平面几何百题解

PING MIAN JI HE BAI TI JIE

广西人民出版社

平面几何百题解

陈钧初 编

广西人民出版社

平 面 几 何 百 题 解

陈铲初 编
责任编辑 刘恒
☆
广西人民出版社出版
（南宁市河堤路14号）
广西新华书店发行 桂林漓江印刷厂印刷
*
787×1092 1/32 3.375印张 1插页 76千字
1979年9月第1版 1984年5月第4次印刷
印数：245,601—340,800 册
书号：7113·302 定价：0.23 元

前　　言

几何证题是培养人们逻辑思维能力的学科之一，又是数学的一个重要内容和习作。几何证题就是从已知条件出发，借助有关定义、公理和定理依逻辑推理的方法来推演出我们所需的结论。

几何证题过程极为严谨，稍有疏忽，则导致错误。因此，证题前必须认真审题，明确“已知”与“求证”，然后按题目规定的条件，作出准确的图形，以助于分析思考；证题过程中，前提条件要齐备，根据要充分，结论与求证要相符；证题完毕要善于总结，摸索基本方法与规律，培养与提高自己的思维能力。

几何证题千变万化，颇为复杂，证题方法非止一二，但解同类之题，着手之法大略相仿，采用定理一般相同。为了帮助初学几何的读者掌握几何证题的基本规律和方法，本书参考了许莼舫《几何定理和证题》等书，挑选百题，按证题的结论，分类证明，以供学习参考。

本书特点：例题较典型，有易有难，由浅入深，循序渐进；每题有多种提示与解法。书末附有证题过程图解及平面几何定理概述图表。

本书主要供初、高中学生及同等学历的知识青年自学，同时也可供中学青年教师教学时参考。

编者

一九七八年十月

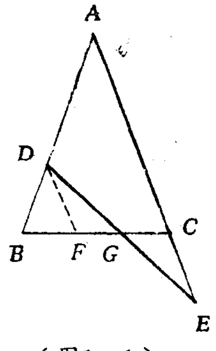
目　　　录

一、证明两线段相等

证明两线段相等，一般应用有关线与角关系的定理来着手证明。例如，全等△定理、平行定理、圆的定理以及有关比例线段的定理，应根据题意加以选择运用。若直接难以证明其相等时，则可证明它们都等于第三者。

例 1　$\triangle ABC$中，$AB=AC$，于AB上取D点，又在AC延长线上取E使$BD=CE$，连结DE交BC于G。求证：$DG=EG$。

（提示一：DG、EG分别是△GDB、△GEC的一边，很显然这两个三角形不是全等。所以必添辅助线DF∥AE，造另一个△GDF与△GEC全等，再加以证之即可。）



（图1·1）

〔证法一〕　作$DF\parallel AE$交BC于F，

$\therefore$　$\angle FDG=\angle CEG$，（内错角）

$\angle DFG=\angle ECG$，（内错角）

$\angle DFB=\angle ACB$，（同位角）

而　$AB=AC$，（已知）

$\therefore$　$\angle B=\angle ACB$，（同一△中，等边对等角）

$\therefore$　$\angle DFB=\angle B$，（等量代换）

$\therefore$　$BD=FD$，（同一△中，等角对等边）

$\because$　$BD=CE$，（已知）

$\therefore$　$FD=CE$，（代换）

∴ $\triangle DGF \cong \triangle EGC$，（角、边、角）

故 $DG = EG$。（全等△对应边相等）

（提示二：因DG、EG同在一直线，证其相等，即证G为DE之中点，所以可利用△中位线的定理来证之。作辅助线DF∥BC，只需证明C为EF之中点即可。）

〔证法二〕 作$DF \parallel BC$交AC于F，

∴ $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，（同位角）

又 $AB = AC$，（已知）

∴ $\angle 2 = \angle 4$。（等边对等角）

∴ $\angle 1 = \angle 3$。（代换）

∴ $AD = AF$。（等角对等边）

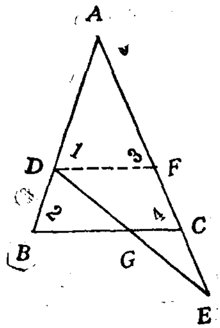
∴ $BD = CF$。（等量减等量，差相等）

∵ $BD = CE$，（已知）

∴ $CF = CE$。（代换）

而 $DF \parallel BC$，（作图）

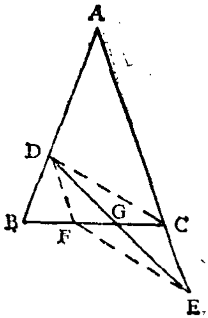
故 $DG = EG$。（一直线过△的一边中点，且平行第三边，则必过另一边中点）



（图1·2）

（提示三：本题还可以利用平行四边形来证明，故作辅助线DF∥AE交BC于F，连结DC、FE，只需证明CDFE为平行四边形即可。）

〔证法三〕作 $DF \parallel AE$ 交 BC于F，



（图1·3）

连结DC、FE。

∴ $\angle DFB=\angle ACB$，（同位角）

在$\triangle ABC$中，

$AB=AC$，（已知）

∴ $\angle B=\angle ACB$，（同一△中，等边对等角）

∴ $\angle DFB=\angle B$，（等量代换）

∴ $BD=DF$。（同一△中，等角对等边）

∵ $BD=CE$，（已知）

∴ $DF=CE$。（等量代换）

∴ $CDFE$是▱。（一组对边平行且相等的四边形是▱）

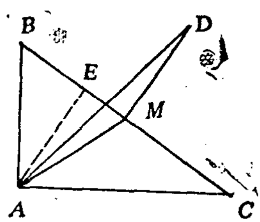
故 $DG=EG$。（平行四边形的两对角线互相平分）

（本题还有多种证法，可自行证明）

例2 在直角$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，AD是$\angle A$的平分线，M为BC的中点，$MD\perp BC$，求证：$MA=MD$。

（提示：因所证的两线段均为一△的两边，所以只需证明△AMD为等腰△即可，也就是证∠D＝∠MAD。为了使求证与已知条件相联系，故添辅助线AE∥MD加以证之。）

〔证明〕 过A作$AE\perp BC$于E，



（图2）

∴ $AE\parallel DM$，(同垂直于一直线的两直线平行)

∴ $\angle EAD=\angle MDA$。(内错角)

在$Rt\triangle ABC$和$Rt\triangle ABE$中，

$\angle BAE=\angle C$。

（同角的余角相等）

∵ M为BC的中点，（已知）

∴ $AM=MC$。(直角△中，斜边上的中线等于斜边的一半)

$\therefore$ $\angle MAC=\angle C$，（等边对等角）

$\therefore$ $\angle BAE=\angle MAC$，（代换）

$\because$ AD是$\angle A$的平分线，（已知）

$\therefore$ $\angle EAD=\angle MAD$，（等量减等量，差相等）

$\therefore$ $\angle MAD=\angle MDA$，（代换）

$\therefore$ $\triangle AMD$是等腰△。（两内角相等的△是等腰△）

故 $MA=MD$。（等腰△两腰相等）

例 3 $\triangle ABC$为任意三角形，$ABDE$、$CAFG$均为正方形；$AN\perp BC$，延长NA交EF于M。求证：$EM=MF$。

（提示：因EM、MF在一直线上，本题要证明EM＝MF，根据▱对角线互相平分可以得到证明，所以过E作EH∥AF交AM延长线于H，连结HF，只需证明AEHF是▱即可。）

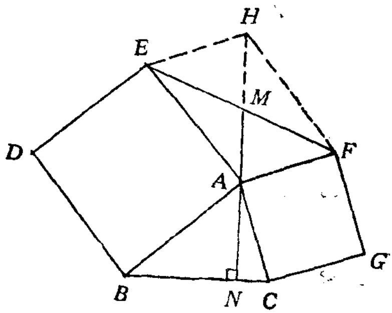
〔证明〕（附注一）

过E作$EH\parallel AF$交AM延长线于H，连结HF。

$\because$ $ABDE$、$CAFG$是正方形，

$\therefore$ $EA\perp AB$、$AF\perp AC$，

$\therefore$ $EH\perp AC$。（一直线垂直于平行线中一条必垂直于另一条）



（图 3）

又 $AN\perp BC$，

$\therefore$ $\angle EAH=\angle ABC$，$\angle EHA=\angle ACB$。（对应边互相垂直的两锐角相等）

附注一：证明过程中，所根据的定理，可略去不写或只写一些主要定理。

而　$AE=AB$,

∴　$\triangle EAH \cong \triangle ABC$，（角、边、角）

∴　$EH=AC$。

又　$AF=AC$,

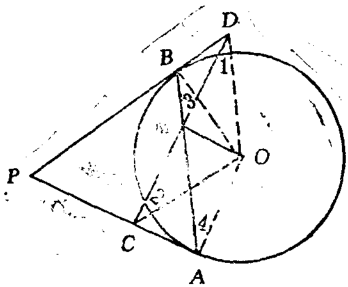
∴　$EH=AF$,

∴　$AEHF$是▱。（一组对边平行且相等的四边形是▱）

故　$EM=MF$。（▱对角线互相平分）

例4　过⊙O外一点P作圆的切线PA、PB，A、B为切点，M为弦AB上任意一点，过M作直线垂直于OM交PA于C，交PB于D，求证：$CM=DM$。

（提示：要证明CM＝DM，而OM⊥CD，所以只需证明△OCD为等腰三角形，即证明∠1＝∠2。连OA、OB后，不难看出M、O、A、C以及M、O、D、B分别共圆，那么，便可推出∠1＝∠2成立。）



（图 4）

〔证明〕　连结OA、OB、OC、OD,

∵　PA、PB为⊙O之切线,

∴　$OA \perp PA$、$OB \perp PB$。

又　$OM \perp CD$,

∴　M、O、A、C四点共圆；

　　M、O、D、B四点共圆。

∴　$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$。

而　$OA=OB$，　　即　$\angle 3=\angle 4$，

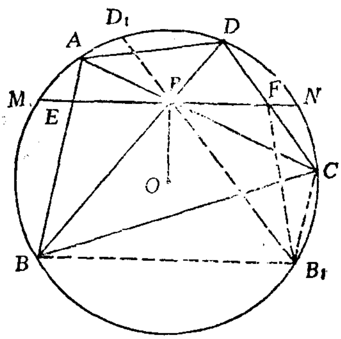
$\therefore \quad \angle 1 = \angle 2$，

$\therefore \quad \triangle OCD$为等腰△，

故 $\quad CM = DM$。

例5 四边形$ABCD$内接于$\odot O$，P是它的对角线交点，过P点作弦MN垂直于PO而交直线AB、CD于E、F，
求证：$PE = PF$。

（提示：如果在⊙O上作B关于OP的对称点B_1，连B_1F。要证明PE＝PF，只需证明△BPE≌△B_1PF即可，证明两△全等可根据关于轴对称的性质而获证。）



（图5）

〔证明〕 作弦$BB_1 \parallel MN$，则B_1是B关于OP的对称点。
连结B_1P，且延长B_1P交$\odot O$于D_1。

$\therefore \quad \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{B_1N}$，$\overset{\frown}{MD_1} = \overset{\frown}{ND}$。

连结B_1C、B_1F，

而$\angle MFD$的度数$= \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{MD_1} + \overset{\frown}{D_1D} + \overset{\frown}{NC})$的度数，

$\angle D_1B_1C$的度数$= \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{D_1D} + \overset{\frown}{DN} + \overset{\frown}{NC})$的度数，

$\therefore \quad \angle MFD = \angle D_1B_1C$。

$\therefore \quad P$、B_1、C、F四点共圆。

$\therefore \quad \angle EBP = \angle FCP = \angle FB_1P$。

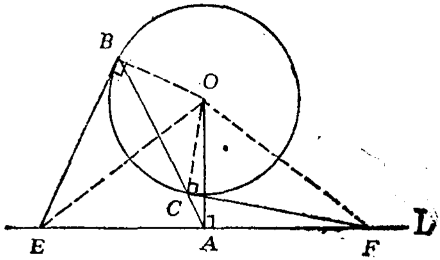
又　$BP=B_1P$，$\angle EPB=\angle FPB_1$，

∴　$\triangle BPE\cong\triangle B_1PF$，

故　$PE=PF$。

例6　直线L与$\odot O$相离，$OA\perp L$于A，过A作一割线交$\odot O$于B、C，过B、C分别作$\odot O$之切线BE、CF且分别交L于E、F。求证：$AE=AF$。

（提示：本题证法与例4相仿，连OE、OF后，只需证明△OEF为等腰△即可。）



（图6）

〔证明〕　连结OB、OC、OE、OF，

∵　BE是切线，

∴　$OB\perp BE$，

又　$OA\perp AE$，

∴　O、A、E、B四点共圆，（对角互补的四边形内接于圆）

∴　$\angle OBA=\angle OEA$。（同弧上的圆周角相等）

∵　CF是切线，

∴　$OC\perp CF$，　而$OA\perp AE$，

∴　O、C、A、F四点共圆，（立于一边的同旁两视角相等的四边形内接于圆）

∴　$\angle OCB=\angle OFA$。（圆内接四边形的外角等于内对角）

又　$OB=OC$，

∴　$\angle OCB=\angle OBA$，

∴　$\angle OEA=\angle OFA$，

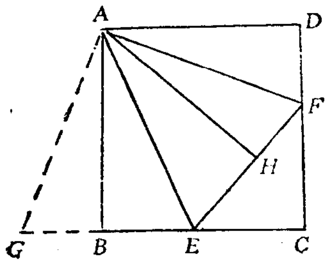
$\therefore$ $\triangle OEF$是等腰△。

又 $OA\perp EF$.

故 $AE=AF$.（等腰△底边上的高是底边上的中线）

例 7 E、F分别是正方形 $ABCD$ 的BC、CD 上的点，且$\angle EAF=45°$，$AH\perp EF$于H，求证：$AH=AB$。

（**提示**：延长CB到G，使BG＝DF，连结AG。要证AH＝AB，**只需证明**△AGE≌△AFE即可。）



（图 7）

〔证明〕延长CB到G，使$BG=DF$，连结AG，

则 $Rt\triangle AGB\cong Rt\triangle AFD$.

$\therefore$ $AG=AF$，$\angle GAB=\angle FAD$。

在$\triangle AGE$和$\triangle AFE$中，

$\because$ $AG=AF$，

$$\angle GAE=\angle GAB+\angle BAE=\angle FAD+\angle BAE$$
$$=90°-45°=45°$$
$$=\angle FAE,$$

而AE为公共边，

$\therefore$ $\triangle AGE\cong\triangle AFE$。

故 $AH=AB$。

例8 作直线MN平行于梯形$ABCD$的两底而与对角线AC、BD分别相交于E、F。求证：$ME=FN$。

（提示：本题是应用相似三角形的比例线段来证明$\frac{ME}{CD}=\frac{FN}{CD}$，推出ME＝FN成立。）

〔证明〕 $\because$ $AB \parallel MN \parallel DC$，

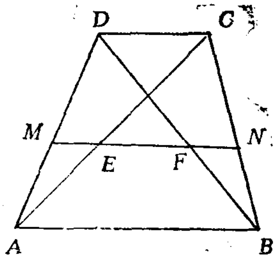
$\therefore$ $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$，

（平行线截割定理）

$\therefore$ $\frac{AM}{AD}=\frac{BN}{BC}$。（合比）

又 $\triangle AEM \backsim \triangle ACD$，

$\triangle BNF \backsim \triangle BCD$，



（图8）

$\therefore$ $\frac{ME}{CD}=\frac{AM}{AD}$，$\frac{FN}{CD}=\frac{BN}{BC}$。（相似△对应边成比例）

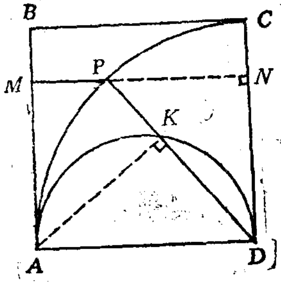
$\therefore$ $\frac{ME}{CD}=\frac{FN}{CD}$，

故 $ME=FN$。

例9 以正方形$ABCD$的D为圆心，一边长为半径画$\overset{\frown}{AC}$，又以AD为直径在正方形内作一个半圆。P为$\overset{\frown}{AC}$上一点；连结PD交半圆于K，作$PM \perp AB$于M。求证：$PK=PM$。

（提示：要证明△PMK为等腰△来获证PK＝PM是较为困难的。如将MP延长交CD于N，显然MN＝AD＝PD，所以只需证明KD＝PN，再根据等量之差的公理而获证PK＝PM。即证明Rt△AKD≌Rt△DNP便可得证。）

〔证明〕 延长MP交CD于N，并连结AK。



（图9）

∵ $ABCD$是正方形，

$PM \perp AB$，

∴ $MN \parallel AD$；

$MN \perp CD$。

又 AD为直径，

∴ $\angle AKD = 90°$。

（直径上的圆周角是直角）

在$Rt\triangle AKD$和$Rt\triangle DNP$中，

$\angle ADK = \angle NPD$，（内错角）

$AD = PD$，（同圆半径）

∴ $\triangle AKD \cong \triangle DNP$。（锐角、斜边）

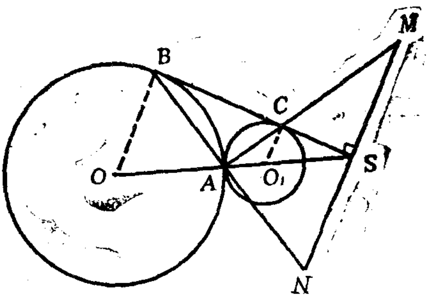
∴ $KD = PN$。

又 $MN = AD = PD$，

∴ $PD - KD = MN - PN$，

即 $PK = PM$。（等量减等量，差相等）

例10 $\odot O$和$\odot O_1$外切于A，BC为两圆之外公切线，切点为B、C，且与OO_1的延长线交于S，过S作$MN \perp BS$分别交AC和BA之延长线于M和N。



（图10）

求证：$MS = NS$。

（提示：要证MS = NS，

只要证明它们都等于 AS即可，也就是证明△ASM和 △ASN均为等腰△即可获证。）

〔证明〕 连结 OB、O_1C，

∵ BC为两圆外公切线，

∴ $OB\perp BC$，$O_1C\perp BC$。

又 $MN\perp BS$，

∴ $OB\parallel O_1C\parallel MN$。

∴ $\angle ACO_1=\angle M$，$\angle OBA=\angle N$。

又 $\odot O$和$\odot O_1$外切于A，

∴ $OB=OA$，$O_1C=O_1A$，

∴ $\angle OBA=\angle OAB$，$\angle O_1CA=\angle O_1AC$。

又 $\angle NAS=\angle OAB$，

∴ $\angle NAS=\angle N$，$\angle O_1AC=\angle M$，

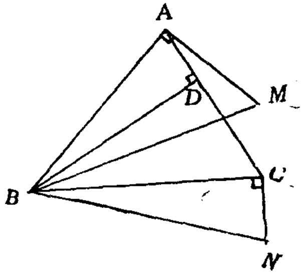
∴ $\triangle ASN$和$\triangle ASM$均为等腰△。

∴ $NS=SA$，$MS=SA$，

故 $MS=NS$。

例11 在$\triangle ABC$中，$BD\perp AC$于D，过A作$MA\perp AB$使$AM=CD$，过C作$NC\perp BC$使$CN=AD$。求证：$BM=BN$。

（提示：因所求证的两线段分别是两个直角△之斜边，很显然这两个△不能全等。直角△中有关边的关系的定理是勾股定理，所以本题可利用勾股定理来证之。）



图（11）

〔证明〕

∵ $BD\perp AC$、$MA\perp AB$、$NC\perp BC$，

$AM=CD$，$CN=AD$。

根据勾股定理得：

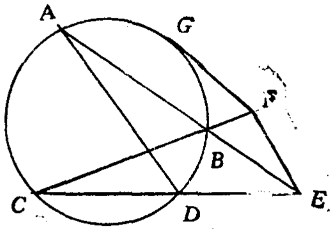
$$AB^2 = BD^2 + AD^2,$$
$$BM^2 = AB^2 + AM^2$$
$$= BD^2 + AD^2 + CD^2;$$
$$BC^2 = BD^2 + CD^2,$$
$$BN^2 = BC^2 + CN^2$$
$$= BD^2 + CD^2 + AD^2;$$
∴ $BM^2 = BN^2$,

故 $BM = BN$。

例12 延长⊙O的两弦AB、CD交于圆外一点E，过E点作AD的平行线交CB的延长线于F，过F点作⊙O的切线 FG。求证：$FG = FE$。

（1959年全国高等院校招生考试试题）

（提示：由圆幂定理可知：$FG^2 = FC \cdot FB$，如果证明EF也是FC、FB的比例中项，问题即可解决。关键是证明△EBF∽△CEF。）



（图12）

〔证明〕 ∵ $FE \parallel AD$,

∴ $\angle FEB = \angle BAD$。

又 $\angle BAD = \angle FCE$，（同弧上的圆周角相等）

∴ $\angle FEB = \angle FCE$。

∵ $\angle CFE = \angle EFB$，（公用）

∴ $\triangle EFB \backsim \triangle CFE$，

∴ $\dfrac{EF}{FC} = \dfrac{FB}{EF}$，即$EF^2 = FC \cdot FB$。

又 FG为圆的切线，

∴ $FG^2 = FC \cdot FB$。（圆幂定理）