高等数学

生化医农类

(修订版)

下 册

张锦炎 周建莹 编著

北京大学出版社

高等学校数学基础课教材

高 等 数 学

（生化医农类）

（修 订 版）

下 册

张锦炎 周建莹 编著

北京大学出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册). 生化医农类/张锦炎,周建莹编著. —2 版(修订版). —北京:北京大学出版社,2002. 8

ISBN 7-301-05463-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①张… ②周… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 084982 号

书　　　名: **高等数学(生化医农类)(修订版)(下册)**
著作责任者: 张锦炎　周建莹　编著
责 任 编 辑: 刘　勇
标 准 书 号: ISBN 7-301-05463-7/O・0533
出　版　者: 北京大学出版社
地　　　址: 北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址: http://cbs.pku.edu.cn
电　　　话: 出版部 62752015　发行部 62754140　编辑部 62752021
电 子 信 箱: zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者: 北京大学印刷厂
发　行　者: 北京大学出版社
经　销　者: 新华书店
850×1168　32 开本　10.375 印张　250 千字
1985 年 12 月第 1 版　　2002 年 8 月修订版
2002 年 8 月第 10 次印刷
印　　　数: 50 001—54 000 册
定　　　价: 13.50 元

北京大学出版社数学重点教材书目

1. 大学生基础课教材

书　　名	编著者	定价(元)
数学分析新讲(第一册)	张筑生	12.50
数学分析新讲(第二册)	张筑生	15.00
数学分析新讲(第三册)	张筑生	17.00
高等数学简明教程(第一册) (教育部2000优秀教学成果二等奖)	李　忠等	13.50
高等数学简明教程(第二册)(获奖同第一册)	李　忠等	15.00
高等数学简明教程(第三册)(获奖同第一册)	李　忠等	14.00
高等数学(物理类)(第一册)	文　丽等	20.00
高等数学(物理类)(第二册)	文　丽等	16.00
高等数学(物理类)(第三册)	文　丽等	14.00
高等数学习题课教材(物理类)上、下册	邵士敏等	25.20
高等数学(生化医农类)上册(第二版)	周建莹等	13.50
高等数学(生化医农类)下册(第二版)	张锦炎等	13.50
高等数学习题课讲义(生化类)	周建莹　李正元	24.50
高等数学解题指南	周建莹　李正元	24.50
大学文科基础数学(第一册)	姚孟臣	16.50
大学文科基础数学(第二册)	姚孟臣	11.00
数学的思想、方法和应用 (教育部“九五”重点教材)	张顺燕	17.50
高等代数简明教程(上下) (教育部“十五”规划教材)	蓝以中	32.00
线性代数引论(第二版)	蓝以中等	16.50
简明线性代数(理工、师范、财经类)	丘维声	16.00
解析几何(第二版)	丘维声	15.00

书　　名	编著者	定价（元）
微分几何初步（95 教育部优秀教材一等奖）	陈维桓	12.00
基础拓扑学	M. A. Armstrong	11.00
基础拓扑学讲义	尤承业	13.50
初等数论（95 教育部优秀教材二等奖）	潘承洞　潘承彪	25.00
简明数论	潘承洞　潘承彪	14.50
模形式导引	潘承彪	18.00
模曲线导引	黎景辉　赵春来	17.00
实变函数论（教育部"九五"重点教材）	周民强	16.00
复变函数教程	方企勤	13.50
简明复分析	龚　昇	10.00
常微分方程几何理论与分支问题（第三版）	张锦炎等	19.50
调和分析讲义（实变方法）	周民强	13.00
傅里叶分析及其应用	潘文杰	13.00
泛函分析讲义（上册）（91 国优教材）	张恭庆等	11.00
泛函分析讲义（下册）（91 国优教材）	张恭庆等	12.00
有限群和紧群的表示论	丘维声	15.50
微分拓扑新讲（教育部 99 科技进步教材二等奖）	张筑生	18.00
数值线性代数	徐树方等	13.00
数学模型讲义（教育部"九五"重点教材）	雷功炎	15.00
概率论引论	汪仁官	11.50
新编概率论与数理统计（工科类）	肖筱南等	19.00
高等统计学	郑忠国	15.00
随机过程论（第二版）	钱敏平等	20.00
应用随机过程	钱敏平等	20.00
随机微分方程引论（第二版）	龚光鲁	25.00
非参数统计讲义	孙山泽	12.50
实用统计方法与 SAS 系统	高惠璇	18.00
统计计算	高惠璇	15.00
数学与文化	邓东皋等	16.50

目　录

第七章　多元函数微分学

一元函数微积分中研究的函数只有一个自变量. 但是，许多问题中需要处理的函数有多个自变量. 因此，需要研究多元函数的微积分.

多元函数微积分是一元函数微积分的推广和发展.

读者在学习这一部分内容时应该联系一元函数微积分中学过的相应的内容，弄清楚它们间的类似之处与不同之处.

本章介绍多元函数的微分学.

§1　多元函数的基本概念

1. 多元函数的定义

下面看几个几何、物理及化学中遇到的依赖于多个自变量的函数.

例 1　矩形的面积 S 等于它的长度 a 乘宽度 b，即 $S=ab$. 根据此公式，如果知道矩形的长度为 a_1，宽度为 b_1，就能够确定它的面积为 $S_1=a_1b_1$.

例 2　一克分子理想气体的体积 v，压力强度 p 和绝对温度 T 之间有下述关系：

$$v=\frac{RT}{p},$$

其中 R 是常数. 根据此公式，如果知道理想气体的绝对温度为 T_1，压力强度为 p_1，就能确定它的体积为 $v_1=\dfrac{RT_1}{p_1}$.

例 3　在合成氨的反应中：

$$3H_2 + N_2 \to 2NH_3.$$

氢与氮之间的化学反应速度 v 可按关系式 $v=kx^3y$ 来确定，其中 x 表示 H_2 的分子浓度，y 表示 N_2 的分子浓度，k 为反应速率常数. 如果知道 H_2 及 N_2 的分子浓度为 x_1 及 y_1，则由上述关系式就能确定反应速度 $v_1=kx_1^3y_1$.

抽去以上各例子的实际内容，它们在研究数量关系方面的共同点是考虑三个变量 x,y 与 z 之间的关系. 我们把 x,y 取作自变量，并且用 Oxy 平面上的一个点 $P(x,y)$ 来表示自变量的一对值 x,y. 所谓变量 z 是 x 与 y 的二元函数是指变量 z 与点 (x,y) 之间有一种对应关系. 确切的定义如下：

定义 1 一个过程中有三个变量 x,y 和 z. 变量 z 随着变量 x,y 的变化而变化. 已知变量 x,y 所表示的点 $P(x,y)$ 的变化域为 Oxy 平面上的某个点集合 D. 如果对 D 中的每一个点 P，依照某一**对应规则**，变量 z 都有惟一的一个值与之对应，我们就说变量 z 是变量 x 和 y 的**二元函数**，记作

$$z=f(x,y), \quad (x,y)\in D.$$

有时简记作

$$z=f(P), \quad P\in D.$$

且称点 $P(x,y)$ 的变化域 D 为函数 $z=f(x,y)$ 的**定义域**.

将上面的三个例子与二元函数的定义相比较，我们可以说，矩形的面积 S 是长 a 与宽 b 的二元函数；理想气体的体积 v 是压强 p 与绝对温度 T 的二元函数；合成氨的反应速度 v 是氢与氮的分子浓度 x 与 y 的二元函数.

需要指出，实际问题中出现的函数的定义域当然由其实际意义来确定. 如例 3 中函数的定义域 D 是 Oxy 平面上的第一象限，因为分子浓度 x 与 y 总是非负数. 由分析式 $z=f(x,y)$ 给出的函数的定义域，如不特别加以说明，我们规定它是 Oxy 平面上使 $f(x,y)$ 有意义的一切点的集合 D. 例如，函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的

定义域是带边的单位圆 $x^2+y^2\leqslant 1$(参见图 7.1);函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域为不带边的单位圆 $x^2+y^2<1$(参见图 7.2);函数 $z=\ln(x+y-1)$的定义域为半平面 $x+y>1$(参见图 7.3);函数 $z=\arcsin\sqrt{x+y}$的定义域为一条带形区域 $0\leqslant x+y\leqslant 1$(参见图 7.4).

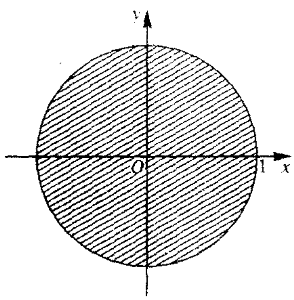

图 7.1

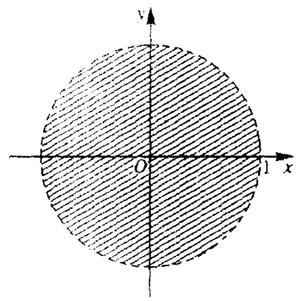

图 7.2

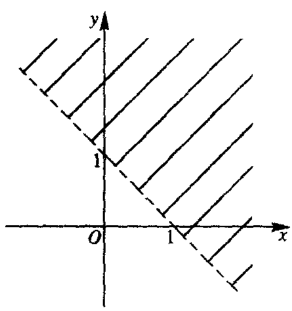

图 7.3

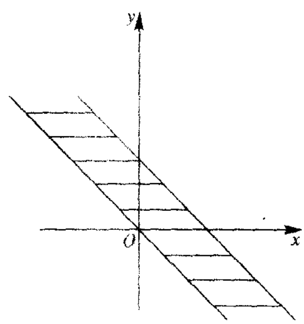

图 7.4

图 7.1 中的圆是包括它的边界单位圆周的;图 7.2 中的圆是不包括它的边界的.我们分别用实线与虚线画边界以示区别,且称不包括边界的圆叫开圆,包括边界的圆叫闭圆.

大家已经知道,一元函数的定义域是实数轴 $\boldsymbol{R}$ 上的点集合,它常是一个或多个区间.而多元函数的定义域是 Oxy 平面上,即 $\boldsymbol{R}^2$ 上的点集合,它常是一个或多个区域,与区间类似,区域也分为开区域,闭区域,等等.下面给出它们的定义.

Oxy 平面上的点 $M_0(x_0, y_0)$的 δ 邻域是指 Oxy 平面上一切与点 M_0 之距离小于 δ 的点的集合，记作 $U_\delta(M_0)$，即

$$U_\delta(M_0) = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}.$$

给定平面上一个点集 E，对于 E 来说，平面上任一个点必为下列三种点之一：

(1) *E 之内点*

若对于点 M_0，存在某个 $\delta > 0$，使 $U_\delta(M_0) \subset E$，即存在以 M_0 为心之充分小的开圆整个属于 E，则称 M_0 为 E 之**内点**.

(2) *E 之外点*

若对于点 M_0，存在某个 $\delta > 0$，使 $U_\delta(M_0) \cap E = \varnothing$，即存在以 M_0 为心之充分小的开圆与 E 不交，则称 M_0 为 E 之**外点**.

(3) *E 之边界点*

若对于点 M_0，任意的 $\delta > 0$ 都使 $U_\delta(M_0)$中既有 E 之点，又有非 E 之点，即对任意 $\delta > 0$，$U_\delta(M_0) \cap E \neq \varnothing$ 且 $U_\delta(M_0) \not\subset E$，则称点 M_0 为 E 之**边界点**.

定义 2 若点集 E 中之点，都是 E 之内点，则称 E 为**开集**；若点集 E 包含 E 之一切边界点，则称 E 为**闭集**.

E 之一切边界点组成的集合，称为 E 之**边界**，记作 ∂E.

显然，图 7.2，图 7.3 中之集合为开集；图 7.1，图 7.4 中之集合为闭集. 图 7.1 与图 7.2 中之集合的边界都是单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$.

开集与闭集对于是否包含其边界点而言是两个极端的情况，显然有很多集合既非开集，也非闭集. 请读者自己举例.

定义 3 若集合 E 中任意两点可以由一条完全在 E 中之折线连接起来，则称 E 为**连通集**.

定义 4 称连通的非空开集 D 为**区域**. 区域 D 加上它的边界 ∂D 所成之集合称为**闭区域**.

图 7.2，7.3 中之点集合为 $\boldsymbol{R}^2$ 中之区域，图 7.1，7.4 中之点集合为 $\boldsymbol{R}^2$ 中之闭区域.

若按以上方法定义一维的区域与闭区域.很容易看出,一维的区域就是开区间;需要注意的是,一维的闭区域除去闭区间之外,还有区间$[a,+\infty)$,$(-\infty,b]$与$(-\infty,+\infty)$.

定义 5 若对于集合 E,存在某个正数 ρ,使得 E 中一切点都在以原点为心以 ρ 为半径的圆之内,则称 E 为**有界集合**,否则称 E 为**无界集合**.

图 7.1,7.2 中之集合为有界集合;图 7.3,7.4 中之集合为无界集合.

综上所述,数轴(即 $\boldsymbol{R}^1$)上之开区间与闭区间在平面上(即 $\boldsymbol{R}^2$ 上)的推广,分别是 $\boldsymbol{R}^2$ 上的区域与有界闭区域.

实际问题中可能遇到多于两个自变量的函数.请读者类似地给出 n 个$(n>2)$自变量的函数的定义.下面的例 4 与例 5 分别是三元函数与四元函数的例子.

例 4 电流所作的功 W 是电路上的电阻 R,电流强度 I 及电流流过的时间 t 的函数.其函数关系由公式 $W=I^2Rt$ 确定.

例 5 平面上两点 $A(x_1,y_1)$和 $B(x_2,y_2)$之间的距离 d 是坐标 x_1,y_1,x_2,y_2 的函数:

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

二元函数与自变量多于两个的函数统称为**多元函数**.多元函数的自变量的数目可以不同,但是它们有许多共同的性质.为了简单起见,今后我们主要对二元函数进行讨论,而这些讨论也适用于一般多元函数.

2. 二元函数的几何表示:曲面与等高线

利用空间直角坐标系,可以给出二元函数的几何表示.在 Oxy 平面上的区域 D 内任取一点 $P(x,y)$,根据函数关系 $z=f(x,y)$,求出对应的函数值 z.于是在三维空间中就可以确定出一个点 $M(x,y,z=f(x,y))$与 D 中的点 $P(x,y)$对应.当点 $P(x,y)$在 D 中变动时,我们得出点 $M(x,y,z=f(x,y))$的轨迹.一般说来它是

一张曲面(图 7.5). 因此二元函数可以用空间中的一张曲面表示. 例如二元函数 $z=1-x-y$ 的图像是一张平面(图 7.6); 二元函数 $z=x^2+y^2$ 的图像为一个圆抛物面(图 7.7).

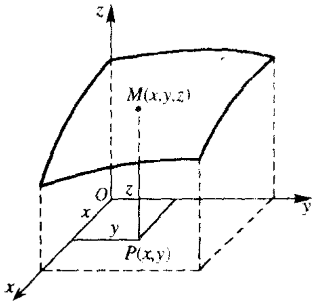

图 7.5

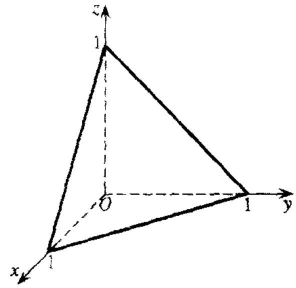

图 7.6

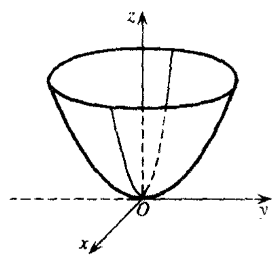

图 7.7

对于二元函数,除了可以用空间的曲面表示它之外,还可以通过函数的**等高线**(也称等值线,等位线等)来了解函数的性质,这种方法在实际问题中常被采用. 例如在地形学中用"水平等高线"表示地势高低的变化;在气象学中常常用等温线和等压线表示气温和气压的变化. 下面我们给出二元函数的等高线的定义.

定义 6 使二元函数 $z=f(x,y)$ 取相同数值的点组成的曲线 L,称为函数 $z=f(x,y)$ 的**等高线**.

等高线的方程可以写成 $f(x,y)=C$(C 为常数). 当 C 取一切可能值时,我们就得到一族等高线,它们构成等高线族. 显然函数的等高线族充满函数的定义域.

例 6 函数 $z=x^2+y^2$ 的等高线族为 Oxy 平面上以原点为中

心的一族同心圆 $x^2+y^2=C$ 及点(0,0)(图 7.8).

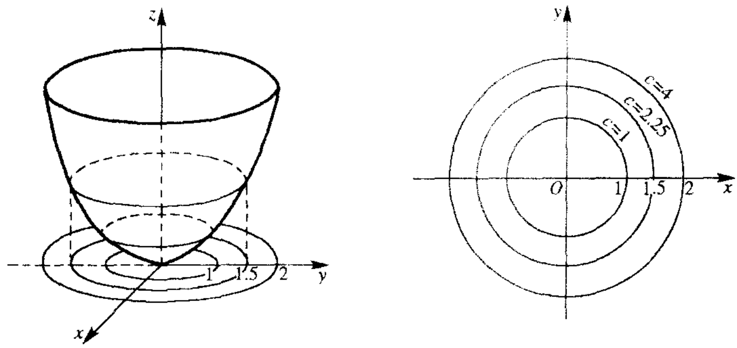

图 7.8

例 7 函数 $z=x^2-y^2$ 的等高线族为一族等轴双曲线 $x^2-y^2=C$ 及坐标轴的两条平分角线 $y=\pm x$(图 7.9).

例 8 由 $pv=RT$ 得知,理想气体的等温曲线族为双曲线族 $pv=C(C>0)$ 在第一象限中的分支(图 7.10).

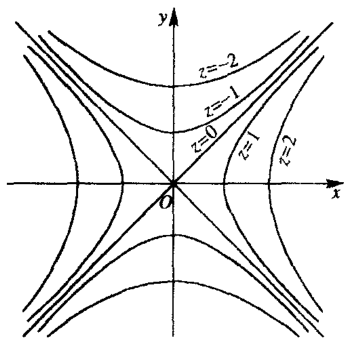

图 7.9

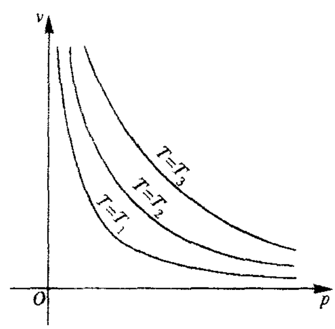

图 7.10

请读者自己画出理想气体的等压曲线族.

3. 二元函数的极限和连续性

完全类似于一元函数的极限的定义,我们给出二元函数极限

的定义.

定义 7 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内(可以除去点 (x_0,y_0) 以及通过点 (x_0,y_0) 的几条曲线)有定义,A 为某一常数. 如果对于任意给定的小正数 ε,都存在充分小的正数 δ,使得当点 $P(x,y)$ 满足 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,就有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

则称当点 $P(x,y)$ 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ **以 A 为极限**,记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

下面应用二元函数极限的定义给出二元函数连续的定义.

定义 8 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处极限存在且为 $f(x_0,y_0)$,即有 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$,则称函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**.

如果函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点处都连续,则称函数 $f(x,y)$ 在 **D 内连续**.

需要指出,当函数的定义域包含着边界点时,在边界点上考虑函数的极限或连续性时,当然只需检验那些在邻域内且在定义域内的点.

我们称函数 $f(x,y)$ 为二元初等函数,如果 $f(x,y)$ 是由自变量 x 的基本初等函数、自变量 y 的基本初等函数和常数经过有限次四则运算及复合于一元基本初等函数所得. 根据二元初等函数的定义不难得到下述定理.

定理 1 二元初等函数在其定义域内是连续的.

我们知道在闭区间上连续的一元函数有一些重要的性质. 现在指出,在有界闭区域上连续的二元函数也有类似的性质.

定理 2 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$ 在 D 上有界,即存在常数 $M>0$,使对任意 $(x,y)\in D$,有

$$|f(x,y)|\leqslant M.$$