序

居今日而欲致國家於富强之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦爲國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久爲識者所共喻。

巴西華僑徐君銘信，身繫異邦，心縈祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，爲邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已爲數不貲，前歲之冬，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與溫院長步頤之介紹，欲以迻譯刊行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敢敢，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋淞、李煥燊、南登岐、孫廣年(物理學總執筆人)、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊㑺（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鍾恩寵、關德懋（以姓氏筆劃爲序）諸君分任迻譯，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則爲慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實爲元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心* 譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。茲值本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

中華民國五十一年元月湯元吉序於臺北

*該中心爲一不以營利爲目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事爲李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄭堃厚、湯元吉等九人。

徐氏基金會啓事

一、凡對本書任何一部分，或本會所印行之其他書籍，能在內容及文字方面，提供建議，致使讀者更易迅捷了解書中意義者，如被採納，當致酬美金十二元五角(折合新臺幣五百元)至一百二十五元（折合新臺幣五千元），以示謝意。

二、本會誠徵關於自然科學及機械、電機、電子等工程之中文創作或翻譯稿件，以適合於一般人士或中等學校以上學生自修之用者爲標準。稿費每千字美金二元五角（折合新臺幣一百元），特優譯著稿酬另議。

三、玆爲獎酬本會出版各書之作者及譯者起見，將於各書出版後之次年年底，核計其在臺灣、香港及星加坡三處之銷售數量，分配贈與其作者或譯者以下列三項獎金：

1. 銷數最多者美金6,000元

2. 第二多數者美金4,000元

3. 第三多數者美金2,000元

關於上開一、二兩項事宜，請逕函香港郵政信箱 1284 號徐氏基金會接洽。

編輯要旨

一・本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。

二・本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本；數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別遴請專家迻譯。

三・本叢書之供應對象，主要爲中等以上學校之學生、自行進修人士及從事教授各該有關課業之教師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要爲主旨。

四・原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種教學措施，學生於作成論文後，校方尚需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟爲存眞起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。

五・本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首册中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專册，以供讀者檢閱。

六・本叢書數學原文，每講約爲六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故爲便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印爲一册，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。

七・本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，教育部審

定公布之名詞；但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之；其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，尙冀海內專家學者不吝賜敎。

八・本叢書之迻譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尙祈讀者諒之。

九・本叢書原文篇帙浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指敎，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

一個善意的忠告

寫在讀者開始研讀本叢書的下半部之前！

在目前賡續的旅程上，我們又將朝着數學的高峯向前邁進一步。讀者對于我們以往所作之忠告，應當多多加以考慮。這是我們剛開始講解第一册中之第〔4〕節時已經對各位說過的：學習數學，如祇死記公式，那是與事無補的；各位對於數學應多加思考；對於我們所講的，不要不加嘗試就接受下來，也不要不求甚解；却要對於每一種構想儘量自動的加以推敲，並且貫澈始終的去捉摹，去體會！必須如此，各位對於這種美善的自然科學，才會有所收穫。

希望各位對本叢書的前半部十二册，確已認眞攻讀一遍，並已澈底瞭解其內容。在討論相同問題時，我們亦將時常提及以上各册的內容；故懇切的請求各位，注意在文句中用方括弧所插入的那些暗示。例如：〔1；4〕是指第一册中之第四節。

現在就請各位拿出新的勇氣來研讀本教材吧！

数學第十三册目錄

上　冊　數

下　冊　體

上 册　　數

級　　數

我們先從大家所熟悉的級數學開始研究：好比**原始數列**，亦 1
稱爲**自然數的級數** 1；2；3；……這是各位知道的；又如九九歌訣（卽乘法表）中已經**算出各乘積的有規律級數**，例如：**三倍級數**：3；6；9；……，或**冪級數**，例如 1；10；100；1000；…，並且我們可以不論把什麼數字隨意組成一種定型級數 2.6；$9\frac{1}{4}$；25；4……。同時還有那些純粹數學以外的級數，好比樹木的序列，運動員或學生排除出操時按高矮所組成的序列等等。

每一種級數是由**各項**所組成；所謂“項”則是一連串數字中的各個數，猶之乎一列樹裡的每一棵樹一樣，餘類推。

在**固定級數**裡**項**的順序是固定的，不許有任何一項躍出行列，假如要保存級數的特性的話。好比 2；9；24；4 是不同於 4；9；2；24 的另一種序列。因此，在每一種固定數列裡（我們亦只研究這種序列）要把最左邊的第一項或稱首項與第 2，第 3……等項加以區別，同時給予各項以合乎這種順序的**簡單名稱**，例如

$$\boxed{a_1；a_2；a_3；\cdots\cdots a_n；\cdots\cdots}$$

讀如：a一，a二，a三，以至 an……。由此可見，我們對各項都給予同樣的稱謂 a，旨在表明所有這些項全是屬於同一序列的。各項是用右下側所附註的數字（亦稱指數；參閱第一册中之〔63〕節）來區別，在這種場合它們是序數（亦稱號數，或番號）；這些序數不許隨意加以掉換，如果不該變動序列的話。——好比第一册〔63〕節所提及的趙氏弟兄多人，是用 I，II 等號數予以識別的，卽在背後稱他們爲趙大，趙二等，情形正復相同。

上面所舉的三倍級數中，a_1 之值爲 3，a_2 之值爲 6，餘類

推。如對各項之值也用簡單名稱時，則在三倍級數必形成等式：$a_1=3$；$a_2=6$； 等等。

a_2 是這個級數裡第二項的**指示值**，而 6 則是它的**算出值**。我們幾乎無須再加解釋，即此處之 a_1 值決不是 1 ，a_2 值決不是 2 ，餘類推。

假如就一級數的**任何一項，即級數的一般項**而言，則在其右下側附註普通數 n ，使成為 a_n 。因此，a_n 可代表級數中**任何一項**，除有特殊例外，就是首項它也能代表。緊隨在 a_n 之後的一項是 a_{n+1} ； 假如 a_n 不代表第一項時，則在它之前還有 a_{n-1} 一項；參閱第一册中之〔8〕節！ 因此在級數的各項裡，**指數 n 總是一個自然數，即屬一個號碼，但不是一個分數，或相對數。**

2

級數組成定律

2；9；25；4 這個數列是極其**隨便**寫出來的，並未考慮到任何一項定律。似此沒有規律的序列，我們並不擬加以討論；我們所要研習的祇是根據一項**排列定律**所組成的級數。

以戲院前排隊買票為例，這也有一定規則的；即誰先到，誰先買；也就是以到達的時間為先後而排列。又如學生上體操時的隊伍，普通是按高矮而排列的。一般數列的組成定律，各位可以立即看出來的，有如：3；5；7；9 或 1；2；4；8；16。

依照級數的組成定律，可先區分為算術級數以及幾何級數兩種。

算 術 級 數 （或稱**等差級數**）

由 3；5；7；9 所組成的級數，它的定律是什麼？ 3

> **我們一再奉勸各位讀者，對這種問題，在各位繼續研讀以前，最好自己先行加以解答。**

每一後繼的項總比在前的多 2，或者：**任何一項與前項之差恆爲** +2（正 2），參閱第一册中之〔37〕節；惟第一項除外，因爲它沒有前項之故。

$a_2-a_1=5-3=2$； $a_3-a_2=7-5=2\cdots\cdots$ 一般寫成： $a_n-a_{n-1}=+2$。在 $+3$；0；-3；-6；$\cdots\cdots$ 這種級數裡，各項之差是如此求法，即：$0-(+3)=-3$；$-3-0=-3$；$-6-(-3)=-3$；（參閱第一册中之〔27〕節）；一般的寫法爲： $a_n-a_{n-1}=-3$。

因此，可下一定義如下：

> **級數中每相連兩項之差 d 爲定數者稱爲等差級數，或稱算術級數。**

此級數的排列定律，簡寫爲：

$$\boxed{a_n-a_{n-1}=d=\text{常數}}$$

d 是德文 Differenz, 英文 difference 的第一個字母。它代表任何一個正的或負的固定數，或普通數，在任何其他級數裡，其值各不相同。上式中最右邊所附加的“＝常數”表示 d 在這種算術級數裡是固定不變的（參閱第七册中之〔687〕節）。由此可見，d 是算術級數裡後一項減前一項之差，簡稱爲 **“級數差”** 或 **“公差”**。

習 題：

試求下列各算術級數裡的d，並將每一級數繼續寫至第五項！

1） $+1$；$+6$；$+11\cdots\cdots$；　　2） $+3$；$+10$；$+17\cdots\cdots$；

3） $+20$；$+16\cdots\cdots$；　　4） $+100$；$+90\cdots\cdots$；

5) -1；-6；$-11\cdots\cdots$； 6) -3；-10；$-17\cdots\cdots$；

7) -20；$-16\cdots\cdots$； 8) -100；$-90\cdots\cdots$；

9) -4；$0\cdots\cdots$； 10) -20；$0\cdots\cdots$；

11) $+\frac{4}{5}$；$+1\cdots\cdots$； 12) $+\frac{5}{4}$；$+1\cdots\cdots$；

13) $-\frac{4}{5}$；$-1\cdots\cdots$； 14) -8.6；$+6.8\cdots\cdots$；

15) -6.8；$+8.6\cdots\cdots$； 16) $m-3d$；$m-2d\cdots\cdots$

如從級數裡一項一項的**繼續**寫下去的話，也可視各項之差爲**增大量**；要將此增量加入前面一項才得其次相續的一項。（請各位依此觀點對上述各例題作一比較！）因此，亦可把如此算術級數之組成寫成下面的一般形式：

$$a_1；a_1+1d；\ a_1+2d；\ a_1+3d\ \text{餘類推。}$$

4 **遞增和遞減級數**

如從 a_1 開始向前推算，將級數各項按其求得之值表示於一條垂直的數字直線上，而其分劃則仿照以往對Y軸的區分方法（參閱第八册中之〔748〕節），則各位必能明白，什麼叫做遞增級數，什麼叫做遞減級數。

習　題：

1） 試就第〔3〕節內習題 1) 至 15) 各級數來判斷，那些是遞增級數，又那些是遞減級數？在此要注意公差 d！

2） 上題各級數所遵循的一般法則，究竟是什麼？

結　論：

遞增級數：$d>0$；**正增量＝狹義的增大**。

遞減級數：$d<0$；**負增量＝逐項的減少**。

5 $$\mathbf{a_n=f(a_1\,;\,n\,;\,d)}$$

各位該知道這算式的涵義；簡單說來，其任務是在展開可求 a_n 之公式，假如已知 a_1，n 及 d 的話。參閱第七册中之〔688〕節！ a_n 是級數的一般項（參閱本册第一節）；指數 n 是代表 a_n 項的號數，亦即 1, 2, 3, ⋯⋯ 數串裡任何一個沒有符號的整數。但是如果 n 不代表序數（即不代表指數）却代表算式中的字

母數，則須把它當作一個正數來處理。

我們試依據一個實例解答上面所提出的計算題目：好比一個級數如 3；5；7……的第 100 項是否可按一個公式求得，即不要把全部的 100 項一個跟一個的計算出來嗎？如果注意這個級數有規律的組成（參閱本册第〔3〕節），就可求得這個公式。

$$\begin{array}{lll} (n=1); & a_1=3 & \qquad (a_1)(n) \qquad (d) \\ (n=2); & a_2=5=3+1\times2 & =3+(2-1)\times2 \\ (n=3); & a_3=7=3+2\times2 & =3+(3-1)\times2 \\ (n=4); & a_4=9=3+3\times2 & =3+(4-1)\times2 \\ \vdots & \vdots & \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ (n=n); & a_n & =3+(n-1)\times2 \\ & & =a_1+(n-1)\cdot d \end{array}$$

各位要注意，這裡是把每個等式的右邊使之變形，結果各式遂均含有 a_1，n 及 d，乃與本節提出的問題相符！

請各位對於級數 2；6；10…… 以及任何其他級數作同樣的變形分析！如把一切固定數代以一般數，則得下面的公式：

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)\cdot d}$$

在這個公式裡，當作 a_i 指數的 n，是要按順序來數的數目字；在 d 前面的因數 $(n-1)$ 裡，n 是相當於那個數目字的正數，它是要加入計算的。

一個公式能綜括任意多的單獨情況，意即包羅萬象。有了公式，我們很快就可求得答案；如無公式，則往往事倍而功半。其價值卽在於此，讀者諸君不可不知。

習　題：

1） 級數 3；5；7……的第 100 項是什麼？

2） 級數 +1；+6……的第 100 項是什麼？

3） 試求本册第〔3〕節中習題 11）到 16）的第 10 項！

4） 試舉例證明，一個算術級數的每一項是前後兩項的算術均數（參閱第七册中之〔739〕節）！（算術級數的名稱卽由此而

來！）請各位對於 a_n 亦作一般性的證明！

6 算術級數之和 $=f(a_1;a_n;n)$

到目前爲止，我們所研討的祇是一個級數未加聯繫的各項；我們是用半支點“；”把它們分開來。如用加號把各項聯繫起來，就得有所指的各項之和，也可以“級數之和”名之。有一些數學家把級數各項之和簡稱爲“級數”，易滋誤解，最好不用。

求一個算術級數之和，究竟要在什麼時候纔有意義呢？——算術級數的法則，卽 $d=$ 常數（參閱本册第〔3〕節），是隨時都可加以應用的：每一項後面可以無窮盡的連續排列任意多的項，這種級數稱爲**無窮級數**。

算術級數之和的計算，惟有如此做法纔有意義，卽令級數不繼續排列下去，却到了某一項卽予中途截斷使之成爲**有限級數**。此級數的最後一項名爲 a_n，我們在有限算術級數裡是應用一直代表上面第一節所講一般項之 a_n，作爲**末項**的一般記號。我們可以如此做者，實因級數中間可在**任何**一項予以截斷之故。

現在應該組成有限算術級數各項之和，首項爲 a_1，末項爲 a_n；而此和數實爲 a_1，a_n 及 n 的函數。如用大寫的希臘字母（參閱第一册中之〔100〕節）

$$\boxed{\sum}$$

代表此和數，則我們的算式便可寫成：

$$\sum_{n=1}^{n} a_n = f(a_1;a_n;n)$$

讀如：西格瑪 a_n 從 n 等於一到 n，等於 a_1，a_n 及 n 的函數。對於上式所有符號的涵義，我們舉例說明如下：

$\sum\limits_{n=1}^{3} a_n$ 之 Σ 這個符號是指明：應將級數的各項相加，亦卽應構成它們的和數；可見字母 Σ 是一個計算命令，而不是一個字母數。每一項的簡稱都具有 a_n 的形態，這是由字母 a 與一代表

數目字的指數所組成；級數的第一項編號爲 1，意即在和數符號 Σ 下面的等式應爲 $n=1$ ；假如應求其和數的**級數段**，不從首項開始，却從第二項開始時，則和數符號下面之公式便應爲$n=2$。至於級數段的末項如何，則利用和數符號**上面**所寫的數字表示之。有時亦寫明完整的等式，例如：$\sum_{n=1}^{n=3}a_n$ 。由此可見：

$$\sum_{n=1}^{3}a_n=a_1+a_2+a_3 \text{ 或 } \sum_{n=5}^{8}a_n=a_5+a_6+a_7+a_8 \text{ 或}$$

$$\sum_{n=1}^{n}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n\text{ ；}\sum_{n=3}^{1}a_n=a_3+a_2+a_1$$

在最後的例題中，求和是從第三項開始，緊跟着的是第 2 項，直到 $n=1$ 爲止。

我們回顧一下： a_n 第一可代表級數的任何一項（參閱本册第一節），第二可代表有限級數的末項，第三可代表各項要相加的一般形式。在一級數中究竟適用那一種涵義，那就要看各部分組成的聯帶關係而定。例如$\sum_{n=1}^{n}a_n=a_1+a_2+\cdots\cdots a_n$ 這個等式，其第一個 a_n 是代表相加各項的形式，即指明級數共有若干項；第二個 a_n 却代表末項。

爲求解答函數方程式：$\sum_{n=1}^{n}a_n=f(a_1\text{；}a_n\text{；}n)$ ，特舉一實例說明之 德國大數學家**高斯**（1777 年生於 Braunschweig），當他還在小學讀書的時候，老師給他一個加法計算題，即問他從 1 加到 100 究爲若干。經過極短時間的思索之後，他把答案寫在他的石板上：5050。他是怎麼想出來的呢？高斯用的很可能是心算中的一種速算法，跟我們現在所用數學的速記法一樣：

$$\sum_{n=1}^{100} n^{*)} = \underbrace{1 + 2 + \underbrace{3 + \cdots\cdots + 98}_{} + 99}_{} + 100$$

$$= (1+100) + (2+99) + (3+98) + \cdots\cdots + (50+51)$$

$$= 50 \times 101 = 5050$$

高斯是用乘法代替一百項的加法，即先組成**一般大**的部分和數，然後斷定共有若干部分和數。我們乃用同樣的方式，先把上述的級數寫成已知的順序，然後把它倒過來列成等式，再把和數是相等的這兩個級數加起來：

$$\sum_{n=1}^{100} n = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + 98 + 99 + 100$$

$$\sum_{n=100}^{1} n = 100 + 99 + 98 + \cdots\cdots + 3 + 2 + 1$$

$$2 \times \sum_{n=1}^{100} n = 100 + 101 + 101 + \cdots\cdots + 101 + 101 + 101 = 100 \times 101\;;$$

$$1 \times \sum_{n=1}^{100} n = \frac{100}{2} \times 101 = 5050$$

爲練習起見，再舉一個實例，即求一串**奇數**（參閱第二册中之〔226〕節）之和，算至第八項爲止：

$$\sum_{n=1}^{8} (2n-1)^{**)} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$$

$$\sum_{n=8}^{1} (2n-1) = 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1$$

---

*) 因爲這個級數僅由自然數 1, 2, 3……n 所組成，故在此場合可以字母 n 代替 a_n 。此 n 現在不是一個指數，却是自然數的代表。

**) 我們倘欲求得此級數之連續各項，只要以 1 至 8 各數先後代入 $2n-1$ 的 n ，即 $2\times1-1$， $2\times2-1$，……$2\times8-1$ 便可達成目的。參閱第二册中之〔226〕節！

$$2\times\sum_{n=1}(2n-1)=16+16+16+16+16+16+16+16=8\times 16$$

$$1\times\sum_{n=1}^{8}(2n-1)=\frac{8\times 16}{2}=64$$

上面的例子倘用另外一種寫法，將使我們以後便於寫成一般的式子：

$$\sum_{n=1}^{8}(2n-1)=1+(1+1\times 2)+(1+2\times 2)+\cdots\cdots+(15-2\times 2)^{*)}+(15-1\times 2)+15$$

$$\sum_{n=8}^{1}(2n-1)=15+(15-1\times 2)+(15-2\times 2)+\cdots\cdots+(1+2\times 2)+(1+1\times 2)+1$$

$$2\times\sum_{n=1}^{8}(2n-1)=(1+15)+(1+15)+(1+15)+\cdots\cdots+(15+1)+(15+1)+(15+1)=8\times(1+15)$$

$$\sum_{n=1}^{n}(2n-1)=\frac{8\times(1+15)}{2}$$

將級數之和各項寫成一般通用的式子，並且算出爲首各項；上式是從 a_1 出發，然後逐項加入增量 d（參閱本册第〔3〕節）；下式則從 a_n 出發，然後向左進行，減去增量 d。下式祇變更各項之順序而已：

$$\sum_{n=1}^{n}a_n=a_1+(a_1+1\,d)+(a_1+2\,d)+\cdots\cdots+(a_n-2\,d)+(a_n-1d)+a_n$$

$$\sum_{n=n}^{1}a_n=a_n+(a_n-1\,d)+(a_n-2\,d)+\cdots\cdots+(a_1+2\,d)+(a_1+1d)+a_1$$

---

*) 此項以及下一項應從最後一項開始求之，即從 15 向後倒過來算。

$$2\times\sum_{n=1}^{n}a_n=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots\cdots+(a_n+a_1)$$

$$+(a_n+a_1)+(a_n+a_1)=n\cdot(a_1+a_n)$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n}a_n=\frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}}$$

以文字說明之：**算術級數第一 n 項之和，等於項數 n 乘首項加末項所得之積之半**。

（這幾句話雖用不着死記，但對框內公式的涵義却非了解不可。）

7　a_1, a_n, d, n及 Σa_n 叫做算術級數的五要件。五要件中若已知其三，則其餘二要件可用本册第 5 及第 6 兩節所講的兩個公式求出。**爲此試做下面幾個習題**：

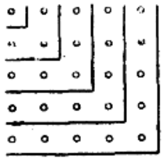
習　題：

1） 1, 2, 3,…… 到 101 各數之和等於多少？——幼年的高斯當年對於這個和數的計算可能會感到了什麼困難？

2） 從2算起，算到一百個偶數(或稱雙數)之和爲何數？簡寫便爲：$\sum_{n=1}^{100}2n=$？參閱第二册中之〔226〕節！（如將 1, 2, 3,……100 先後代入和數符號右側 $2n=2\cdot n$ 之 n，則此級數的所有項便成爲 2×1，2×2，2×3……2×100。）已知 $a_1=2$，$n=100$ 以及 $d=2$。先用第一公式求 a_n，然後再用第二公式求 $\sum a_n$！

3） 從 1 算起，算到一百個奇數（或稱單數）之和究有多大？簡寫便爲：$\sum_{n=1}^{100}(2n-1)=$？（如將 1, 2, 3,……100 先後代入 $2n-1$ 之 n，則此級數的所有項便賴以形成。）解答這個問題的步驟，各位當能自行求得。

4） 試求前 5 項（一般是前 n 項）奇數之和！在〔7 a〕圖中各位可以明白看出本題的解法。



7 a

5) 在第五册〔460 a〕圖中，倘於對數的尾數 1584 與 1614 之間插入九項，便可形成一個算術級數。試證明之！

6) 一個時鐘在一整天 24 小時內，一共敲響了幾次，假如它祇是報告每一小時的數目的話？

7) 所謂地溫的深度乃指這樣一段距離而言，我們依此距離向地球中心鑽探下去，溫度便會昇高 $1°C$。這段距離是經過許多觀測定出來的，普通係以 $33\,m$ 爲其平均值。試問：如在地面下 $200m$ 之處開鑿隧道，溫度增加若干度？（如果根據剛才所講的規則來計算地心的溫度，則所得結果一定與事實不相符。）

8) 瑞士動物學家 Keller 氏，研究波登湖（Bodensee）裡的魚類，發現它們可以生活在有 27 個大氣壓的深度。試問究有多深？（水壓力大約每 $10\,m$ 增加一個大氣壓。）

9) 一個較爲繁難的題目，需要我們協同來解答：在一個算術級數裏已知三要件：a_n，d 及 $\sum\limits_{n=1}^{n} a_n$ *)；求其餘二要件 a_1 及 n。

這裏必須利用第〔5〕和第〔6〕二節所講的**兩個**主要公式，先求 a_1。

從第一公式可得：

$$a_1 = a_n - (n-1)\cdot d = a_n - n\cdot d + d$$

因爲 n 是未知數，但 $\sum a_n$ 爲已知，故須從第二公式求 n：$n = \dfrac{2\cdot\sum a_n}{a_1 + a_n}$。把求得的 n 值代入前面的公式裏：

$$a_1 = a_n - \frac{2\cdot\sum a_n\cdot d}{a_1 + a_n} + d$$

現在我們獲得一個算式，它祇含有已知值和 a_1。因爲我們所求的是 a_1，所以必須將上式加以變形，使 a_1 **單獨的站在一邊**。爲的要消去分母 $(a_1 + a_n)$，暫且以 $a_1 + a_n$ 乘上式，則得：

*) 以後簡寫爲：Σa_n