{1}{2} M \Delta_\varphi = \frac{M^2 ds}{2EI}。$$

圖269，a表示短段 ds 上面有一個剪力 Q。把他的左橫截面固定起來（圖269，б），再把由剪力 Q 在右方的橫截面上面各點產生的小剪力放在各點。這些小剪力的大小是依照下面的公式改變的

$$\tau dF = \frac{QS}{Ib} dF,$$

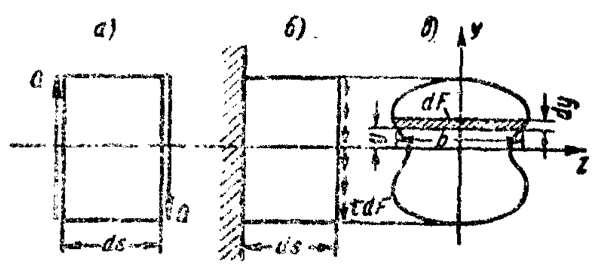

圖 269

這裏 dF 是兩端的橫截面的一條非常狹的橫條的面積（圖 269.в），橫條和橫截面的惰性主軸 Z 的距離是 y；

S 是橫條上方或下方的橫截面面積對於 Z 軸的靜力距。

短段 ds 的兩端兩個橫截面上面有兩條同樣的橫條（就是和 Z 軸有同樣的距離的橫條），在剪力作用之下有相對的移動，如果我們把左方橫截面固定起來，這個相對的移動就等於右方橫條的移動，移動的尺寸是

$$\gamma ds = \frac{\tau ds}{G},$$

這裏 γ 是相對的角度改變。

橫條發生這個小移動γds之後，橫條上面的非常小的剪力τdF所做的工是

$$1/2\ \tau\ dF\ \gamma\ ds_{\circ}$$

把這個公式在橫截面的全面積F上面積分起來，就得剪力Q在短段 ds 上面所做的工的全部：因此

$$dU_Q=\int_F \frac{1}{2}\tau\ dF\ \gamma\ ds=\int_F \frac{\tau^2 ds dF}{2G}=\int_F \frac{Q^2S^2}{I^2b^2}\cdot\frac{ds}{2G}dF=$$

這裏

$$=\frac{Q^2ds}{2GI^2}\int_F \frac{S^2}{b^2}dF=\mu\frac{Q^2ds}{2GF},$$

$$\mu=\frac{F}{I^2}\int_F \frac{S^2}{b^2}dF.$$

在上面這個方程式的裏面，μ 是一個無名係數，是橫截面上面剪力強度**沒有均勻分**佈的結果，和桿的橫截面的形狀有關係；

GF 是橫截面在剪力作用之下的剛度。

拿 Δy 來代表$\frac{Qds}{GF}$，那麼dU_Q 的公式就要變成下面的形式：

$$dU_Q=\mu\frac{1}{2}Q\,\Delta y.$$

這裏 Δy 是橫截面上面的剪力強度 **均勻分佈** 的時候，短段ds 的兩端兩個橫截面的相對移動，在這種情形之下，各點的剪力強度 τ 都等於$\frac{Q}{F}$。

如果我們的橫截面是一個矩形$b\times h$，那麼

$$F=bh;\quad I=\frac{bh^3}{12};\quad S=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right),$$ 同時b值不改變。

代入μ的公式，然後積分，我們得$\mu=1.2$.

如果橫截面是圓形，$\mu=\frac{32}{27}$。

在工形橫截面上面，係數μ的近似值可用下面的公式求得：

$$\mu=\frac{F}{F_{cm}},$$

這裏 F_{cm} 是工形梁的腹鈑的面積。

短段ds上面如果同時有軸向力N，彎矩M和剪力 Q，這三個分力中間任何一個分力對於其他兩個分力引起的偏移所做的工都等於零。因此短段 ds的總形變位能等於各個位能的和。寫成公式，

$$dU=dU_N+dU_M+dU_Q=\frac{N^2ds}{2EF}+\frac{M^2ds}{2EI}+\mu\frac{Q^2ds}{2GF}。$$

在每一根桿的上面，各橫截面的剛度和應力都可能有連續性的改變，把 dU在所有的桿子上面一根桿子一根桿子的積分過去，每一根桿子都從這一端積分到那一端，然後把各積分值加起來，我們就可把任何彈性結構的位能的全值求得。這個位能的全值的公式是：

$$U=\sum\int_0^s \frac{N^2ds}{2EF}+\sum\int_0^s \frac{M^2ds}{2EI}+\sum\mu\int_0^s \frac{Q^2ds}{2GF}。$$

Σ號表示積分須包括結構的全部桿子。這裏須要注意積分號後面的分力N,M和Q普通是距離s的函數，他們的數值在每一個橫截面的上面都可能是不同的。s應該從那一個橫截面量起，倒不拘定，通常在每一桿子的上面，大概是從他的一端量起的。

把求得得的位能公式研究一下，我們就可得到結論如下。

1．位能的數值始終是正的，因爲在他的公式裏，各分應力N,M或Q都是以自乘方的姿態出現的。

2．位能是應力的二次函數，同時也是偏移的二次函數，因爲位能是應力和偏移的乘積，同時偏移又是和應力成正比例的。

3．幾個力發生的位能不等於各個力分別發生的位能的和，就是說在位能上面是不能適用力的作用的獨立性原理的。因爲位能和分應力N,M和Q的自乘方有關係，任兩個數值a和b的和數的自乘方是不等於a和b的自乘方之和的。

4．位能的總值和荷重放置的次序無關，他的數值是決定於彈性結構的最後的情形的。

我們可用下面的例子說明上面說的第三點的正確性。

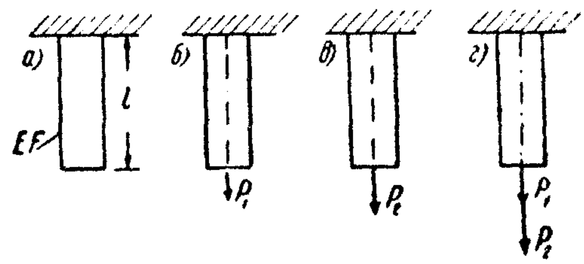

圖 270

圖270,a表示一段材料，圖270,$б$表示材料的下端有個P_1力，在圖270,$в$的裏面換了一個P_2力，在圖270,$г$的裏面P_1和P_2同時作用。

根據前面求得的位能公式，P_1和P_2單獨作用的時候，材料的位能是

$$U_1=\frac{P_1^2 l}{2EF},\qquad U_2=\frac{P_2^2 l}{2EF}。$$

P_1和P_2同時作用的時候，位能是

$$U_3=\frac{(P_1+P_2)^2 l}{2EF}=\frac{P_1^2 l}{2EF}+\frac{P_2^2 l}{2EF}+\frac{P_1P_2 l}{EF}.$$

把U_3和U_1+U_2比較一下，就可能發現兩個力單獨產生的位能的和是不等於兩個力共同產生的位能的。在現在的情況之下

$$U_3=U_1+U_2+\frac{P_1P_2 l}{EF}。$$

要知道上面的方程式裏面最後一項的物理意義，因爲位能的總值和荷重放置的

次序無關的緣故，我們假定P_1和P_2兩個靜力荷重是依照下面的次序放在這段材料上面的。首先把逐漸長成的靜力荷重P_1放上去，這個荷重放上去並且達到他的最後數值之後，再把第二個靜力荷重P_2放上去，結果力P_2把材料的下端連同力P_1又向下移動一個等於$\frac{P_2 l}{EF}$的尺寸。

P_2力逐漸長成的時候，P_1力維持他的最後的常值P_1，因此他在P_2力把材料拉長的時候，又做了數值等於

$$P_1\frac{P_2 l}{EF}$$

的工。

因此U_3的公式裏面的$P_1\frac{P_2 l}{EF}$項代表力P_2在P_1的方向裏面增加偏移時，P_1加做的工，或者把這兩個力放上去的次序顛倒一下，力P_1在P_2的方向裏面增加偏移時，P_2加做的工。

可見得計算彈性結構的位能的時候，作用力的獨立性原理是不適用的，如果要這樣做的話，就把這一個力對於那一個力發生的偏移加做的工的一項丢掉了。

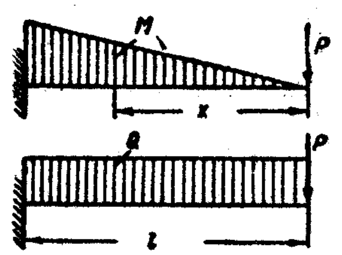

圖 271

例題 1 圖271表示的是一根懸臂梁，他的橫截面是長方形$b\times h$（寬×高），他的自由端有一個集中荷重P，求全梁的上面儲積的位能值。

解法 梁的各橫截面的彎矩和剪力的公式如下（在力P作用之下，梁的軸向力等於零）：

$$M_x=-Px;$$

$$Q_x=P_{\circ}$$

把M_x和Q_x的代數值代入位能的公式，我們得

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{M_x{}^2dx}{EI}+\frac{\mu}{2}\int_0^l\frac{Q_x{}^2dx}{GF}=\frac{P^2l^3}{6EI}+\frac{\mu}{2}\cdot\frac{P^2l}{GF}=\frac{P^2l^3}{6EI}+\frac{3P^2l}{5GF},$$

因爲長方形橫截面的μ值$=1.2$.

計算剪力的影響

在U的公式裏面，假定$G\approx0.4E$，同時$F=bh$，$I=\frac{bh^3}{12}$，經過簡單的調整，我們得

$$U=\frac{2P^2}{E}\cdot\frac{l^3}{bh^3}\left[1+\frac{3}{4}\left(\frac{h}{l}\right)^2\right]。$$

方括弧裏面的第二項反映剪力的影響。如果梁的高度等於他的長度的五分之一（再高一點的梁不常見），

$$U=\frac{2P^2l^3}{Eh^3}(1+0.03)=\frac{2P^2l^3}{Eh^3}1.03。$$

這樣剪力只供給全部位能的 3%。在普通情形之下，梁的高度都沒有這樣大，因此他的影響還要小。

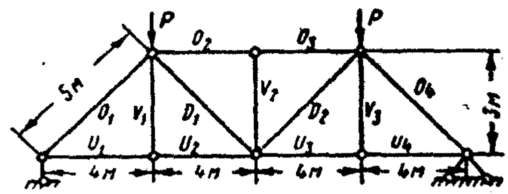

圖 272

例題 2 圖 272 表示的是一個桁架，他的上左右角有兩個力 P，各桿的橫截面都相同，求桁架的各桿上面聚積的位能。

解法 位能的普通公式是

$$U=\Sigma\int\frac{M^2ds}{2EI}+\Sigma\int\frac{N^2ds}{2EF}+\Sigma\mu\int\frac{Q^2ds}{2GF}。$$

如果在一個各桿的N值和EF值都＝恒數的桁架上面運用的話，我們可把他改成

$$U=\Sigma\frac{N^2S}{2EF},$$

這裏N＝在外力作用之下桁架各桿的軸向應力，

S＝各桿的長度。

在聯結點都是鉸接的鏈桿桁架上面，$M=Q=0$。

位能的一部份的計算見表6。

表 6

桿	應　　力	N^2	長度 S	N^2S
O_1,O_4	$-\frac{5}{3}P$	$\frac{25}{9}P^2$	5	$\frac{125}{9}P^2$
O_2,O_3	$-\frac{4}{3}P$	$\frac{16}{9}P^2$	4	$\frac{64}{9}P^2$
U_1,U_4	$+\frac{4}{3}P$	$\frac{16}{9}P^2$	4	$\frac{64}{9}P^2$
U_2,U_3	$+\frac{4}{3}P$	$\frac{16}{9}P^2$	4	$\frac{64}{9}P^2$
D_1,D_2	0	0	5	0
$V_1,V_2,V_3,$	0	0	3	0
				$\Sigma N^2S=\frac{317}{9}P^2$ （半個桁架的數值）

根據表 6，我們得

$$U=2\Sigma\frac{N^2S}{2EF}=\frac{2\cdot317P^2}{2\cdot9EF}=\frac{317P^2}{9EF}。$$

§ 44. 可 能 工

現在我們打算把外力和內力的可能工的意義解說一下。

譬如我們有這樣一種情形。假定逐漸長成的靜『力』P（這個力是廣義的），

達到了他的最後數值，圖 273 表示的梁的上面發生相應的偏移之後，我們又開始把另一個『力』（也是靜力），譬如彎矩M放上去。結果梁的各點的偏移（這個偏移也是廣義的）又都增加一點。不過在這一次偏移增加的過程中間，也就是在彎矩的逐漸長成的時期中間，『力』P的數值始終不變，因此他加做的工的數值等於乘積Py_2，代表他在兩個『力』同時作用的時候他所做的那一部份的工。這部份的工就喚做『力』P **加做的工**。如果兩個『廣義的力』P和M不在同時在梁上作用(圖274)，那麽乘積Py_2就喚做**可能工**（不是實在的工，因爲在這個情形之下，和力P相乘的豎向偏移是力P本身不在場時彎矩M在梁上發生的偏移）。

可能工的數值等於加做的工的數值。因此以後這兩種工都喚做**可能工**。

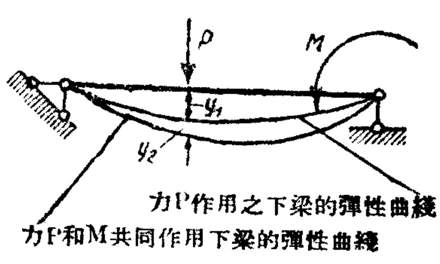

圖 273

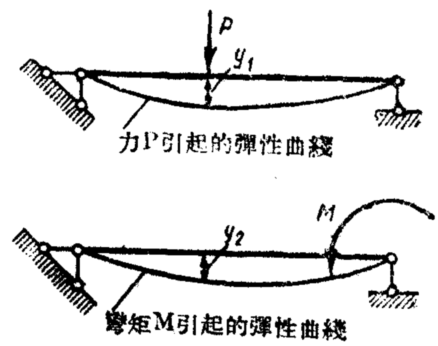

圖 274

把可能工的意義說明之後，我們再把外力的可能工研究一下。首先須注意他的公式和逐漸長成的靜力在結構上面發生偏移時所做的工的公式不同。一個公式沒有係數1/2，一個是有這樣係數的。

內力的可能工也是這樣。就是內力對第二組外力發生的形變所做的工。同從前一樣，在第二次形變長成的時候，我們的內力的數值和方向也是始終不變的，因爲這個緣故，這個工的公式的前面也沒有係數1/2。

譬如一個逐漸長成的『廣義靜力』P_m 已經達到他的最後值，結構上面（圖275）就發生形變，同時每一個橫截面上面都發生三個分應力 N_m，Q_m 和 M_m。以後我們又開始把另一個逐漸長成的『廣義力』P_n放上去。

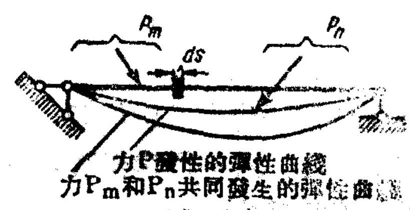

圖 275

在P_n『力』的影響之下，結構的任一短段ds又得到三個分形變 $\Delta_x{}^n, \Delta_\gamma{}^n, \Delta_\varphi{}^n$。在這些分形變發展的過程中間，$P_m$『力』發生的分應力$N_m$，$Q_m$和$M_m$的數值和方向都不改變，他們都加做了一點工。

在結構的任一短段ds上面，這個工的公式是

$$dU_{mn}=N_m\Delta_x{}^n+Q_m\Delta_\gamma{}^n+M_m\Delta_\varphi{}^n。$$

『廣義力』P_n發生的這些分形變的代數值是

$$\Delta_x^n=\frac{N_n ds}{EF};$$

$$\Delta_\gamma^n=\mu\frac{Q_n ds}{GF};$$

$$\Delta_{\varphi}^{n}=\frac{M_n ds}{EI}。$$

把dU_{mn}在結構的全部上面積分起來，我們就得『力』P_m引起的內應力在『力』P_n引起的偏移發生之後所做的可能工的全值。

$$U_{nm}=\sum\int_{o}^{s} N_m \frac{N_n ds}{EF}+\sum\mu\int_{o}^{s} Q_m \frac{Q_n ds}{GF}+\sum\int_{o}^{s} M_m \frac{M_n ds}{EI}。$$

這個工在本質上也就是 **加做的工** ；也就是兩個『廣義的力』P_m和 P_n 在結構上面作用的時候內應力在結構上面積聚的眞正的工的一個眞正實在的部份。以後在求彈性結構的偏移的時候，這個工的公式時常在公式的右方發現。

如果『廣義的力』P_m和P_n在不同的時候在結構上面作用，那麼U_{mn}就代表他們的 **可能工** ，因爲現在內應力N_m，Q_m和M_m所乘的形變發生時這些力是不在結構的上面的。

同外力一樣，不管是加做的工也好，可能工也好，在內應力方面我們也打算把他們都喚做可能工。

§45. 偏移的通用符號

一個單位力（譬如力$P=1$）在一個彈性結構的個別點發生的偏移總是拿δ來代表。譬如在圖276的上面，一單位橫力在折線梁的端點C作用之後，C點就移動到 C_1，那麼長度 $CC_1=\delta$ 就是點 C 的總偏移。

我們往往需要C點在別的方向裏面的分偏移。**這些分偏移也用δ來代表，不過他的右下方加了兩個小字母。第一個字母表示分偏移的方向，第二個字母表示發生這個偏移的力的方向。**在圖 276 的上面，m 和 n 分別代表橫向和豎向，因此在這兩個方向裏面的分偏移是δ_{mm}和δ_{nm} 。

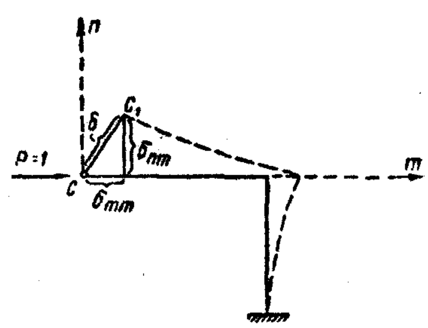

圖 276

再呢，我們不但有集中力和地位偏移。同時也有集中荷重和角度偏移。上面代表偏移和他們的投影的規則也可推廣到這裏來。我們同樣用δ 來代表角度偏移，他的右下方也加兩個小字母，第一個字母表示的是量這個角度的地點，第二個表示的和先前一樣是發生這個偏移的力的方向。

總而言之，符號δ_{nm}代表m方向的『力』在n方向裏面發生的偏移。

爲和單位力發生的偏移區別起見，我們用符號Δ代表一點的總偏移，分偏移的右下方和δ一樣，也加兩個小字母。總偏移的分偏移 Δ_{mn} 等於單位荷重發生的偏移δ_{nm}和『力』P_m的乘積，寫成公式是:

$$\Delta_{nm}=P_m\delta_{nm}。$$

§46. 工的相互定理

譬如我們用兩種不同的方式把兩個逐漸長成的『廣義力』P_1和P_2（每一個力P_1和P_2都能代表幾個力和幾個彎矩）放在隨便一個彈性結構上面，譬如我們的結構是和圖 277 表示的那樣的一根梁。

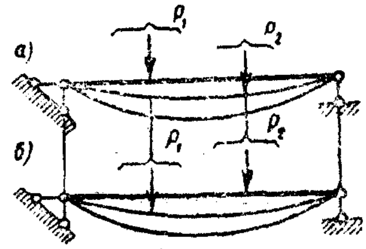

圖 277

在圖277a上面，我們先把逐漸長成的靜『力』組 P_1 放在梁上等到第一組力到達他們的最後值之後，再把逐漸長成的靜『力』組P_2放上去。

在圖277，б 的上面，這兩個『力』組放在梁上的次序就顛倒一下。

拿T_{11}代表逐漸長成的靜外『力』組P_1對本組『力』 P_1 發生的偏移所做的外力工，拿T_{12}代表逐漸長成的靜外『力』組P_1對第二靜『力』組 P_2 發生的偏移所做的可能外力工，T_{22} 代表逐漸長成的靜『力』組P_2 對本組『力』發生的偏移所做的外力工，T_{21}代表逐漸長成的靜外『力』組P_2對第一靜『力』組 P_1 發生的偏移所做的可能外力工*。

同樣我們拿U_{11}，U_{12}，U_{22}和U_{21}來代表內應力所做的內力工。

各符號的右下方的第一個字母和做工的『力』組有關係，第二個字母和發生偏移的『力』組有關係。

把T_{11}，T_{12}和T_{22}相加，就得 P_1『力』組和 P_2 『力』組在梁上所做的總外力工 T'，這兩個力組作用的次序是先P_1 後 P_2，寫成公式

$$T'=T_{11}+T_{12}+T_{22}。$$

同樣依照這個次序作用的兩外『力』組在結構上引起內應力所做的總內力工（數值和位能相同）是

$$U'=U_{11}+U_{12}+U_{22}。$$

根據能力不滅定理

$$T'=U'。$$

P_2先P_1後的時候，這兩個工的總值是

$$T''=T_{22}+T_{21}+T_{11}和U''=U_{22}+U_{21}+U_{11}。$$

根據能力不滅定理

$$T''=U''。$$

在兩種荷重情形之下，結構的最初和最後的形變都是相同的，因此

---

* 如果 P_1^i 是第一『力』組 P_1 的任一個力，Δ_{11}^i 是第一『力』組 P_1 在『力』P_1^i 的方向裏面發生的偏移，Δ_{12}^i 是第二『力』組在『力』P_1^i 的方向裏面發生的偏移，那麼 $T_{11}=\Sigma P_1^i\Delta_{11}^i/2$，$T_{12}=\Sigma P_1^i\Delta_{12}^i$。

因爲第二『力』組 P_2 作用的時候，『力』P_1^i 的大小和方向是始終不改變的，因此他們對第二『力』組P_2發生的偏移所做的工等於這些『力』P_1^i 和在他們的方向裏面發生的偏移的乘積，沒有係數½。

T_{22} 和 T_{21} 的等式也可這樣求得。

$$U'=U''。$$

所以 $$T'=U'=U''=T''。$$

根據$T'=T''$的關係，我們得

$$T_{11}+T_{12}+T_{22}=T_{22}+T_{21}+T_{11},$$

因此 $$\boxed{T_{12}=T_{21}}$$

就是說：**第一『力』組對第二『力』組在他們的方向裏面發生偏移所做的可能工等於第二『力』組對第一『力』組在他們的方向裏面發生的偏移所做的可能工。**

根據$U'=U''$的關係，我們得

$$U_{11}+U_{12}+U_{22}=U_{22}+U_{21}+U_{11}$$

因此 $$\boxed{U_{12}=U_{21}}$$

利用$U'=T'$的關係，我們得

$$U_{11}+U_{12}+U_{22}=T_{11}+T_{12}+T_{22},$$

但是 $$U_{11}=T_{11}, \qquad U_{22}=T_{22},$$

因此 $$\boxed{T_{12}=U_{12}}$$

就是說：**第一組外『力』對第二組外『力』發生的相應的偏移所做的可能工等於第一組內應力對第二『力』組發生的相應的形變所做的可能工。**

在結構上面由第一『力』組引起的狀態往往喚做他的第一狀態，第二『力』組引起的狀態喚做第二狀態。

根據$T_{12}=U_{12}$和$U_{12}=U_{21}$的關係，我們得

$$\boxed{T_{12}=U_{21}}$$

就是說：**第一組外『力』對第二組外『力』在他們的方向裏面發生的偏移所做的可能工等於第二組內應力對第一組『力』發生的形變所做的可能工。**

§47. 偏移的相互定理

先把工的相互定理的一個特殊例子說一說。

譬如我們的第一『力』組只有一個『力』$P_1=1$，第二『力』組也只有一個『力』$P_2=1$（圖278），那麼根據工的相互定理，我們得

$$P_1\delta_{12}=P_2\delta_{21},$$

但是 $$P_1=P_2=1,$$

因此 $$\delta_{12}=\delta_{21},$$

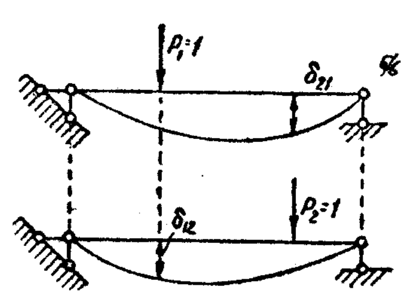

圖 278

這裏 δ_{12} 是『力』$P_2=1$在『力』P_1的方向裏面發生的偏移；