数学·计算机

面向21世纪本科生教材

离散数学

（修订版）

刘玉珍 刘咏梅 编著

武汉大学出版社
全国优秀出版社

数学·计算机

面向21世纪本科生教材

离散数学

（修订版）

刘玉珍 刘咏梅 编著

武汉大学出版社
全国优秀出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/刘玉珍，刘咏梅编著. —2 版(修订版). —武汉：武汉大学出版社，2002.8

面向 21 世纪本科生教材

ISBN 7-307-03691-6

Ⅰ.离…　Ⅱ.①刘…　②刘…　Ⅲ.离散数学—高等学校—教材　Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 057826 号

责任编辑：顾素萍　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)

印刷：湖北省通山县印刷厂

开本：787×980　1/16　　印张：17.25　　字数：338 千字

版次：1997 年 3 月第 1 版　　2002 年 8 月第 1 次修订

2002 年 12 月修订版第 2 次印刷

ISBN 7-307-03691-6/O·269　　定价：24.50 元

前言

离散数学是现代数学的重要分支，是计算机科学的理论基础。离散数学充分体现了计算机科学离散性的特点，主要研究各种离散量的结构及其相互间的关系。离散数学作为一门学科，形成于20世纪70年代初期。计算机科学的发展和计算机应用领域的日益广泛，迫切需要一些适当的数学工具来解决计算机各领域中提出的理论问题，离散数学正是适应这种需要而建立和发展起来的一门科学。它综合了计算机科学中所用到的各数学分支，并进行系统的、全面的论述，从而为计算机科学提供了有力的理论基础和工具。离散数学的内容十分丰富，涉及诸如数理逻辑、集合论、抽象代数、图论、数论、能行可计算性理论、形式语言与自动机理论、组合学和离散概率等等。

离散数学课程是计算机科学与工程各专业的重要的理论基础课程。一方面，它为学生学习各专业课程，如数据结构、算法设计与分析、逻辑设计、系统结构、编译原理、操作系统、数据库系统、人工智能和定理证明等作了必要的数学准备；另一方面，它不但培养学生的逻辑推理能力、抽象思维能力和形式化思维能力，而且培养学生严谨规范的科学态度，从而提高学生的理论素养以及独立学习与研究的能力。

本书力求叙述严谨，推演严密，逻辑清晰，深入浅出，做到概念与实例密切结合。学生通过本课程的学习将得到严格的逻辑推理与抽象思维能力的训练。

本书是编者多年在武汉大学计算机科学系讲授离散数学课的基础上参考国内外同类型教材编写而成的。全书包括数理逻辑、集合论、代数结构和图论四大部分。本书作为教材，主要适用于计算机科学与工程各专业的本科生，同时也适用于其他专业或其他层次的学生。

在本书的编写过程中得到李琼章教授的精心指导，在此谨表衷心感谢。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2002年8月20日

目录

第一编　数理逻辑

第二编　集　合　论

第三编 代 数 结 构

第四编　图　　论

第一编 数理逻辑

数理逻辑又称符号逻辑，它是用数学方法即引进一套符号体系的方法，来研究形式推理的一门科学．古典数理逻辑主要包括命题演算和谓词演算，现代数理逻辑有四大分支：证明论、模型论、递归论和公理集合论．

数理逻辑的研究起源于 17 世纪．它的创始人是德国数学家、哲学家莱布尼兹（G. Leibniz，1646～1716），他首先提出了建立一种普遍的符号语言，利用它来进行思维的演算，从而用计算的方法来解决论辩的设想．1847 年英国数学家布尔（G. Bool）发表了《逻辑的数学分析》一书，创造了一套表示逻辑推理中的基本概念，如"并且"、"或者"、"非"等的符号，并建立了这些符号的运算规则，得到了著名的布尔代数，其功能相当于命题演算．1879 年德国数学家弗雷格（G. Frege）在《概念的演算》一书中引进了谓词符号和量词符号，建立了第一个比较严格的、相当于谓词演算的逻辑演算系统．1910 年英国逻辑学家怀特海（A. N. Witehead）和罗素（B. Russel）集当时数理逻辑之大成于《数学原理》一书中，从而使数理逻辑成为一门专门的学科．

20 世纪 30 年代前后，由于斯科伦（T. Skolem）、塔斯基（A. Tarski）、哥德尔（K. Gödel）、亨金（L. Henkin）、根芩（G. Gentzen）等许多人的不断努力，数理逻辑已发展成一门内容十分丰富的学科，包括证明论、模型论、递归论和公理集合论四大分支，还衍生出直觉主义逻辑、多值逻辑、组合逻辑、模态逻辑、概率逻辑、模糊逻辑、非标准分析等许多分支，这些分支对数学、计算机科学、人工智能、语言学、控制论、自动化、心理学、量子力学等产生了深远的影响．

数理逻辑是计算机科学的重要的理论基础之一，在计算机科学中得到了广泛应用．英国数学家图灵（A. Turing）于 1936 年所提出的图灵机是现代计算机的数学模型．λ 演算和一阶逻辑演算分别是 LISP 语言和 PROLOG 语言的理论基础．20 世纪 70 年代建立并发展的计算逻辑、时态逻辑、动态逻辑、程序逻辑等则直接源于并广泛应用于程序性质的描述和程序正确性的证明．

本编介绍命题逻辑和谓词逻辑，它们是数理逻辑的最基本组成部分，是数理逻辑其他分支的共同基础．

第一章 命题逻辑

数理逻辑研究的中心问题是推理，而推理的基本要素是命题，本章讨论命题的符号化、命题合式公式及其分类、命题合式公式的范式及命题逻辑的推理理论.

1.1 命题符号化

在推理过程中，每一步都离不开判断，判断的语言描述就是命题. 非形式地讲，**命题**是具有惟一真、假值的陈述句. 若命题为真，则说它是真命题，或说它的真值为真，用 1 表示；若命题为假，则说它是假命题，或说它的真值为假，用 0 表示. 通常用大写字母表示命题.

[**例 1.1.1**] 下面的句子是否为命题?

(1) 中国的首都在北京.

(2) $3+1$ 比 5 大.

(3) 地球外的星球上也有人.

(4) 明天是晴天.

(5) 请关门.

(6) $x+1$ 不超过 5.

(7) 你好吗?

(8) 我正在说谎.

不难看出，(1)～(4)是命题，它们都有惟一的真值. (1)是真命题，(2)是假命题，尽管(3)和(4)的真值尚不知道，但它们的真值是存在的，并且是惟一确定的. (5)不是陈述句，故不是命题. (6)虽是陈述句，但它的真值是不确定的，随着 x 的变化，它的真值也会变化，故也不是命题. (7)是问句，不是陈述句，所以不是命题. (8)的情况有些复杂，它是一个陈述句，但是若(8)为真，即"我正在说谎"为真，则我正在说的内容即句子(8)为假；同样，若(8)为假，则可以推出(8)为真. 所以(8)是"既真又假"的矛盾句，在逻辑学中称为悖. 本书中将不研究悖及其相关内容.

若一个命题是一个简单陈述句,则称之为**简单命题**;由简单命题通过"非"、

"或"、"与"、"蕴含"以及"等值"这些命题联结词而组成的命题称为**复合命题**.例如:

(9) 非 3+1 比 5 大.

(10) 3+1 比 5 大蕴含明天是晴天.

通常我们使用下列 5 种命题联结词:

(a) **否定词**$\neg$ 其定义为:$\neg P$ 的真值为真当且仅当P 的真值为假,称$\neg P$为P 的**否定**,读作"非 P".

(b) **合取词**$\wedge$ 其定义为:$P\wedge Q$ 的真值为真当且仅当P 和Q 的真值都为真,称 $P\wedge Q$ 为P 和Q 的**合取**,读作"P 并且Q".

(c) **析取词**$\vee$ 其定义为:$P\vee Q$ 的真值为假当且仅当P 和Q 的真值都为假,称 $P\vee Q$ 为P 和Q 的**析取**,读作"P 或者Q".

(d) **蕴含词**$\rightarrow$ 其定义为:$P\rightarrow Q$ 的真值为假当且仅当P 的真值为真且Q 的真值为假,称 $P\rightarrow Q$ 为由前件P 和后件Q 组成的**条件命题**,读作"若 P 则 Q".

(e) **等值词**$\leftrightarrow$ 其定义为:$P\leftrightarrow Q$ 的真值为真当且仅当P 和Q 的真值同为真或者同为假,称 $P\leftrightarrow Q$ 为由P 和Q 组成的**双条件命题**,读作"P 当且仅当Q".

这 5 种联结词的定义可用表 1.1 和表 1.2 来描述.

表 1.1

P	$\neg P$
0	1
1	0

表 1.2

P	Q	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$P\rightarrow Q$	$P\leftrightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

从命题的定义可知,我们必须先定义陈述句,而这必然要涉及一种具体的语言(如汉语或英语).数理逻辑的研究是要建立一种通用的"代数",同时回避具体的语言,而走"符号化"的道路,即将命题的具体内容抽除净尽,使之只剩下一些语法符号.例如:我们若用 P_1,P_2,P_3,P_4 分别表示例 1.1.1 中的句子(1)~(4),那么句子(9)可表示为$\neg P_2$,句子(10)可表示为 $P_2\rightarrow P_4$.

日常语言中的"既……又……"、"不但……而且……"、"虽然……但是……"可符号化为"$\wedge$";"P 是Q 的充分条件"、"Q 是P 的必要条件"、"P 除非Q"、"P 仅当 Q"、"只有 Q 才P"可符号化为 $P\rightarrow Q$;"P 当且仅当Q"、"P 是Q 的充分必要条件"可符号化为 $P\leftrightarrow Q$.

[**例 1.1.2**] 试将下列命题符号化:

(1) 如果你不看电影，那么我也不看电影.

(2) 小王一边吃饭，一边看书.

解 (1) 设 P: 你看电影，Q: 我看电影，则该命题可符号化为$\neg P \to \neg Q$.

(2) 设 P: 小王吃饭，Q: 小王看书，则该命题可符号化为 $P \wedge Q$.

通常，若 P 可以表示真命题，又可以表示假命题，则称 P 为**命题变元**. T 永远表示真命题，F 永远表示假命题，称 T 和 F 为**命题常元**.

在研究推理时，若把命题分析到简单命题为止，则这种建立在以简单命题为基本推理单位基础上的逻辑体系，称作命题逻辑或命题演算.

习题 1.1

1. 判断下列语句是否是命题,并指出命题的真值:

(1) $3x-8=0$.

(2) 这花多美呀!

(3) $3+5=18$.

(4) 下午有会吗?

(5) 雪是白色的.

2. 将下列命题符号化:

(1) 如果天不下雨，那么我去教室.

(2) 如果你去教室，那么我去图书馆.

(3) 我去图书馆的必要条件是你去教室.

(4) 2 是质数，也是偶数.

3. 分析下列各命题的真值:

(1) $2+2=6$ 当且仅当 2 是质数.

(2) 两角相等当且仅当它们是对顶角.

(3) 如果两角是对顶角，那么它们相等.

4. 设 P: 明天是晴天，Q: 我去教室，R: 我去图书馆. 试用日常语言复述下列各命题:

(1) $P \to Q \vee R$; (2) $Q \to \neg P \wedge \neg R$; (3) $P \wedge \neg Q \leftrightarrow R$.

1.2 合式公式

在上一节，我们讨论了命题、命题联结词及命题符号化. 本节我们将讨论合式公式，它是命题逻辑中十分重要的概念之一.

1.2.1 命题语言的字母表

在构造逻辑演算时，我们首先要规定所采用的符号. 在命题逻辑中有下述 4 类符号:

表 1.3

命题常元	T，F
命题变元	$P_1,P_2,\cdots,P_n$
联 结 词	$\neg\ \ \wedge\ \ \vee\ \rightarrow\ \leftrightarrow$
辅助符号	( )

在上述字母表中，除命题变元可以根据表示知识的需要，选择或多或少的命题变元符号之外，其他的符号都是固定的，所以这个字母表可以记为 $\Sigma(P_1, P_2,\cdots,P_n)$. 如不引起混淆，也可简记为 Σ.

字母表 $\Sigma(P_1,P_2,\cdots,P_n)$上的符号串是由 $\Sigma(P_1,P_2,\cdots,P_n)$的任意有限个字母组成的序列. 例如：$(\neg\rightarrow(\mathrm{T}\vee)P_3$ 就是 $\Sigma(P_3)$上的一个符号串，当然也是 $\Sigma(P_1,P_2,P_3)$上的一个符号串. 空串是一个字母也没有的符号串，记为 ε.

我们用 $\Sigma^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$表示字母表 $\Sigma(P_1,P_2,\cdots,P_n)$上的所有符号串组成的集合，其中包含空串 ε；用 Σ^+表示 Σ 上所有非空符号串的集合.

1.2.2 命题逻辑中的合式公式

由符号可以构造符号串，但是，并不是任何符号串对逻辑而言都是有意义的. 研究命题逻辑我们所感兴趣的是 $\Sigma^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$中那些称为“命题合式公式”的一类符号串.

定义 1.2.1 如下定义的符号串称为命题逻辑的合式公式(简称公式)：

(1) 命题常元或命题变元是合式公式；

(2) 若 A,B 是合式公式，则$(\neg A),(A\wedge B),(A\vee B),(A\rightarrow B)$和$(A\leftrightarrow B)$是合式公式；

(3) 只有通过有限次使用(1)、(2)所得到的符号串才是合式公式.

[例 1.2.1] $((P\wedge Q)\leftrightarrow(R\rightarrow(\neg Q)))$是合式公式，但是，$(P_1\rightarrow P_2)\rightarrow P_1)$不是合式公式，这是因为若$(P_1\rightarrow P_2)\rightarrow P_1)$是合式公式，则 $P_1\rightarrow P_2)$必是合式公式，而 $P_1\rightarrow P_2)$显然不可能是合式公式，因合式公式中括号是成对出现的.

从上述讨论可以看出，在合式公式的定义中，有关括号的规定过于严格. 每使用一次定义 1.2.1 (2)就增加一对括号，从而导致合式公式中的括号过多，给阅读和书写带来很大的不便. 下面给出有关括号省略的一些约定，以减少合式公式中所用的括号数量，同时又不致引起二义性.

① 公式的最外层括号可以省略.

② 规定联结词的优先级为按$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$的顺序递减，若省略括号后按此优先顺序得到的公式与原公式一致，则允许省略.

③ 相同的联结词按从左至右的顺序计算时括号可以省略.

[例 1.2.2]　(1) 公式$((P\to Q)\wedge R)$可以简写为$(P\to Q)\wedge R$（据①），但不能写成$P\to Q\wedge R$，因后者指$P\to(Q\wedge R)$.

(2) 公式$(P\to(Q\wedge R))$可以简写为$P\to(Q\wedge R)$（据①），进而可简写成$P\to Q\wedge R$（据②）.

下面我们来介绍命题逻辑中的两个重要概念：代入和替换. 为此，我们首先引入子公式的概念.

我们看到一个公式往往是由若干别的较小的公式经过联结词和附加括号的合理组合而形成的，我们把那些较小的公式称为子公式，即

定义 1.2.2　设A是合式公式C的一部分且A本身是合式公式，则称A是C的**子公式**. 不同于自身的子公式称为**真子公式**.

[例 1.2.3]　设公式F为$(P\to Q\wedge R)\vee\neg(P\wedge R)$. 我们立即可以看出它有两个真子公式$(P\to Q\wedge R)$和$\neg(P\wedge R)$；公式$(P\to Q\wedge R)$又有两个真子公式$P$和$Q\wedge R$；公式$Q\wedge R$也有两个真子公式$Q$和$R$；对公式$\neg(P\wedge R)$，有一个真子公式$(P\wedge R)$，而$(P\wedge R)$有两个真子公式$P$和$R$. 这样，我们说合式公式$F$的子公式有

$$(P\to Q\wedge R),\neg(P\wedge R),P,Q\wedge R,Q,R,(P\wedge R),P,R.$$

这些子公式都是F的真子公式，F还有一个子公式即F自身，但它不是F的真子公式.

请注意上例中的一个事实，公式P作为F的子公式，在F中出现了两次，我们仍把它看做是不同的子公式，分别称为它的第一次(处)出现和第二次(处)出现. 由此可见，子公式的概念应包含它在原公式中出现的位置.

[例 1.2.4]　设G为$(P\to Q)\vee(R\to(P\to Q))$，其中$(P\to Q)$是$G$的子公式，如果说的是前者，则应指出是第一次出现的$(P\to Q)$；如果说的是后者，则应指出是第二次出现的$(P\to Q)$.

定义 1.2.3　设含有n个命题变元$P_1,P_2,\cdots,P_n$的合式公式为$A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，$P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_r}$是其中$r$个不同的命题变元$(1\leqslant i_j\leqslant n)$，用合式公式$B_1,B_2,\cdots,B_r$同时分别取代$A$中$P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_r}$的每一处出现所得到的合式公式称为$A$的一个**代入实例**.

[例 1.2.5]　设$A(P,Q)$为$(P\wedge Q)\leftrightarrow(P\vee Q)$，$B$为$(P\to Q)$，则用$B$取代$A$中$P$所得的代入实例为$((P\to Q)\wedge Q)\leftrightarrow((P\to Q)\vee Q)$.

[例 1.2.6]　设$A(P,Q)$为$(P\to Q)\to(\neg Q\to\neg P)$，用$(P\to Q)$和$(Q\to P)$分别取代$A$中$P$和$Q$所得的代入实例为

$$((P\to Q)\to(Q\to P))\to(\neg(Q\to P)\to\neg(P\to Q)).$$

在命题逻辑中，**代入**是对命题变元而言的，要求在将被取代的命题变元的所有出现的地方都进行取代，并且是同时进行的取代.

[例 1.2.7]　设公式$A(P,Q)$为$P\wedge Q\to P$.

(1) $(P \to Q) \to P$ 不是 A 的代入实例，因为这里是用 $(P \to Q)$ 取代了子公式 $P \wedge Q$.

(2) $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \to P$ 不是 A 的代入实例，因为这里是用 $(P \to Q)$ 取代了 P 的第一次出现，而不是对 P 的所有出现进行取代.

(3) $(P \to (Q \to P)) \wedge (Q \to P) \to (P \to (Q \to P))$ 和 $(P \to Q) \wedge (Q \to (P \to Q)) \to (P \to Q)$ 都不是用 $P \to Q$ 取代 P、用 $Q \to P$ 取代 Q 所得到的 A 的代入实例，因为对命题变元的取代必须是同时进行的，即该代入实例应为 $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \to (P \to Q)$. 要求对命题变元同时取代可保证得出的代入实例是惟一的. $(P \to (Q \to P)) \wedge (Q \to P) \to (P \to (Q \to P))$ 是在 A 中先用 $P \to Q$ 取代 P，再用 $Q \to P$ 取代 Q 所得的结果；$(P \to Q) \wedge (Q \to (P \to Q)) \to (P \to Q)$ 是在 A 中先用 $Q \to P$ 取代 Q，再用 $P \to Q$ 取代 P 所得的结果.

在命题逻辑中，**替换**则是对某一子公式而言的，它只要求对该子公式的某一出现或某几个出现进行替换，而不一定是对每一处出现都进行替换.

[例 1.2.8] 设公式 F 为 $(P \to Q) \vee (R \to (P \to Q))$. 用公式 $(\neg P \vee Q)$ 替换 F 中第二次出现的子公式 $(P \to Q)$，得到公式

$$(P \to Q) \vee (R \to (\neg P \vee Q));$$

用 $\neg R \vee (\neg P \vee Q)$ 替换 F 的子公式 $(R \to (P \to Q))$ 得到公式

$$(P \to Q) \vee (\neg R \vee (\neg P \vee Q)).$$

代入和替换都是从一个合式公式得到新的合式公式,但它们是有区别的.在下一节,我们将继续讲述代入和替换,并从语义的角度讨论代入和替换的一些性质.

习题 1.2

1. 下列哪些符号串是合式公式？

(1) (P)； (2) $(\neg(P \vee Q))$； (3) $((P \vee Q) \to PQ)$；

(4) $(P \vee Q)$； (5) $(P \to ((\neg P) \vee Q))$； (6) $(P \to Q$.

2. 求下列各合式公式的子公式：

(1) $((P \to Q) \to R)$； (2) $(\neg P \vee Q) \vee R \wedge P$；

(3) $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \vee \neg (P \to Q)$.

3. 求下列各合式公式的代入实例：

(1) 用 $P \to Q$ 和 $Q \to P$ 分别取代 $((P \to Q) \to P)$ 中的 P 和 Q；

(2) 用 $P \to Q$ 和 $(P \to Q) \to R$ 分别取代 $(P \vee Q) \to (P \wedge Q)$ 中的 P 和 Q；

(3) 用 Q 和 $P \wedge \neg P$ 分别取代 $(P \to Q) \to (Q \to P)$ 中的 P 和 Q.

4. 已知合式公式 $A(P,Q)$ 为 $(P \to Q) \vee (P \leftrightarrow Q) \wedge (P \to Q)$. 试求用 $(P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q)$ 替换 A 中 $P \leftrightarrow Q$，用 $\neg P \vee Q$ 替换第二次出现的 $(P \to Q)$ 所得到的合式公式.

1.3 永真公式

本节从语义的角度来研究命题合式公式，这里所说的命题 P 的"语义"，是指它的真值，逻辑联结词的"语义"，则是指它们在本质上作为真值函数的性质，即定义域和值域都是 0,1 这两个值的一元或二元函数．本节讨论公式的解释、公式的分类、基本永真式及其有关定理．

1.3.1 命题公式的解释

一般而言，公式的真值是不确定的，其真值随着公式中所含的命题变元真值的变化而变化，只有对公式中所有的命题变元赋以确定的真值后，公式才具有确定的真值．

定义 1.3.1 设 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$是含有 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 这 n 个命题变元的合式公式，对 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的一组真值赋值，称为对 A 的一个**解释**，记作 $I=\widetilde{P_1}\widetilde{P_2}\cdots\widetilde{P_n}$，其中$\widetilde{P_i}$取 0 或 1，$I(P_i)=\widetilde{P_i}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$．

［**例 1.3.1**］ 设合式公式 $A(P_1,P_2)$为 $P_1\vee P_2\wedge P_1$．它只有 2 个命题变元 P_1 和 P_2，因此其解释有 4 种：

$$I_0=00,\quad I_1=01,\quad I_2=10,\quad I_3=11.$$

并且有 $I_1(P_1)=0$，$I_1(P_2)=1$．

［**例 1.3.2**］ 设合式公式 $A(P,Q,R)$为 $P\wedge Q\rightarrow R$．它有 3 个命题变元，因此其解释有 8 种：

$$I_0=000,\quad I_1=001,\quad I_2=010,\quad I_3=011,$$
$$I_4=100,\quad I_5=101,\quad I_6=110,\quad I_7=111.$$

并且有 $I_1(P)=0$，$I_1(Q)=0$，$I_1(R)=1$．

一般地，含 n 个命题变元的公式共有 2^n 种不同的解释，因为每个命题变元的真值可取 0 或 1，n 个命题变元真值的所有可能组合有 2^n 种．

在公式 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$的解释 I 下，每个命题变元有确定的真值，那么根据联结词的语义，我们可求出公式 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$的真值．

定义 1.3.2 给定公式 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$的一个解释 $I=b_1b_2\cdots b_n$，那么 A 在I 下的**真值**$I(A)$的归纳定义如下：

$$I(A)=\begin{cases} I(P_i), & \text{若 } A=P_i;\\ 1, & \text{若 } A=\mathrm{T};\\ 0, & \text{若 } A=\mathrm{F};\\ \neg I(B), & \text{若 } A=\neg B;\\ I(B)\wedge I(C), & \text{若 } A=B\wedge C;\\ I(B)\vee I(C), & \text{若 } A=B\vee C;\\ I(B)\rightarrow I(C), & \text{若 } A=B\rightarrow C;\\ I(B)\leftrightarrow I(C), & \text{若 } A=B\leftrightarrow C.\end{cases}$$

[例 1.3.3] 设公式 $A(P,Q,R)$ 为 $(P\to Q)\wedge(P\vee R)$，其解释 $I=010$，那么 $I(P\to Q)=I(P)\to I(Q)=1$，$I(P\vee R)=I(P)\vee I(R)=0$. 因此

$$I(A)=I(P\to Q)\wedge I(P\vee R)=0.$$

要确定一个公式 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 在给定解释 I 下的真值也可以用真值表法.

构造 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 的真值表，必须考虑各命题变元的真值的各种可能的组合，因此 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 的真值表有 2^n 行. 在真值表的左边是各命题变元，然后是 A 的子公式，最右一列是公式 A 自身.

[例 1.3.4] 构造下列公式的真值表：

(1) $P\to Q\leftrightarrow\neg P\vee Q$； (2) $P\wedge\neg P$；

(3) $P\wedge\neg Q$.

解 它们的真值表如下：

P	Q	$P\to Q$	$\neg P$	$\neg P\vee Q$	$P\to Q\leftrightarrow\neg P\vee Q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

P	$\neg P$	$P\wedge\neg P$
0	1	0
1	0	0

P	Q	$\neg Q$	$P\wedge\neg Q$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

现在，我们将从语义学角度讨论命题逻辑中的几个重要问题.

1.3.2 命题合式公式的分类

从例 1.3.4 中我们看到，有的公式的真值与命题变元的真值无关，如例 1.3.4 (1) 中不管命题变元的真值为 1 还是为 0，公式的真值总为 1；例 1.3.4 (2) 中，不管命题变元的真值为 1 还是为 0，公式的真值总为 0. 而有的公式的真值与命题变元的真值有关，如例 1.3.4 (3) 中，随着命题变元真值的不同，公式的真值有时为 1，有时为 0. 这样根据公式真值的情况，可以对合式公式进行分类.

定义 1.3.3 设 A 是合式公式.

(1) 若 A 在任何解释下为真，则称 A 为**重言式或永真式**.

(2) 若 A 在任何解释下为假，则称 A 为**矛盾式或永假式**.

(3) 若至少有一个解释使 A 为真，则称 A 是**可满足式**.

由例 1.3.4 可知，$P\rightarrow Q\leftrightarrow\neg P\vee Q$ 是永真式或重言式，$P\wedge\neg P$ 是永假式或矛盾式，$P\wedge\neg Q$ 是可满足式.

数理逻辑的研究重心是永真公式类的研究. 其实，建立公理系统的目的也正是要用公理化方法去描述永真公式类，但这并不意谓着忽视其他公式类，因为在永假式前面加上一个否定词“¬”后可以变为永真式来研究，而可满足式又可作为非永假式来研究.

另外，永真式的合取、析取、蕴含和等值式都是永真式，这样，可由简单的永真式得到更复杂的永真式.

要证明一个公式是永真式，可以用真值表法. 一个公式的真值均为 1，则该公式是永真式，否则不是永真式.

若一个公式含有 n 个命题变元，则它有 2^n 个不同的解释，即真值表有 2^n 行. 那么当 n 增大时，真值表的行数成指数增长，这时用真值表法计算量是相当大的，显然非常麻烦.

1.3.3 逻辑恒等式和永真蕴含式

判断一个合式公式是否是永真式，真值表法适合于命题变元不太多的情形. 下面介绍另外一种证明永真式的方法.

定义 1.3.4 若 $A\leftrightarrow B$ 是永真式，则称 $\boldsymbol{A}$ **恒等于** $\boldsymbol{B}$，或 $\boldsymbol{A}$ **等价于** $\boldsymbol{B}$，记为 $A\Leftrightarrow B$，并称 $A\Leftrightarrow B$ 为**逻辑恒等式**.

关于逻辑恒等式有下列性质：

① $A\Leftrightarrow A$；

② 若 $A\Leftrightarrow B$，则 $B\Leftrightarrow A$；

③ 若 $A\Leftrightarrow B$ 且 $B\Leftrightarrow C$，则 $A\Leftrightarrow C$；

④ 若 $A\Leftrightarrow B$ 则 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$.

值得注意的是，“$\Leftrightarrow$”并不是一个逻辑联结词，而是用来研究命题逻辑的元语言中的符号，不要把“$\Leftrightarrow$”与“$\leftrightarrow$”混淆.

表 1.4 给出了常用的基本逻辑恒等式.

下面我们再回到 1.2 节中所讲到的代入和替换上来. 关于代入和替换，下面两定理说明了代入或替换前后公式的联系.

定理 1.3.1 (代入规则)永真式的代入实例是永真式.
