线性代数

复旦大学数学系 編著

上海科学技术出版社

綫性代数

（試用本）

复旦大学数学系　編著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书系复旦大学数学系計算数学专业教材之一，內容介紹了綫性代数基本理論和常用的計算方法。全书共分九章，內容包括行列式，綫性方程組理論，矩陣，綫性空間，綫性变换，酉空間，二次型，綫性方程組的数值解法和矩陣的特征值及特征向量的数值計算等。本书可作綜合大学計算数学专业綫性代数課程的教材，亦可作高等院校有关专业的参考书。

綫 性 代 数

（試 用 本）

复旦大学数学系 編著

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印張7 24/32 字数184,000

1960年8月第1版 1960年8月第1次印刷

印数1—10,000

統一书号：13119·380

定 价：(十) 0.90元

編輯說明

我們受到全国持續躍进的大好形势的鼓舞和推动，积极响应了党的号召，在两年来教育大革命已經取得偉大成績的基础上，掀起了一个声势浩大的教学改革的群众运动。通过这个运动，我們揭露了現在教学体系、教学內容和教学方法上陈旧落后的状况，抓住訂方案、編大綱、写教材、搞試驗等重要环节，試图建立一套以馬克思列宁主义、毛澤东思想为指导的，反映現代科学发展水平的，理論联系实际的新的教学体系和內容，以及与之相适应的教学方法，使培养人才的工作更好地貫徹党的社会主义建設总路綫的精神。

作为这种新的探索和尝試，我們在教学改革运动中，师生結合編写了一套数学专业試用的基础課程教材。在这个基础上，我們又編写了計算数学专业試用的基础課程教材，这套教材包括計算方法、程序設計、綫性代数、程序实习四种。我們在編写这套教材的过程中力求遵循以下几个原則：

一、根据我国社会主义建設和現代科学发展的需要选取材料。例如在計算方法中选取了最近随着力学等方面发展而产生的一些新的非綫性方程計算方法；程序設計中选取了标准程序及自动程序等內容。

二、在材料的选取和闡述上注意到"实踐——理論——实踐"的原則。例如在計算方法及程序設計中，新概念的引进一方面注意到它的实踐来源，同时又尽可能指出所得結果的实踐意义。在材料的选取上还注意到学科間的相互联系。例如在計算方法課程

中注意到与数学分析、高等代数、程序实习等課程的相互配合；又如在程序实习課程中注意到与程序設計、数学物理方程、計算方法等課程內容的衔接。

三、根据各課程特点，在編写时也注意到教学方法，使更有利于同学掌握与运用。例如在程序实习中，强調同学自己动手編制程序，并进行群众性的課堂討論和总結提高的教学方式。

由于我系計算数学专业成立于1958年，絕大部分同志缺乏教学和实际工作的經驗，因此这套教材一定有很多不足之处，我們懇切地希望讀者提出批評与指正。

上海科学技术出版社和商务印书館上海印刷厂对这套教材的迅速出版，給了极大的支持，我們在这里表示衷心的感謝。

复旦大学数学系

1960年5月

序

本书是在教学改革的洪流中集体編写的，系計算数学专业一年級代数課的教材。

我們根据計算数学专业学生在学习基础課、专业課及解决生产实际問題时所需要的代数知識，将原来高等代数、綫性代数及計算方法的某些內容并为一課。这样，一方面避免重复，縮短了講授时数，另一方面又密切了它們之間的联系，易于全面掌握，并使学生在一年級就能学到某些計算方法，更有利于联系生产，解决实际問題。

我們对教材內容，广泛地采取了概括处理的办法，每一章都环繞一个中心进行叙述，并在开始时指出了这一章的作用和意义，同时也注意到理論联系实际以及使学生容易接受等方面。

限于我們的实踐經驗和理論水平，书中一定有不少缺点，迫切希望各方面多提意見，加以指正。

复旦大学数学系綫性代数編写小組

1960年5月

目　录

第一章 行 列 式

行列式是数学中的一种重要工具，本章就行列式的一般理論进行討論。

§1 二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

設有两个未知数和两个方程的綫性方程組

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{aligned} \tag{1-1}$$

由消去法得方程組的解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

将(1-1)的系数列成表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1-3}$$

表中从左上角到右下角的对角綫称第一对角綫(或主对角綫)，从右上角到左下角的对角綫称第二对角綫(或副对角綫)，而(1-2)中分母正好是(1-3)中第一对角綫上两个数的乘积减去第二对角綫上两个数的乘积。

将代数式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 記作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1-4}$$

称为二阶行列式，横的叫行，縱的叫列，二阶行列式有两行两列。

a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} 称为行列式的元素。称 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为二阶行列式(1-4)的展开式。

利用这样的記号，方程組(1-1)的解(1-2)可写为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1-5}$$

于是有下述的求(1-1)解的法則：

如果(1-1)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0,$$

則解 $x_i(i=1, 2)$ 的分母就是 D，而它的分子是用(1-1)的常数項代替 D 中第 i 列上各数所得的行列式。

[例] 解方程組

$$2x_1+x_2=7,$$
$$x_1-3x_2=-2.$$

解：因系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-1\cdot 1=-7\neq 0,$$

按(1-5)得

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-19}{-7}=\frac{19}{7},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-11}{-7}=\frac{11}{7}.$$

二、三阶行列式

設有三个未知数和三个方程的綫性方程組

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3. \end{aligned} \tag{1-6}$$

如果以

$$A_{11}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32},\quad A_{21}=a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33},$$
$$A_{31}=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$$

順次乘(1-6)中各方程的两端，并把結果相加，則在和內 x_2 与 x_3 的系数都等于零，得出

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\\ &\quad -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3\\ &\quad +a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{1-7}$$

将(1-7)左端 x_1 的系数

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\\ &\quad -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned} \tag{1-8}$$

記为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-9}$$

称为三阶行列式，a_{11}，a_{12}，$\cdots$，a_{32}，a_{33} 称为这行列式的元素，(1-8)称为三阶行列式(1-9)的展开式。

由(1-9)得出展开式(1-8)的法則如下：

在下图中将每条实綫上的三个元素的乘积前面放正号相加，即得 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}$，将每条虛綫上的三个元素的乘积前面放負号相加，即得 $-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$。

这种二阶，三阶行列式展开的法則称为对角綫法則。

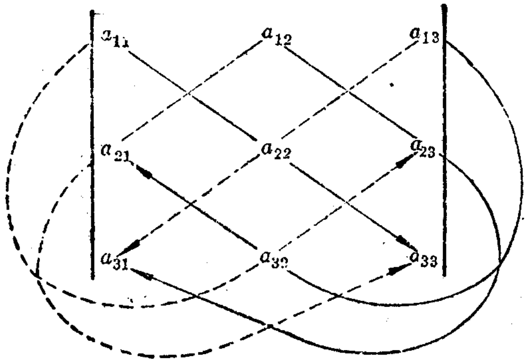

图 1-1

将(1-7)的右端与左端 x_1 的系数比較，可发現右端与 x_1 的系数的差别仅是(1-6)的常数项 b_1，b_2，b_3 分别代替了 x_1 系数中的 a_{11}，a_{21}，a_{31}，因此右端可用(1-6)的常数項代替(1-9)中的第一列而得到，这样(1-7)的右端可写成行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

因此(1-7)可記为

$$Dx_1=D_1。$$

同样，如果以 $A_{12}=a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}$，$A_{22}=a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$，$A_{32}=a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}$ 順次乘(1-6)各方程的两端，并把結果相加，得

$$Dx_2=D_2,$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

最后，如果以 $A_{13}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$，$A_{23}=a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}$，$A_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 同样演算一次，得出

$$Dx_3=D_3,$$

其中

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$$

綜合上面的結果，方程組(1-6)化为

$$Dx_1=D_1,\ Dx_2=D_2,\ Dx_3=D_3.$$

設 $D\neq 0$，那末

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1-10}$$

通过驗証可知(1-10)为(1-6)的解，这样就得(1-6)的求解法則：

如果(1-6)的系数行列式 $D\neq 0$，則解 $x_i(i=1, 2, 3)$ 的分母就是系数行列式 D，分子是用(1-6)的常数項的各元素依次替代 D 的第 i 列上各元素所得的行列式。

[例] 解方程組

$$\begin{aligned}2x_1-\ x_2+\ x_3&=0,\\ 3x_1+2x_2-5x_3&=1,\\ x_1+3x_2-2x_3&=4.\end{aligned}$$

解：因系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -5\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=2\cdot 2(-2)+(-1)(-5)\cdot 1$$

$$+1\cdot 3\cdot 3-1\cdot 2\cdot 1-(-1)\cdot 3(-2)$$

$$-2\cdot 3(-5)=28\neq 0.$$

又以常数項 0, 1, 4 替换 D 的各列得行列式 D_1, D_2, D_3 为

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -5\\ 4 & 3 & -2\end{vmatrix}=13,\qquad D_2=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -5\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}=47,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=21,$$

故得方程組的解:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{13}{28},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{47}{28},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

§2 排　列

要想由二阶及三阶行列式扩充到 n 阶行列式，必須引入新的概念。

設有 n 个元素的集合 S，把它的元素編成先后次序，这样的一个次序关系称为 S 的一个排列，改編元素的次序又得 S 的另一个排列，不同的 n 个元素，可作出 $n!$ 个不同的排列。

在任一排列中，将相邻或不相邻的两个元素对調，其余元素不动，就得出一个新排列，这种作出新排列的手續称为对换。

定理 1　不同的 n 个元素作出的 $n!$ 个排列，可以編成这样一个次序，使由任一个排列开始，接連下去的每一个排列都是前面一个排列經过对换而得出。

証　对于元素的个数用数学归納法，当 $n=2$ 时，定理显然成立。假設在 $n-1$ 个元素时，定理成立，証明对 n 个元素时定理也成立。設不同的 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 作出的 $n!$ 个排列中，从排列 $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}$ 开始，因 $n!$ 个排列里 a_{i_1} 居第一位的有 $(n-1)!$ 个排列，根据归納法假設这些排列可編成滿足定理要求的次序。这样編好后，将末了那个排列經过 a_{i_1} 与 a_{i_2} 的对换得出以 a_{i_2} 居首位的一个新排列，再把 a_{i_2} 居首位的所有 $(n-1)!$ 个排列編成滿足定理要求的次序，等編好后，又将末了那个排列經过 a_{i_2} 与 a_{i_3} 的对换，得出以 a_{i_3} 居首位的一个新排列。仿此进行下去，直到 a_{i_n} 居首位

的所有 $(n-1)!$ 个排列也編成滿足定理要求的次序为止，这样就証明了我們的定理。

这样編成的次序不是唯一的，例如：由 1, 2, 3, 4 四个元素作出的 24 个排列中由 3124 开始，接連下去可以是 3142（經过 4 与 2 的对换），也可以是 3214（經 2 与 1 对换）等。

設在一个集合的 n 个元素中規定各元素的一个标准次序，n 个元素的任何一个排列中，每两个元素的先后次序与規定的标准次序不一致时，就說有一个逆序。一个排列中，如果逆序的总数为偶数，这排列称为偶排列；反之，如果逆序总数为奇数，这排列称为奇排列。例如，取自然数的順序作标准次序，則排列 4321 中，因为 4 在 1,2,3 前故有三个逆序，3 在 1,2 前故有两个逆序，2 在 1 前故有一个逆序，逆序总数为 $3+2+1=6$，故 4321 是偶排列。

定理 2 每个对换改变排列的奇偶性。

証 首先就对换相邻两个元素的情形来証。設 n 个元素 $a_1, \cdots, a_n$ 的一个排列为

$$a_i\cdots a_j a_k a_h a_l\cdots a_m, \tag{1-11}$$

經过 a_k 和 a_h 对换后变为

$$a_i\cdots a_j a_h a_k a_l\cdots a_m, \tag{1-12}$$

在这个排列中 $a_i\cdots a_j$ 与 $a_l\cdots a_m$ 各段的逆序数都沒有改变，并且它們对于 a_k, a_h 的逆序数也沒有改变，所以如果 a_k, a_h 原来沒有逆序，則經过对换就增加了一个逆序，如果 $a_k a_h$ 原来有逆序，則經过对换就減少了一个逆序。因此，排列(1-12)的逆序总数比排列(1-11)的逆序总数相差 1 个，故排列(1-12)的奇偶性与排列(1-11)的奇偶性相反。

其次，設对换的两个元素中間隔着 S 个元素，令排列为 $a_f\cdots a_g a_h a_i\cdots a_j a_k a_l\cdots a_m$，經过 a_k 和 a_h 对换后变为 $a_f\cdots a_g a_k a_i\cdots a_j a_h a_l\cdots a_m$。新排列可这样得出：由第一排列起将 a_h 依次与后面 S 个元素

$a_i, \cdots, a_j$ 对换，接着与 a_k 对换，得到排列 $a_f \cdots a_g a_i \cdots a_j a_k a_h a_l \cdots a_m$。然后将此排列中 a_k 依次与前面 S 个元素 $a_j, \cdots, a_i$ 对换就得到新排列，这样共經过了 $2S+1$ 次相邻两元素的对换，排列奇偶性改变了 $2S+1$ 次，所以新排列的奇偶性与原来排列的奇偶性相反。例如 3142 为奇排列，对换 3 与 4 得 4132 为偶排列。

定理 3 $n \geqslant 2$ 时，$n!$ 个排列中，奇偶排列各占一半，即各有 $\frac{1}{2}n!$ 个。

証 由定理 1 知 $n!$ 个排列可由某一个排列开始，經过对换把全部排列写出，由定理 2 知，这样編制，奇偶排列是相間出現的。当 $n \geqslant 2$ 时 $n!$ 是个偶数，故从奇（偶）排列开始，必以偶（奇）排列結束，因此奇偶排列各占一半。

§3 高阶行列式

我們不可能用前面引入二阶与三阶行列式的方法引入 n 阶行列式，因为当 n 很大时，計算变为非常麻煩，而且对于任意的 n，具体的来做也不可能。因此采取另一种方法，由已經知道的二阶、三阶行列式的展开式找出它們通过元素表出的規律，再用这些規律来定义 n 阶行列式。

回顾一下二阶行列式(1-4)与三阶行列式(1-9)，我們看出二阶行列式的每一項是两个位于不同行与不同列上的元素的乘积，而且所有这样的乘积都是行列式的項。至于每項前面的符号，可以这样决定：将第一足标，按自然数排列，如果第二足标的排列为偶排列，則此項前面放正号，反之放負号。例如項 $a_{11}a_{22}$ 各元素的第一足标按自然数排列，第二足标的排列为 1, 2，沒有逆序故是偶排列，故此項前面放正号。

設有 n^2 个数，列成表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{1-13}$$

每个数 a_{ij} 称为这表的元素，把表(1-13)里位于不同行与不同列上的 n 个元素作成所有可能的乘积，每一个乘积有下面的形状：

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n},$$

其中足标 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是由数 $1, 2, \cdots, n$ 作出的一个排列，所以这种乘积共有 $n!$ 个。

n 阶行列式就是这样形状的 $n!$ 个项的代数和；每一项的形状为 $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}$，此处 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的某一个排列，如果 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为偶排列，則此項前面放正号，否則放負号。由§2定理3可知有 $\frac{1}{2}(n!)$ 个項前面放正号，另外 $\frac{1}{2}(n!)$ 个項前面放負号。

同二阶、三阶行列式一样，我們用下面的記号記 n 阶行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-14}$$

为了以后便于推証行列式的性質，这里提出一項預备知識：在 n 阶行列式(1-14)中，取位在不同行、不同列上的 n 个元素作乘积

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1-15}$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 与 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的排列。显然这一乘积(1-15)是 n 阶行列式(1-14)的一項，可以証明此項前面的符号为 $(-1)^{s+t}$，此处 s 表示第一足标的排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的逆序数，t 表示第二足标的排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的逆序数。

事实上，如果(1-15)中任二元素对换位置，那末第一足标的排