中学数学凯旋门

丛书顾问 张奠宙

丛书主编 何维安

邹一心

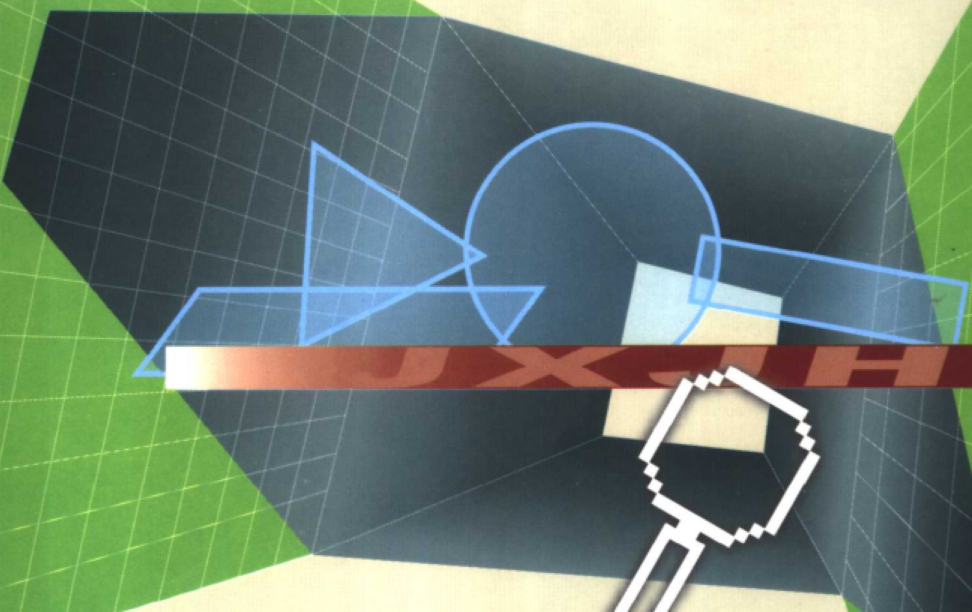
全国著名教育专家大力推荐

强调数学思想方法科学实用

解析几何

常用解题方法

陈振宣等 编著



中国出版集团

東方出版中心

数学解题有方法 最佳选择凯旋门

责任编辑：曹光豪
封面设计：吴耀明 经 纬

中学数学凯旋门书目

- 初 中 代 数 常用解题方法
- 平 面 几 何 常用解题方法
- 高 中 代 数 常用解题方法
- 平 面 三 角 常用解题方法
- 立体几何与向量 常用解题方法
- 解 析 几 何 常用解题方法

JIE XI JI HE CHANG YONG JIE TI FANG FA

12.00

ISBN 7-80186-077-2
9 787801 860774 >
ISBN7-80186-077-2
全套定价(共6册)：72.00元

中学数学凯旋门

丛书顾问　张奠宙

解析几何常用解题方法

何维安　邹一心　主编
陈振宣　曹荣杰
方兆进　张文娟　编著

中国出版集团
東方出版中心

图书在版编目（CIP）数据

解析几何常用解题方法/何维安，邹一心主编；陈振宣等编著．—上海：东方出版中心，2003.8

（中学数学凯旋门）

ISBN 7-80186-077-2

Ⅰ．解…　Ⅱ．①何…②邹…③陈…　Ⅲ．解析几何课-中学-解题　Ⅳ．G 634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 033446 号

解析几何常用解题方法

出版发行：东方出版中心

地　　址：上海市仙霞路 335 号

电　　话：62417400

邮政编码：200336

经　　销：新华书店上海发行所

印　　刷：上海望新印刷厂

开　　本：850×1168 毫米 1/32

字　　数：150 千

印　　张：6.5

版　　次：2003 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 7-80186-077-2

全套定价：72.00 元（共 6 册）

内 容 提 要

"中学数学凯旋门"丛书由中学数学特级教师等主持编写,本书是其中之一种。本书根据现行全国主要中学数学课程标准和教材,系统、科学地介绍了解析几何中常用的解题技巧、解题途径、注意事项等,特别是根据我国教育改革和素质教育的要求,根据目前高考、中考的需要,加强了其中的"应用问题"、"开放型问题"、"阅读理解型问题"等的编选,以培养读者的建模能力,收集、处理有关信息的能力和创新等能力。本书可供全国广大中学师生阅读,作为教与学的参考。

序

张奠宙

一份解题方法的丛书放在面前:《中学数学凯旋门》,很好听的名字。原以为数学解题书已经出得不少了,要有新意怕也难。打开一看,倒觉得确实与众不同。在目录上,满眼所及,是各式各样的方法。大的如归纳法、分析综合法、数形结合法、代数方程法;小的有待定系数法、旋转法、图形割补法、面积法、比例系数法等等。作者的原意是以数学方法为“经”,大量例题做“纬”,编织成一本中学数学的解题训练书。想法很新颖,付诸实践之后,当会看出它的效果来。

数学方法论一词,当是中国的特色。在著名的美国《数学评论》杂志的500多项分类目录中,并没有“数学方法”的条目。回想起来,徐利治先生于1988年出版《数学方法选讲》是这项研究的起源。自此之后的十余年间,数学方法在中国大陆迅速传播,尤其在“中学数学解题”领域中独树一帜。在中学数学教育界的声誉,可以说超过了波利亚的《怎样解题》。在实践上,一般的“解题技巧”纷纷向“解题方法”提升。这一热潮至今未退。本书的出现,则是一个新的例证。

这里,我愿从数学教育的角度提一个问题:学生是否能够理解“数学方法”?把数学题目的解法用方法论加以阐述,是教师的愿望。那么,学生是否能够掌握数学方法?学生会解题,就等于掌握了方法?在学生的认知过程中,数学方法论处于何种地位?似乎没有细究。最近,读到一份对高一学生的测试报告,说到学生对“归纳法”的掌握很差。如果问学生“什么是归纳法”,

绝大多数学生只有模糊的印象，说不清楚。怕未必。因此，如何“教”数学方法，使得学生能够自觉运用数学方法，也许是未来一个重要的研究课题。本丛书从方法入手，将数学方法组织起来，希望能对回答“如何教数学方法”有点益处。

丛书共有六册，涵盖了初中和高中数学的主要内容。翻看之余，愿就几何内容说几句话。平面几何的内容，在新颁布的《九年义务教育数学课程标准》中已经做了大量的削减。公理化方法，以及圆的知识都所剩无几。增加的是几何直观内容，立体几何的若干内容也理所当然地进入了初中。不过，三角形、四边形、勾股定理，全等、相似、运动几何、坐标几何等等的基本概念仍然存在。几何教学的主要目的之一是培养学生的理性精神。因此，如何处理好演绎推理和直观操作的关系，将是今后一个时期研究的热点问题。几何解题方法是否也该做一些改变？此外，高中数学课程标准里有一门平面几何的选修课，奥林匹克数学竞赛中平面几何仍然居于核心地位。所以说，平面几何证题的学习和研究，并不会绝迹。

高中数学课程标准中，立体几何内容的安排，遵循直观认识——操作确认——逻辑论证——度量计算的原则。与此同时，向量计算方法将大量采用。这套丛书注意到了这些发展趋势，值得肯定。

“与时俱进”，打开数学方法的教学研究的新局面，该是未来努力的目标。上面的一些话，权作为序。

2003 年春于华东师大

编 者 的 话

数学是中学的一门主要学科，要学好数学，必须掌握数学的基础知识、基本技能和基本思想方法。有的读者感到数学抽象、难学，虽然花了不少时间，但提高不快；面对稍难的题目，就不知从何下手。为此，我们一些长期在中学数学教学第一线的教师编写了这套中学数学凯旋门丛书，希望在切实掌握数学思想方法的基础上，能为读者解除困惑，指点迷津。

为了让读者能尽快提高数学素质，领悟并能运用常用的数学思想方法，本书在编写过程中，既注意与现行教材同步，又对每一节内容按常用的数学思想方法进行分类阐述，以突出数学思想方法的训练；不仅精选典型例题，而且对每一例题都作了深入的剖析。特别是，"解题思路"栏目帮助读者解决"你是怎么想到的"同时，培养读者的探究能力；在解题的基础上又引导读者反思：解这类题易犯什么错误，如何防止，有什么规律，能否类比、引申？从中帮助读者深入领悟数学思想方法。本书面向全体学生，其中既有很多基本的例题和习题，通过自学和自习，可使目前学习数学暂时有困难的读者，摆脱困境；同时又有不少综合性较强、灵活运用的例题和习题，让水平较高的读者也能得到进一步的提高。本书中还特别加强了"应用问题"、"开放型问题"、"阅读理解型"问题等的编选，以培养读者的建模能力，收集、处理信息的能力和创新等能力。

本书中如有不妥或疏漏之处，敬请读者批评指正。

目录

目录

目录

目录

一、直　　线

（一）坐　标　法

[相关知识要点]

在平面直角坐标系中，已知 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，则

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}。$$

直线 AB 的倾斜角 $\theta \in [0, \pi)$，即直线 AB 向上方向和 x 轴正方向所夹的最小正角。直线 AB 的斜率是

$$k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \operatorname{tg}\theta \quad (x_1 \neq x_2)。$$

如果 $AP:PB = \lambda (\lambda \neq -1)$，则分点 P 的坐标为

$$\begin{cases} x_p = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y_p = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}。 \end{cases}$$

如果点 M 为 AB 的中点（即 $AM:MB = 1$），则点 M 的坐标为

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}。 \end{cases}$$

[解题思路方法]

1．综合法（顺推法）

例 1　设点 $P(-a,b-a)$在第四象限内，则点 $Q(a,b)$到 x 轴的距离为　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(A) b　　(B) $-b$　　(C) a　　(D) $-a$

解题思路　从点 $P(-a,b-a)$在第四象限内，以及点 $Q(a,b)$到 x 轴的距离为$|b|$出发考虑。

解　$\because$　点 $P(-a,b-a)$在第四象限内，

$$\therefore\quad \begin{cases}-a>0,\\ b-a<0,\end{cases}\Rightarrow\quad b<a<0。$$

$\because$　点 $Q(a,b)$到 x 轴的距离为$|b|$，由 $b<0$ 与负数的绝对值等于它的相反数，

$\therefore$　$|b|=-b$，　故应选(B)。

说明　点 P 在第四象限内的充要条件是横坐标大于零且纵坐标小于零，运用不等式的基本知识可顺推出 $b<a<0$。又点$Q(a,b)$到 x 轴的距离是其纵坐标的绝对值，联系绝对值概念，可顺推得解。

2. 数形转化

例 2　等腰直角三角形 AOB，三顶点的坐标分别为 $A(1,0)$、$O(0,0)$、$B(0,1)$，取斜边 AB 上任意一点 $M(x,y)$，求证 $|MA|^2+|MB|^2=2|OM|^2$。

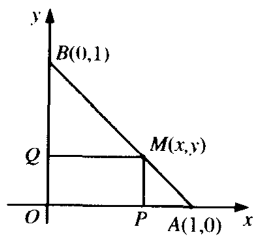


图 1－1－1

解题思路　MA、MB、OM 都可用距离公式转化为数。设点 M 在 x 轴、y 轴上的射影分别为 P、Q，则根据数形结合，可以设法推得 $x+y=1$，以此结论代入$|MA|^2+|MB|^2$，即可获证。

证明　设点 M 在 x、y 轴上的射影分别为 P、Q。

$\because$　$\angle OAB=45°$，　$\therefore |PM|=|PA|$。

$\because$　$|OP|+|PA|=1$，　而$|OP|=x$，$|PA|=|PM|=y$，

$\therefore\quad x+y=1$。

$$\begin{aligned}\therefore\quad |MA|^2+|MB|^2&=(x-1)^2+y^2+x^2+(y-1)^2\\&=x^2-2x+1+y^2+x^2+y^2-2y+1\\&=2(x^2+y^2)-2(x+y)+2\\&=2(x^2+y^2)=2|OM|^2。\end{aligned}$$

例 3　设动点 $P(\sqrt{|\cos\theta|},\sqrt{|\sin\theta|})$，其中 $\theta\in R$，当 θ 变化时，则点 P 与原点的距离的变化范围是________

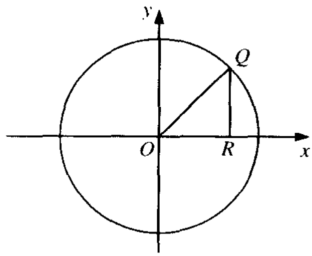


图 1－1－2

解题思路　根据距离公式，有 $|OP|=\sqrt{|\cos\theta|+|\sin\theta|}$。注意到点 $Q(\cos\theta,\sin\theta)$ 到原点 O 的距离等于 1，故点 Q 在以 O 为圆心，1 为半径之圆（单位圆）上运动，从而可知 $\sqrt{|\cos\theta|+|\sin\theta|}\geqslant|OQ|=1$。再由不等式 $\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，即可得 $|\cos\theta|+|\sin\theta|$ 的最大值。

解　$\because\quad |OP|=\sqrt{|\cos\theta|+|\sin\theta|}$，且 $Q(\cos\theta,\sin\theta)$ 在单位圆上运动，如图 1－1－2。在 $\triangle ORQ$ 中，$|OR|+|RQ|\geqslant|OQ|$，

$\therefore\quad |\cos\theta|+|\sin\theta|\geqslant|OQ|=1$。

$$\begin{aligned}\because\quad \frac{|\cos\theta|+|\sin\theta|}{2}&\leqslant\sqrt{\frac{|\cos\theta|^2+|\sin\theta|^2}{2}}\\&=\sqrt{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$$\therefore\quad |OP|=\sqrt{|\cos\theta|+|\sin\theta|}\leqslant\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt[4]{2}。$$

综上可知　$|OP|\in[1,\sqrt[4]{2}]$。

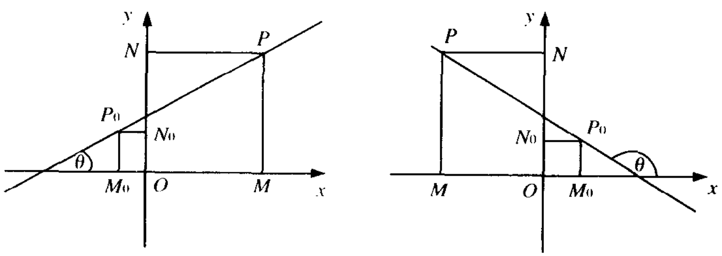
说明　如果将 Q 划分为 $\left(2n\pi,2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$、$\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2},\right.$

$2n\pi+\pi\big]$、$\left(2n\pi+\pi,2n\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right]$、$\left(2n\pi+\dfrac{3\pi}{2},2n\pi+2\pi\right]$ $(n\in Z)$，分别讨论，利用三角函数的知识也可获解，那就显得繁琐了。

例 4　已知直线 l 上有一定点 $P_0(x_0,y_0)$，且 l 的倾角为 θ，l 上任意一点 P，且 $|P_0P|=d$，试求点 P 的坐标。

解题思路　满足题设条件的点 P 有两种可能：(1)以 $\overrightarrow{P_0P}$ 为终边，x 轴正方向为始边所成的角与 l 的倾角相等；(2)以 $\overrightarrow{P_0P}$ 为终边，x 轴正方向为始边所成的角为 $\theta+\pi$，根据余弦函数、正弦函数的概念，即可得解。

解　(1)　当以 x 轴正方向为始边，$\overrightarrow{P_0P}$ 为终边所成的角为 θ，如图 1-1-3 所示。



(a)　　(b)

图 1-1-3

设点 P 的坐标为 (x,y)，则

$$\frac{M_0M}{|P_0P|}=\cos\theta,\qquad \frac{N_0N}{|P_0P|}=\sin\theta。$$

又　$M_0M=x-x_0$，　$N_0N=y-y_0$，　$|P_0P|=d$，

$$\therefore\quad \begin{cases}x-x_0=d\cos\theta,\\ y-y_0=d\sin\theta,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x_0+d\cos\theta,\\ y=y_0+d\sin\theta。\end{cases}$$

(2)　当以 x 轴正方向为始边，$\overrightarrow{P_0P}$ 为终边所成的角为 $\theta+\pi$，如图 1-1-4。

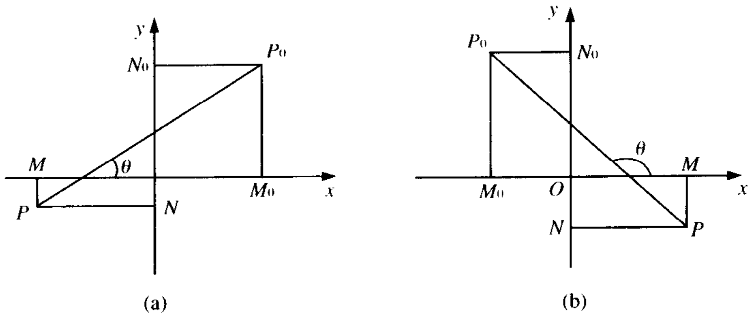


图 1－1－4

$$\because \quad \frac{M_0M}{|P_0P|} = \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta, \quad \frac{N_0N}{|P_0P|} = \sin(\theta + \pi)$$
$= -\sin\theta$,

$$\therefore \quad \begin{cases} x - x_0 = -d\cos\theta, \\ y - y_0 = -d\sin\theta, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 - d\cos\theta, \\ y = y_0 - d\sin\theta。 \end{cases}$$

综上，可知当 $\overrightarrow{OX}$ 与 $\overrightarrow{P_0P}$ 所成的角为 θ 时(此时点 P 在 P_0 的上方)，点 P 的坐标为 $(x_0 + d\cos\theta, y_0 + d\sin\theta)$；当 $\overrightarrow{OX}$ 与 $\overrightarrow{P_0P}$ 所成的角为 $\theta + \pi$ 时(此时，点 P 在 P_0 的下方)，点 P 的坐标为 $(x_0 - d\cos\theta, y_0 - d\sin\theta)$。

如果取有向线段 $\overrightarrow{P_0P}$ 的数量为 t，则(1)中的 $t = d$；(2)中的 $t = -d$，那么上述结果统一为点 P 的坐标为 $(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta)$。

说明　例 4 是求已知倾角为 θ 的直线 l 上任意一点 P 的坐标的通用方法。上述结果有广泛的应用。这对于几何问题研究中提高坐标化(解析化)的能力有积极作用。

例 5　$\triangle ABC$ 中，AT 为 $\angle A$ 的内角平分线，D、E 分别在 AB、AC 上，且 $|BD| = |CE|$，BC、DE 的中点分别为 M、N。求证：$MN \parallel AT$。