連續映射的和
矢量場的同倫理論

B.Г. 巴爾佳斯基著

科 學 出 版 社

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ
ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ
И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ
Издательство Академии наук СССР
Москва 1955

內 容 提 要

本書分兩部分:同調理論和同倫理論.各佔約一半篇幅.第一部分從單純複合形和胞腔複合形的上下同調羣的定義開始,然後討論流形,上積,Steenrod 平方;是代數拓撲學系統的引論.第二部分開始是同倫羣和障礙鏈的概念;其次是 Hopf 分類定理、同調羣和同倫羣間的關係,流形上的矢量場,n 維球的 $n+1$ 維同倫羣的計算;最後是第二障礙問題的討論.本書包含著者自己的工作.著者並未採用最普遍的定義,也沒有搜羅最新的結果,只是首先系統地證明一些經典定理,作好準備,以便於最後應用到第二障礙的問題的討論.

在不多的篇幅裏,系統地說明了代數拓撲的較基本的部分,是本書的特點.

連續映射的和矢量場的同倫理論

В. Г. 巴 爾 佳 斯 基 著
江澤涵 裘光明 程慶民 譯

*

科 學 出 版 社 出 版 (北京朝陽門大街 117 號)
北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號
科學出版社上海印刷廠印刷 新華書店總經售

*

1958年7月第一版 書號:1280 字數:174,000
1958年7月第一次印刷 開本:850×1168 1/32
(滬) 0001—1,458 印張:7 1/4
定價:(10) 1.40 元

序　言

本書專門敍述同倫理論中的一些基本的、在很大程度上已經成爲經典的問題. 在書中還以便於用來解決同倫問題的形式,簡略地敍述了同調理論.

在本書前六節中敍述同調理論, 同調理論愈來愈成爲同倫拓樸中所應用的工具. 熟悉情況的讀者只要熟識一下術語和記號,就可以把這些材料的全部或大部分略去不讀.

在§1中給出全書的基本概念——多面體,單純複合形,並且討論它們的最簡單性質. 在定義定向時,採用的方法和通行的方法(例如參看[1])不同;我們這裏不利用頂點的次序,而以矢量基底的討論爲基礎.

在§2中定義胞腔複合形,並且討論和它有基本聯系的下列諸概念:胞腔映射,胞腔的關聯係數,胞腔映射的層數. 我們在這裏不傾向於使得敍述具有最大的普遍性,因而只從應用的簡便方面來選擇胞腔複合形的最合理的定義.

在§3中作出胞腔複合形(特别是單純複合形)的同調羣. 在本節的末尾部分,以可能的方式之一引進了連續同調的理論. 這理論在後來的敍述中並不應用.

作出同調羣是前三節的基本目的.

以後三節(§§4—6)的內容是同調理論的進一步發展.

在§4中討論流形的最簡單的同調性質. 値得注意的是,在建立星形同調的時候,我們沒有考慮 Л. С. Понтрягин 所引進的所謂 h 流形[27]. 我們不用 h 流形而能成功,是由於運用了複合形的組合聯合這一個概念. "組合聯合"在後來也要使用.

在§5中作出相交的指數(用拓撲不變的方式). 爲了引進一

般位置的鏈，利用了 Л. С. Понтрягин 詳細研究過的 m 重分[3]. 在本節的末尾定義了閉鏈的環繞係數.

在 § 6 中討論 Колмогоров-Alexander 乘積和 Steenrod 平方[4, 5]. 在解決同倫問題時，這些同調運算是非常重要的. 在敍述 Steenrod 平方時作了一些簡化；我認爲這種簡化使得這個極爲簡單的運算容易理解. 在 6:1 段中的 Колмогоров-Alexander 乘積的定義與論文[6]中的做法相仿.

本書的後半部（§§ 7—15）討論同倫問題. 同倫問題在大多數情形下，都歸結成爲這種映射的分類問題. 這種映射是把球面變到同維球面或者低維球面的，這就是說，歸結成爲計算同倫羣 $\pi^{n+k}(S^n)$, $k \geqslant 0$（參看 § 7）的問題. 在 §§ 7—10 中討論那些歸結成爲計算羣 $\pi^n(S^n)$ 的諸同倫問題，即相當於 $k=0$ 的情形（"零次"的同倫問題）. 在其他諸節中所討論的問題，都是歸結成爲羣 $\pi^{n+1}(S^n)$ 的計算的（$k=1$，"一次"的問題）. 最近得到部分解決的更高次的同倫問題，本書中不加以討論.

在 § 7 中給出同倫羣的普遍定義，並且討論它們的最簡單性質. 同倫羣好像是高維情形的基本羣；基本羣也在本節中討論. 所敍述的同倫羣的定義甚爲簡單，而且與基本羣的定義相仿.

在 § 8 中敍述障礙鏈和差別鏈的理論，它們都是同倫拓撲的重要工具. 在 § 9 中有 Hopf 關於 n 維複合形到 n 維球面的映射的經典結果[7]，這結果是從 Whitney 的分類定理[8]引出的.

在 § 10 中包括有 Hurewicz 定理[9]，這是關於第一個非零的同倫羣和相應的同調羣同構的. 這裏也證明了關於基本羣的定理，及在同倫性質和同調性質之間建立聯系的 Л. С. Понтрягин 定理[10].

§ 11 包含着關於微分流形概念的諸普遍定義，並且詳細地研究了後來起重要作用的兩個具體流形的性質：Stiefel 流形 $V_{n,k}$ [11]和複射影平面 M^4. Steenrod 平方的研究隨着流形 M^4 的討

論而結束.

在 § 12 中講述應用障礙鏈理論到流形上的矢量場的情形. 由此得到 Stiefel 關於矢量場的經典結果.

§ 13 講述 $n+1$ 維球面到 n 維球面的映射的分類, 即羣 $\pi^{n+1}(S^n)$ 的計算. 我們部分地利用了由 Л. С. Понтрягин 所發展的矢量場的方法[12] 作爲工具, 也利用了在 § 6 中討論了的 Колмогоров-Alexander 和 Steenrod 的同調運算.

在 § 14 中給出的第二障礙的計算是關於複合形到球面的映射的. 其次引出了 Л. С. Понтрягин [13]和 Steenrod [5]的結果, 那是關於 $n+1$ 維複合形到 n 維球面的映射的分類的. 那裏還引出了 М. М. Постников 定理[14]的特殊情形, 它在 § 15 中將有應用.

最後的一節——§ 15 包含着著者的結果[15], 那是關於矢量場情形的第二障礙的.

著者計劃在最近的將來單獨寫一篇論文, 討論在任意反對稱乘積(即纖維叢——譯者)情形下如何計算第二障礙的問題.

В. Г. 巴爾佳斯基(Болтянский)

目　次

II. 同倫理論和它的應用

I. 同 調 理 論

§ 1. 單純複合形

1:1. 單純複合形的定義 設 R 是歐幾里得矢量空間. 把這空間的元素叫作點或矢量. 再設 $a_0, \cdots, a_r$ 是空間 R 的這樣一組點, 使得矢量 $a_0 - a_1, \cdots, a_0 - a_r$ 綫性無關[1]. 設 R^r 是具有形式

$$a = \lambda^0 a_0 + \lambda^1 a_1 + \cdots + \lambda^r a_r$$

的點集,其中 λ^i 是任意的滿足條件

$$\lambda^0 + \lambda^1 + \cdots + \lambda^r = 1$$

的實數. R^r 叫作空間 R 的 r 維平面, 而平面 R^r 的子集 $T^r = [a_0, a_1, \cdots, a_r]$, 由所有 λ^i 都是非負數的點 a 所組成的, 叫作 r 維單純形,平面 R^r 叫作單純形 T^r 的承載平面, 點 $a_0, \cdots, a_r$ 叫作 T^r 的頂點,而且數 λ^i 叫作點 $a \in T^r$ 的重心坐標. 單純形 T^r 是點 $a_0, a_1, \cdots, a_r$ 的凸外売. 我們注意,根據這個定義,單純形是閉集. 以

$$\lambda^0 = \lambda^1 = \cdots = \lambda^r = \frac{1}{r+1}$$

爲坐標的點叫作單純形 T^r 的重力中心 (或者簡單地說, 重心或中心).

如果只從點 $a_0, a_1, \cdots, a_r$ 中取一部分點,例如 $a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_s}$, 則由這些頂點所決定的 s 維單純形 T^s 叫作單純形 T^r 的面. 用在 T^r 中所引進的重心坐標時,面 T^s 能用方程 $\lambda^j = 0$ 表出,其中 j 遍

1) 容易看出,在這種情形下,矢量

$$a_i - a_0,\ a_i - a_1,\ \cdots,\ a_i - a_{i-1},\ a_i - a_{i+1},\ \cdots,\ a_i - a_r$$

也是綫性無關的.

歷從 0 到 r，而又異於 $i_0, i_1, \cdots, i_s$ 的所有數. T^r 的點，它的全體重心坐標都是正數的，叫作內點，其它的點（即屬於邊緣的）叫作邊緣點，一維單純形叫作綫段. 有時爲方便起見，也把 T^r 認爲是它自己的面；這個面（異於其它的），叫作非正常的.

空間 R 的有限個單純形的集合 K 叫作單純複合形（或者簡單地說複合形），如果：1）K 中的每兩個單純形或者不相交，或者它們的交是它們中每一個的面，這個面可以是非正常的；2）集合 K 的每一個單純形的全體面也屬於 K. 複合形 K 的全體單純形的點集理論的和（看作是點集，即不剖分爲單純形）叫作複合形 K 的體，用 $\tilde{K}$ 表示. 成爲一個複合形 K 的體的點集叫作多面體；K 叫作這多面體的三角剖分. 當然，一個多面體並非只有唯一的一個三角剖分. 多面體是歐幾里得空間中的有界閉集合，因此是一個列緊度量空間. 複合形中的單純形的最大維數叫作這複合形的維數，而且，因此也叫作相應的多面體的維數[1]. 如果某一個複合形 K_1 的全體單純形也都在複合形 K 中出現，則 K_1 就叫作 K 的子複合形. 取複合形的維數不超過數 s 的全體單純形，就得到複合形 K 的一個子複合形 K^s，叫作 K 的 s 維骨架.

設 K 是複合形，$\tilde{K}$ 是相應的多面體，K^* 是和多面體 $\tilde{K}$ 同胚的列緊度量空間，而且 e 是把多面體 $\tilde{K}$ 變成 K^* 的同胚映射. 如果 T^r 是複合形 K 的單純形，而且 a 是這單純形的以 $\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^r$ 爲重心坐標的點，則在和這單純形同胚的集合 $e(T^r)$ 中，我們也把同樣的重心坐標 $\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^r$ 指定給點 $e(a)$. 我們做到了把列緊度量空間 K^* 剖分成"彎曲的單純形" $e(T^r)$，其中引進了重心坐標. 從單純形過渡到它的面時，重心坐標的改動就如同在複合形 K 中一樣. 我們將說，K^* 是彎曲的多面體，而所建立的彎曲單純形的剖分是它的三角剖分. 要把彎曲的多面體 K^* 作三角剖分，應該

1）例如利用，以後將證明的關於內點的不變性的定理（參看 1:7 段），不難證明，如此定義的多面體的維數不依賴於多面體的三角剖分的方式.

不只是把它剖分成和單純形同胚的子集，還要在這些子集中引進重心坐標，這就是說，還要選取確定的從複合形K的體到列緊度量空間 K^* 的同胚．此後，如果沒有申明是相反的情形，我們所指的永遠不是彎曲的多面體，而是歐幾里得空間R中的通常的多面體．當然，所有說過的事實，加上顯然的更改之後，就是對於彎曲的多面體來說，也都是正確的．

1:2. 角錐、重心重分　設K是空間R中的單純複合形．我們假設R中存在這樣的一個點a，使得對於任意點$x\in\tilde{K}$，綫段$[a, x]$和多面體$\tilde{K}$有唯一的公共點x[1]．在這情況下，當$x\in\tilde{K}$時，我們把所有綫段$[a, x]$的點集理論的和叫作$\tilde{K}$上的角錐，用$a\tilde{K}$表示．點a叫作角錐的頂點．r維的單純形T^r上的角錐aT^r是一個$r+1$維的單純形；這個事實的證明是有關於應用重心坐標的一個容易的習題(參看，例如[1])．根據這個事實，角錐$a\tilde{K}$剖分成三種單純形：複合形K原有的單純形，這些單純形上的角錐和零維單純形a．所得到的複合形用aK表示，叫作複合形K上的角錐．

複合形K_1叫作複合形K的重分，如果相應的多面體$\tilde{K}_1$和$\tilde{K}$重合，而且對於複合形K_1的每一個單純形T，總能夠找到K的一個單純形(可能是較高維數的)包含T．利用角錐的概念，我們定義一種基本的重分，叫作重心重分．我們用歸納法定義複合形K的重心重分K'．對於零維的複合形K，命$K'=K$．如果維數$\leqslant s$的複合形的重心重分都已定義了，而且K是一個$s+1$維的複合形，那麼首先作s維的骨架K^s的重心重分．設T^{s+1}是K的任一個$s+1$維的單純形．它的邊緣在K^s上，由於作了骨架K^s的重心重分，這邊緣也被重分了．我們用Σ^s表示這重分了的邊緣，而且在單純形T^{s+1}之內取一個頂點，來作出Σ^s上的角錐．角錐$a\Sigma^s$的體和T^{s+1}重合(用重心坐標容易證明；參看，例如[1])，因

1) 如果歐幾里得空間的維數大於$2n+1$，其中n是多面體$\tilde{K}$的維數，這樣的點a總能夠找到(參看[1])．

此我們得到單純形 T^{s+1} 的重分。 作了所有 $s+1$ 維單純形的這樣的重分，就得到複合形 K 的重心重分。 如果每次選取的頂點都和相應的單純形的重心重合，則所得到的重心重分叫作正常的. （圖 1 中表出二維單純形的重心重分.）

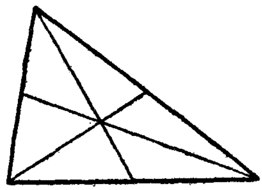

圖 1.

不難證明（利用重心坐標作簡單的計算）（參看[1]），單純形 T^r 的非頂點的每一點，都是一條整個地屬於單純形 T^r 的綫段的內點. 因此，如果點 a, b 中只要有一個不是單純形 T^r 的頂點，則綫段 $[a, b]$ 也不是 T^r 所包含的綫段中的最長的. 於是，單純形的直徑就等於它的最長的稜（一維面）的長度. 在一個複合形中出現的最大的單純形的直徑叫作這複合形的細密程度. 它等於複合形的稜（一維單純形）的長度中最大的.

我們要證明，正常的重心重分 K' 的細密程度不超過 $\delta\left(1-\frac{1}{r+1}\right)$，其中 δ 是原來的複合形 K 的細密程度，而 r 是 K 的維數.

實際上，在承認這命題對於維數 $<r$ 的複合形已經證明了時，來考慮 r 維複合形 K. 那麼，複合形 K' 的每一條稜或者被包含在骨架 K^{r-1} 之中，因而（根據歸納法的假設）它的長度不超過量 $\delta\left(1-\frac{1}{r}\right)<\delta\left(1-\frac{1}{r+1}\right)$，或者它連接某一個單純形 T^r 的中心和邊緣上的一個點. 但是，單純形 T^r 的重心 m 到這單純形的任一點 a 的距離不超過 $\delta\left(1-\frac{1}{r+1}\right)$，因爲點 $b=m+\frac{1}{r}(m-a)$ 屬於單純形 T^r（應用重心坐標就可以驗證），而點 m 分長度不超過 δ 的綫段 $[a, b]$ 成比值 $r:1$.

從證明了的事實得到，作了重心重分 s 次後，我們得到複合形 $K^{(s)}$，它的細密程度不超過 $\delta\left(1-\frac{1}{r+1}\right)^s$. 於是，對於任意多面

體 $\tilde{K}$,存在任意細密的單純重分.

設 K 是某一個複合形, K' 是它的重心重分, 而且 a 是複合形 K 的一個頂點, K' 中所有以 a 爲頂點的單純形的和集, 叫作頂點 a 的重心星形. 重心星形是閉集,而且它們的和集(對於複合形K 的所有頂點而說的)等於 $\tilde{K}$. 頂點 $a_0, \cdots, a_s$ 的重心星形的交集是非空集, 當而且只當 K 有以 $a_0, \cdots, a_s$ 爲頂點的單純形(參看, 例如,[1]).

我們約定說,一組集合 $\{F_1, \cdots, F_q\}$ 有相重數 r, 如果這組中有 r 個集合,它們的交集是非空集,而這組中每 $r+1$ 個集合的交集都是空集. 一組閉集 $\{F_1, \cdots, F_q\}$ 叫作列緊度量空間 X 的覆蓋,如果 X 被包含在這些集合的和集之中. 覆蓋叫作 ε 覆蓋,如果集合 F_i 中每一個的直徑都小於 ε. 於是, 如果 $\tilde{K}$ 是 r 維多面體, 它的某一個重分的所有頂點的重心星形就組成多面體 $\tilde{K}$ 的一個覆蓋, 具有相重數 $r+1$. 因爲存在任意細密的重分, 對於任意 $\varepsilon>0$,每一個 r 維多面體有具有相重數 $r+1$ 的 ε 覆蓋.

1:3. 映射的單純逼近 把單純形 $T^r=[a_0, a_1, \cdots, a_r]$ 變到單純形 T^s 的映射 f 叫作單純的,如果 f 把 T^r 的頂點變到 T^s 的頂點,而且 f 是仿射的,這就是說, f 把點 $a=\lambda^0 a_0+\lambda' a_1+\cdots+\lambda^r a_r$ 變成點 $f(a)=\lambda^0 f(a_0)+\lambda' f(a_1)+\cdots+\lambda^r f(a_r)$. 只考慮單純形 T^r 的任一面時, f 還是單純的. 如果 K 和 L 都是單純複合形, 並且把多面體 $\tilde{K}$ 變到多面體 $\tilde{L}$ 的映射 f 把 K 的每一個單純形單純地變到複合形 L 的某一個單純形, f 就叫作把複合形 K 變到複合形 L 的單純映射. 我們說, 單純形 T 在映射 f 下退化,如果它的不只一個頂點在 f 下都變成複合形 L 的同一個頂點.

把空間 X 變到空間 Y 的兩個映射 f 和 g 叫作互相同倫的, 如果存在把空間 X 變到 Y 的一族變換 f_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, 使得 $f_0=f$, $f_1=g$, 而且點 $f_t(x)$ 是 t 和 $x \in X$ 這兩個變元的連續函數, 這一族 f_t 叫作把映射 f_0 變成 f_1 的形變或同倫. 形變 f_t 叫作相對於集

合 $M\subset X$ 的形變，如果對於任意 $t\in[0,1]$ 和 $x\in M$，總有：$f_t(x)=f_0(x)$，這就是說，如果任意點 $x\in M$ 的像點在形變下不移動．不難看出，對於把空間 X 變到 Y 的映射，同倫關係(相對於某一集合 $M\subset X$)是自反的，對稱的而且是傳遞的．

下述的幾何解釋對於以後是方便的．考慮空間 X 乘變數 t 的單位綫段 $\bar{I}=[0,1]$ 的拓撲乘積 $X\times\bar{I}$．設 F 是把乘積 $X\times\bar{I}$ 變到 Y 的連續映射．利用關係 $f_t(x)=F(x,t)$ 來定義把空間 X 變到 Y 的映射 f_t．那麼，f_0 和 f_1 是分別從考慮乘積 $X\times\bar{I}$ 的"底" $X\times 0$ 和"頂" $X\times 1$ 而得到的，而且 f_t 就是把映射 f_0 變成映射 f_1 的連續形變．反過來，如果把空間 X 變到 Y 的映射的形變 f_t 給定了，那麼，用式子 $F(x,t)=f_t(x)$ 來定義 F，我們就得到把空間 $X\times\bar{I}$ 變到 Y 的連續映射．

定理　設 K 和 L 是單純複合形，而且 f 是把多面體 $\tilde{K}$ 變到 $\tilde{L}$ 的連續映射，那麼，總能找到這樣的一個數 $\varepsilon>0$，使得對於複合形 K 的每一個具有細密程度 $<\varepsilon$ 的重分 K^*，存在一個把複合形 K^* 變到 L 的單純映射 φ，它同倫於映射 f．映射 φ 叫作映射 f 的單純逼近．

證明　設 b 是複合形 L 的一個頂點．用 $L_{\bar{b}}$ 表示 L 中不以 b 為頂點的所有單純形的集合；L_b 是一個複合形，因為 $\tilde{L}_b$ 是 $\tilde{L}$ 中的閉集．$\tilde{L}$ 中的開集 $U_b=\tilde{L}\setminus\tilde{L}_b$ 由點 b 和以 b 為頂點的所有單純形的內點所組成；它叫作頂點 b 的星形(或開星形)．複合形 L 的所有頂點的星形的和集就是整個的多面體 $\tilde{L}$ (因為 $\tilde{L}$ 的每一個點或者是複合形 L 的頂點，或者是 L 的一個單純形的內點)．用反證法容易證明這樣的一個數 δ 存在，使得任意一點 $x\in\tilde{L}$ 的 δ 鄰域(在 $\tilde{L}$ 中)整個地包含在星形 U_b 的一個之中(參看，例如[2])．再者，因為把複合形 $\tilde{K}$ 變到 $\tilde{L}$ 的連續映射 f 是均勻連續的，就存在這樣的 $\varepsilon>0$，使得對於每一個具有直徑 $<\varepsilon$ 的集合 $M\subset\tilde{K}$，像集 $f(M)$ 具有直徑 $<\delta$．

設 K^* 是複合形 K 的重分，它的細密程度 $<\varepsilon$. 對於每一個頂點 $a\in K^*$，命這樣的頂點 $\varphi(a)\in L$ 和它對應，使得點 $f(a)$ 的 δ 隣域包含在星形 $U_{\varphi(a)}$ 之中. 因此，對於 K^* 的以 a 爲頂點的任意一個單純形 T'，它的像 $f(T')$ 也包含在 $U_{\varphi(a)}$ 之中. 如果現在 $T=[a_0,\cdots,a_s]$ 是複合形 K^* 的一個單純形，那麼它的像 $f(T)$ 就包含在星形 $U_{\varphi(a_0)},\cdots,U_{\varphi(a_s)}$ 的每一個之中. 於是，這些星形的交集非空集，因而在 L 中存在以 $\varphi(a_0),\cdots,\varphi(a_s)$ 爲頂點(其中可以有重合的)的單純形. 由此推得，原先只在複合形 K^* 的頂點上定義的映射 φ，能够擴展成把複合形 K^* 變到 L 的一個單純映射 φ.

最後，設 x 是 K^* 上的任意一點，而且 $T=[a_0,\cdots,a_s]$ 是複合形 K^* 的包含 x 的一個單純形，那麼，點 $f(x)$ 包含在星形 $U_{\varphi(a_0)},\cdots,U_{\varphi(a_s)}$ 的每一個之中，這就是說，落在複合形 L 的某一個以 $\varphi(a_0),\cdots,\varphi(a_s)$ 爲頂點的單純形上，點 $\varphi(x)$ 也落在這單純形上(在內部或在邊緣上). 於是，連接點 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的直綫綫段整個地屬於多面體 $\tilde{L}$. 使點 $f(x)$ 隨同參數 t 從 0 到 1 的變動而沿着這綫段移動到點 $\varphi(x)$ 時，我們就得到把 f 變成 φ 的形變；它也就證明了 f 和 φ 的同倫. (換句話說，f_t 定義爲把點 x 變成分綫段 $[f(x),\varphi(x)]$ 成比例 $t:1-t$ 的點的映射).

1.4. 定向 設 $e_1,\cdots,e_n$ 和 $e_1',\cdots,e_n'$ 是 n 維矢量空間 R^n 的兩個基底，而且 $\|a_{ij}\|$ 是從第一個基底變成第二個的變換方陣. 如果行列式 $|a_{ij}|$ 是正的，我們就說基底 $e_1,\cdots,e_n$ 和 $e_1',\cdots,e_n'$ 定向相同，否則就說定向相反. 於是空間 R^n 的所有基底分成兩類：從一個基底變成同一類的一個基底的變換行列式是正的，而從一個基底變成另一類的一個基底的變換行列式是負的. 空間 R^n 叫作有向的，如果指定了這兩類中的一類的基底具有正號 +，而另一類具有負號 −. 所以能給定空間 R^n 兩個定向，叫作相反的定向. 所謂由基底 $e_1,\cdots,e_n$，所給定的空間 R^n 的定向，就瞭解作爲這基

底被指定爲具有正號 + 的這個定向．我們還可以討論空間 R^n 的任意 k 維平面的定向．

設 R^{n-1} 是空間 R^n 中的一個 $n-1$ 維平面；R_1^n 和 R_2^n 是空間 R^n 被 R^{n-1} 所分成的兩個半空間，而且 e 是不落在 R^{n-1} 上的而是指向半空間 R_1^n 那一側的一個矢量．對於平面 R^{n-1} 的基底 $e_1, \cdots, e_{n-1}$,我們指定：它具有的正負號,和有向空間 R^n 中的基底 $e, e_1, \cdots, e_{n-1}$ 所具有的正負號相同．平面 R^{n-1} 得到一個定向．我們說，R^{n-1} 的這個定向是由有向空間 R^n 的半空間 R_1^n 所**誘導**的[1]．設平面 R^{n-1} 預先任意地有了定向．用記號 $[R_1^n : R^{n-1}]$ 表示一個數,等於 $+1$．如果 R^{n-1} 的定向和由半空間 R_1^n 所誘導的相同,而等於 -1，如果這兩個定向相反；這記號叫作有向平面 R^{n-1} 和有向半空間 R_1^n 的**關聯係數**．不難看出，

$$[R_1^n : R^{n-1}] = -[R_2^n : R^{n-1}], \tag{1.1}$$

這就是說,由有向空間 R^n 的半空間 R_1^n 和 R_2^n 在 R^{n-1} 中所誘導出的定向相反．實際上，矢量 $-e$ 指向半空間 R_2^n 的一側，因而在考慮由半空間 R_2^n 在 R^{n-1} 中所誘導的定向時,我們指定給基底 $e_1, \cdots, e_{n-1}$ 的正負號，應該就是有向空間 R^n 中的基底 $-e, e_1, \cdots, e_{n-1}$ 的正負號．顯然，R^n 中的基底 $e, e_1, \cdots, e_{n-1}$ 和 $-e, e_1, \cdots, e_{n-1}$ 屬於不同的兩類．

單純形 $T^r\,(r>0)$ 叫作**有向的**,如果它的承載平面是有向的．對於零維單純形,不定義定向．如果 T^r 和 T^{r-1} 是複合形 K 的有向單純形,我們來定義關聯係數 $[T^r : T^{r-1}]$ 如下：如果 T^{r-1} 不是單純形 T^r 的面,命 $[T^r : T^{r-1}] = 0$；如果 T^{r-1} 是單純形 T^r 的面,那麼命 $[T^r : T^{r-1}] = [R_1^r : R^{r-1}]$,這裏的 R^r 和 R^{r-1} 分別是單純形 T^r 和 T^{r-1} 的有向的承載平面,而 R_1^r 是 T^r 所在的那個半空間．對於一維單純形 $T^1 = [a_0, a_1]$，當它的定向由矢量 $a_0 - a_1$ 給定的

[1] 不難證明，如此定義的誘導定向，不依賴於基底 $e_1, \cdots, e_{n-1}$ 和矢量 e 的選擇．