

高等学校试用教材

固体力学基础

北京大学地质系地质力学教研室 王仁 丁中一 殷有泉 编

地质出版社

高等学校试用教材

固体力学基础

(地质专业用)

北京大学地质系地质力学教研室 编
王 仁 丁中一 殷有泉

地质出版社

内 容 提 要

本书主要阐明有关分析地质构造现象所需的固体力学基本概念、原理和方法，为学习地质力学、构造动力学、地球动力学等课程，特别是为研究构造应力场提供必要的力学基础。

全书共九章，可分为三部分。第一部分相当于通常的静力学和材料力学；第二部分相当于弹性力学；第三部分处理与时间有关的问题如动力学等。上述三部分都是尽量与地质构造中的力学问题相结合而编写的。第一章介绍静力学的基本概念。第二章重点阐明均匀应力状态下，应力与应变莫尔圆的概念，同时对岩石剪破裂及断层进行分析。第三、四章从梁的弯曲和屈曲的观点，分析褶皱的垂直成因和水平成因。第五、六章重点介绍弹性平面问题的理论和有限单元的计算方法，并分析了一些典型的构造应力场。第七章结合地球动力学的需要介绍质点和刚体动力学的基本原理。第八章为弹性波的基本概念。最后一章则简单地介绍了代表真实地质体的流变力学模型和对褶皱变形的分析。

本书尽量在一般工院校的高等数学范围内，由浅入深地进行了阐述。各章、节均有较多的例题及题解。书中还附有二百多个练习题，基础部分附有全章的复习思考题六十多个，书末刊出习题答案和某些难题的解答，以利自学。

本书可作大专院校地质专业的试用教材，并可供具有中专水平以上的地质和地震工作者参考。

固 体 力 学 基 础

(地质专业用)

王 仁、王中一、殷有泉 编

*

国家地质总局教育司教材室编辑

地 质 出 版 社 出 版

张 家 口 地 区 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

1979年1月北京第一版·1979年1月北京第一次印刷

印数20,420册·定价2.20元

统一书号：15038·新354

前 言

这是一本供地质专业学生使用的基础性教材，目的是帮助地质工作者掌握为分析地质现象和研究地壳运动所必需的固体力学基本概念、基础理论和有关的基本知识。目前，为了进一步探索矿床分布规律、地震的预报和预防、以及为岩石工程建筑做出稳定性评价、构造地质学的发展用到越来越多的力学知识。不但从事地质力学的研究工作者，就是其它地质专业的工作人员也需要提高力学基础的素养。因此本教材在编写中保持一定的力学系统性，由浅入深地从静力学开始，经过材料力学到弹性力学，最后介绍了一些流变学的基本概念，涉及的范围是很广的，不论那一部分都有厚本的专著可供参阅，但是，我们在这里并不追求力学体系的完整性，删除了与地质应用没有什么关系的内容，把重点放在打好力学基础上，有了这个基础，就具备进一步阅读和钻研有关专门书籍的能力。在各个章节中，我们还尽量联系一些地质问题进行力学分析，其目的是帮助阐明力学概念和基础理论在地质中的应用，而并不是全面介绍力学在地质学中已得到了哪些应用（这后一个问题将在专门的课程中进行讨论）。事实上，这方面工作还做得很少，有待于广大的地质和力学工作者今后努力工作进行探索。

全书共分九章，大致可分为三个部分。

第一部分是静力学和材料力学。第一章静力学基本上是复习性质，重点在运用物体的平衡条件和有摩擦力情况下的平衡，加了一节流体的静力平衡是为了引进后面常用的静水压力概念。第二章的重点是建立应力和应变的概念。这里先通过简单的静不定问题说明一个物体内的应力分布取决于：外力、约束条件、物体力学性质的分布，用此来说明对于变形体，外力和应力有本质的区别，和刚体的情形是不一样的。通过这个问题为以后分析复杂问题先建立一个物理概念。在一般情况下，求物体内部的应力分布总是一个静不定问题，必须考虑约束和变形条件，不过问题更复杂了。此章主要部分讨论在均匀状态下的应力和应变这两个基本概念，要求牢固掌握应力圆和应变圆，在讨论岩石剪破裂机制和分析应变花时屡次应用这些概念。最后通过三角测量网的应变分析进入到非均匀应力分布的情形。

第三、四章讨论梁受垂直力和轴向力作用而产生的弯曲，用以分析地层褶皱的垂直成因和水平成因。在这两章中讨论的是非均匀应力分布的问题。

第二部分是弹性理论和有限单元方法，重点是在平面情况下进一步深入理解应力和应变概念及应力分析的方法。由于弹性问题只有在极简单的情况下才能求出解析解，而地质构造的情况却是很复杂的，所以过去未能对地质问题做出多少分析。近十几年来，由于电子计算机的发展，有限单元的计算方法得到普遍的采用，情况开始发生变化。有限单元方法不但可用来解弹性问题，还可用于解塑性和粘性变形的问题，不但考虑小变形还可考虑大变形，用于分析非均匀的地质体特别方便。看来，它将是使地质构造运动的分析逐步走向量化的有力工具。目前有限单元方法的专著犹如雨后春笋，我们在第六章中给出的只

是一些最基本的概念和方法，为进一步学习这一方法打下一个基础。

第三部分是与时间因素有关的部分。第七章是理论力学中的运动学和动力学部分，这里结合地学中遇到的问题对基本理论进行复习。对于分析地质现象来说，时间是一个十分重要的因素，构造地震是一个快速过程，这时在发震断层以外的地质体的反应，基本上可看成是弹性的，因此在第八章先讨论弹性波的传播理论，建立地震波和用它来进行物探的基本概念。对于在长时期中进行的构造运动，那是一个十分缓慢的过程，这时地质体的力学性质随时间的延长而出现一些新的现象：蠕变和松弛；第九章讨论如何用一些力学模型来代表地质体在这种情况下主要力学性质。这里重点在阐明一些物理概念，真正解题仍要用有限单元方法去进行，关于这方面本教材没做进一步的介绍。

对分析地质构造而言，另一个重要内容是大变形，本教材暂限于讨论小变形，我们希望在今后修订时再增加这部分内容。

全书所用到的数学工具尽量限于工科院校的高等数学范围内。第一、二章基本上只用到初等数学，第三、四章用到简单的常微分方程，第五、六章以后用到偏微商，在遇到一些简单偏微分方程时，专门做了一些解释，因而在数学工具上不致于有什么困难。

全书内容超过两学期的教学要求，因此，不同的地质专业可以选取不同的部分。对于一学期的课程，建议学前三、四章，也可以跳过第三、四章直接学第五章。第七章以后可供选讲和学员自己学习与参考之用。

全书注意到多给例题和思考题、练习题，帮助读者进行思考、运用和掌握重要的概念及原理。前五章还附有全章的复习思考题帮助读者自己进行总结。书末附有答案和某些难题的解答，以利自学。

这本教材是在72年以来几次对地质工作者和学员进行教学实践的基础上修改出来的，得到教研室和兄弟单位的同志们以及历届同学的帮助、启发和鼓励，但由于我们对于地质工作了解得还不多，掌握得还不深，难免还会有错误和不当的地方，希望读者给我们提出宝贵意见，以利今后的改进。

北京大学地质力学教研室 王 仁 丁中一 殷有泉
一九七八年九月

目 录

第一章 静力学的基本概念	1
1.1 力	1
1.2 作用在一个质点上的力的合成与分解。在一个质点上力的平衡	4
1.3 力矩	9
1.4 内力和外力。作用在一个物体上外力的平衡条件	15
1.5 物体在有摩擦力存在时的平衡	21
1.6 流体的静力平衡	25
第一章复习思考题	27
第二章 均匀情况下的应力与应变	30
2.1 内力和应力	30
2.2 简单拉伸(压缩)情况下的应力和应变	33
2.3 简单拉伸和压缩情况下的静不定问题	41
2.4 筒位拉伸情况下斜截面上的应力和应力圆	45
2.5 两个相互垂直方向上的拉伸或压缩——二向受力状态	49
2.6 位移、变形和应变; 线应变和剪应变	55
2.7 应变圆(应变摩尔圆)	57
2.8 横向变形。平面受力情况下的虎克定律(各向同性)	63
2.9 三个相互垂直方向受力的情况——空间应力状态	65
2.10 岩石力学性质的一些基本概念	66
2.11 岩石的剪破裂与断层	71
2.12 从三个方向线应变的测量结果决定应变状态——应变花的问题	76
2.13 弹性应变能	81
第二章复习思考题	86
第三章 梁的弯曲理论——褶皱在垂直力作用下的成因	88
3.1 弯矩分布和剪力分布	89
3.2 截面上各点的正应力分布	95
3.3 截面上各点的剪应力分布	98
3.4 梁弯曲时的主应力和主应力轨线	101
3.5 梁的弯曲变形	105
3.6 关于梁的弯曲理论的讨论	110
3.7 多层梁的弯曲	114
第三章复习思考题	115
第四章 轴向力作用下的梁的弯曲——褶皱的水平成因	117
4.1 直梁的偏心压缩问题	117

4.2	横向载荷和轴向压力的联合作用	121
4.3	从能量观点分析直梁在轴向压力下平衡的稳定性	124
4.4	关于褶皱问题的几点讨论	130
4.5	薄平板屈曲的简单介绍——多字型构造	137
第四章复习思考题		141
第五章 弹性力学基础		143
5.1	在直角坐标系中平面问题的基本方程	143
5.2	山字型构造的应力分布	164
5.3	无限厚介质对其内部岩层褶皱过程的反作用	168
5.4	在极坐标中平面问题的基本方程	171
5.5	圆孔和断层附近的应力集中问题	181
5.6	用应力解除结果计算地应力	191
5.7	关于用地应力变化预报地震的分析	192
5.8	空间弹性力学问题简介	198
第五章复习思考题		209
第六章 平面弹性问题的有限单元法简介		211
6.1	矩阵代数的某些知识	211
6.2	有限单元法概述	220
6.3	位移模式	222
6.4	单元的应变及应力	225
6.5	单元的等效结点载荷	228
6.6	单元的等效结点力及刚度矩阵	233
6.7	结点的平衡方程组和总体刚度矩阵	237
6.8	例题和在地质中的应用	241
第七章 质点和质点组动力学		255
7.1	质点的直线运动, 动力学基本定律	255
7.2	质点的圆周运动	260
7.3	质点在平面上和空间中的运动	264
7.4	刚体的平行移动和定轴转动	271
7.5	质点的相对运动	273
7.6	加速参考系与惯性力	277
7.7	质点和质点组运动的功与能	282
7.8	动量定理, 碰撞	291
7.9	动量矩定理	297
第八章 弹性波的传播		305
8.1	质点的振动	305
8.2	沿杆传播的纵波	312
8.3	圆杆中传播的扭转波	317
8.4	波在各向同性弹性介质中的传播	318

8.5	弹性平面波在自由表面上的反射	321
8.6	弹性波在两种介质的分界面上的反射和折射, 表面波	324
第九章	代表真实地质体的一些力学模型	328
9.1	各向异性虎克定律、非线性弹性体	328
9.2	塑性、理想塑性与应变强化	331
9.3	岩石力学性质对时间的依赖性	340
9.4	粘性流体	341
9.5	粘弹性体——马克斯威尔模型	345
9.6	滞弹性体——开尔文模型	349
9.7	一般线性流变体模型	350
9.8	粘塑性模型和宾汉模型	352
	练习题解答	354

第一章 静力学的基本概念

力学是一门研究物质机械运动的科学，机械运动就是物体的位置或物体各部分之间的相对位置的变动，是一种最简单的运动形式，在这讲义里我们将研究在机械运动中较简单的情况，主要是研究弹性物体处于平衡状态时力和变形之间的关系。它是用力学原理分析地壳运动的一个基础。

运动和平衡是对立的统一，我们要研究运动，却可以先研究平衡，而且又借助于物体的平衡来研究运动。有许多地质构造运动，相对位置的变动十分缓慢，对一短时间内的运动进行分析时，可以把问题看成是相对静止即平衡状态来处理，由此来求出力和位置变动的情况，然后将这些变动的情况随时间积累起来得出长时期运动的结果。另外有一类地壳运动，相对位置的变动很迅速，例如地震，这时也可以根据力学的原理把问题转化为一个静力平衡的问题处理。因此我们可以说研究物体平衡是研究地壳运动问题的一个基础。

在这一章里我们将讨论静力学的基本概念，主要研究物体在力的作用下的平衡问题。为了突出主要矛盾，我们将先忽略物体本身的变形，这样的物体又叫做刚体，它是一个经过理想化的模型，它在外力作用下内部各部分之间的相对位置不能变动。也就是说刚体是不能变形的，它只能做整体运动。有了这个基础以后，以下几章我们再来考虑物体的变形，那就是材料力学和弹性力学部分了。在本章最后简单地讨论了流体的静力平衡，这个概念在后面也要用到。

1.1 力

力的概念我们在日常经历中是经常遇到的，它的主要表现就是改变物体的运动状态，包括改变物体的位置、速度、形状、大小等等。人用力推车，就使车从静止到前进，从慢到快。同时我们还看到，力是物体间的相互作用，车受到人的推力前进，而人同时也受到车子的反作用力，才不致于跌倒。当甲物体受到乙物体的作用力时，乙物体同时也受到甲物体的反作用力，力总是成对出现的，单独的一个力在实际中是没有的，因此在力学中，力一般是这样定义的：

“力是物体间的相互作用，这种作用使这些物体发生机械运动状态的改变。”

如前所述，在这一章里我们将暂时忽视物体本身的变形，那么力的作用效果就是要使物体沿着力作用的方向产生运动（如果物体原来是静止的），或沿着力的作用方向发生运动速度的改变（又称为加速度）。如果力的大小不同，所产生的运动改变固然不同，若大小相同而方向不同时，则所产生的运动改变也是不同的。我们用同样大小的力作用在门上，如果方向不同，所产生的运动改变也不同，一个方向是开门，一个方向是关门。因此在说明一个力的时候，除了要说明它的大小，还要说明它的方向。这种把大小和方向同时加以考虑的量，在数学上叫做向量（或矢量），除了力以外，位移（位置的移动），速度等等也都是向量，我们可以用一个有箭头的线段来表示一个向量（如图1—3中的 \overrightarrow{AB} ，

\overrightarrow{AC}), 线段的长度表示向量的大小, 线段的箭头表示向量的方向。在写算式时以 \overrightarrow{AB} 表示向量, 以 \overline{AB} 表示线段 AB 的长度, 也就是向量 \overrightarrow{AB} 的大小, 以线段 AB (从 A 到 B) 与某预定方向 (例如取正东) 的夹角 β 表示向量 \overrightarrow{AB} 的方向。向量 \overrightarrow{AC} 的大小用 \overline{AC} 表示, 方向与某预定方向的夹角 α 表示。我们还常用 F^* 表示力, 其大小用 $|F|$ 表示或直接用 F 表示, 其方向也是通过与某预定方向的夹角来表示。

力的单位: 在工程制中, 我们以 4°C 的净水 1 公升在北纬 $48^\circ 52'$ 海平面上的重量作为力的单位, 称为一千克力或一公斤。重量也就是物体 (例如上述一公升的水) 在那个地方所受到的地球引力的大小。把同样的物体 (其中所包括的质量不变) 放到高山上或者到月球上去称, 它所受到的引力不同, 重量也就不同了。因此在物理学中需要区分质量和重量。质量是物体内含有的物质的多少, 在物理学中, 使一克质量 (在 4°C 时 1 毫升的净水) 的物体产生 1 厘米/秒² 的加速度的力叫做 1 达因。1 克质量在自由落体加速度为 981 厘米/秒² 的地方所受到的地球引力, 为 981 达因, 而在工程制中叫做 1 克重, 因此, 1 克重 (或 1 克力) = 981 达因, 1 公斤 (或 1 千克力) 等于 981000 达因。

在有一部分地质力学的书中用达因作为力的单位, 在一般工程力学的书中用公斤为力的单位, 它们的换算关系为

$$1 \text{ 公斤} = 981000 \text{ 达因} \sim 10^6 \text{ 达因}$$

我们在本教材里将用公斤作为力的单位。

以下再复习三个基本概念。

一、作用力与反作用力

力是物体间的相互作用。如果将相互作用的两物体其中一个看为作用物体, 另一个看为被作用物体, 则作用物体给被作用物体一个作用力, 被作用物体也给作用物体一个反作用力。实践经验告诉我们: 作用力与反作用力总是同时发生, 其大小相等、方向相反, 沿同一直线分别作用在两个互相作用的物体上。这就是所谓作用力与反作用力定律, 一般称为牛顿第三定律。如果我们知道了甲物体对于乙物体的作用力的大小及方向, 根据这个定律也就可知乙物体对于甲物体的反作用力的大小及方向。特别要注意的是: 作用力与反作用力永远是分别作用在不同物体上的。

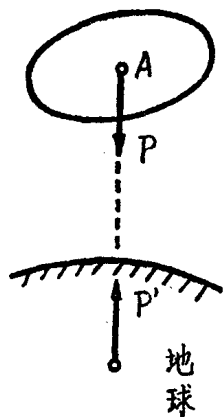


图 1-1

例如, 物体 A 受到地球的引力 P (见图 1-1), 则与此同时, 物体 A 也必以与 P 力大小相等方向相反且沿同一直线的力 P' 吸引地球, P 作用在物体 A 上, 而 P' 作用在地球上。因此, 当我们应用作用与反作用力规律来分析物体受力情况时, 要分清每一个力是“谁”对“谁”的作用, 而在每一物体上, 只画出它所受的力。

* 本教材文字内用粗黑体字母 ($W, T, M, P, \omega, \dots$ 等) 代表向量, 图中则用 $\vec{F} (T, W, \dots)$ 等表示之。在其它力学著述中亦常用 $F (T, W, \dots)$ 等代表向量的。

二、约束与约束反力

普通作用在一物体上的力，有重力，有外界给它的推动力，电场、磁场给它的力等等。在这些力的作用下，如果物体可以自由运动，不受其他限制，则称之为自由体。我们可以通过已知的力学规律，求出该自由体在那些力的作用下运动的变化情况。但一般情形下，物体的运动不是完全自由的。例如，放在桌面上的物体，它受到地球吸引它向下的力（重力） W （见图1—2a），但由于桌面的阻挡，不能自由向下落。在力学上说，桌面对物体的运动给了一个约束。简单地说，所谓约束，就是限制了物体某种运动的可能性（这里桌面限制了物体下落的可能性）。受到约束的物体，称为非自由体。这时，物体对桌面有一个作用力，根据作用力与反作用力定律，桌面给物体一个反作用力。这种由约束给物体的反作用力称为约束反力。它与物体给予约束的作用力大小相等、方向相反。我们可以认为，约束的作用完全由这个约束反力来代替。

约束反力既是阻止物体运动的，因此，它的作用点应在约束与被约束物体相互接触之点，它的方向总是与约束所能阻止的运动方向相反。例如，桌面对物体的约束，在桌面光滑时，只能阻止物体在垂直于桌面向下方向的运动。所以，桌子给物体的约束反力必通过接触之点而垂直于桌面，并指向被约束物体，如图1—2a中所示 N 。又如，图1—2b中，重物用一根柔绳悬挂在天花板上。柔软的绳子对物体的约束只能阻止物体沿着绳的中心线离开绳子的运动。所以，绳子对于物体的约束反力 T_B 必沿着绳子方向，且背离物体，如图1—2b中所示的 T_B 。约束的形式是多种多样的，对通常遇到的某些约束，其约束反力情况见第19页底下的注。

加于物体的外力，按其性质来说可以分为主动力及被动力。所谓主动力，即该力的大小和方向与被作用物体上的其它外力及物体本身的运动无关。否则是为被动力。按此划分，则上述的重力、推动力等是为主动力，而约束反力是一种被动力。例如，对图1—2a所示情况，光滑桌面的存在只说明有产生垂直约束反力 N 的可能性，但 N 有多大，甚至究竟产生或不产生这个 N ，还要看物体所受到的其它外力及物体有没有向着桌面的垂直运动的趋势。假如该物体上面另有绳子悬挂着，桌面可能完全不产生约束反力。

三、受力图

在静力学中，一般研究的物体都是非自由体。当分析某非自由体受力情况时，如果将它所受的约束用约束反力来代替，则该物体可以看作在它所受的全部主动力和约束反力作用下的自由体。例如，在图1—2b中，重物受的重力 W 是一个主动力，而该重物又受到绳子的约束，不能自由下落。重物给绳子的作用力是 $T'_B (= W)$ ，而绳子给重物的约束反力是 $T_B (= ?)$ ，则重物可看成在重力 W 及约束反力 T_B 两力作用下的自由体，如图1—2c所示，这样，在分析某物体受力情况时，将所研究物体与其他相联系的物体隔离开来，所有的约束用相应的约束反力来代替，将物体所受的全部作用力（包括所有的主动力和约束反力）用力向量的形式画在所研究的物体上，这样画出的图形，称为该物体的受力图（或称示力图）。图1—2c所示即为图1—2b中重物的受力图。

同样也可以画出绳子的受力图。将绳子与重物及天花板隔离开来，看绳子受到哪些力？显然，绳子受到的力有：（1）绳本身的重力 $W_{绳}$ （是主动力）；（2）重物对绳的

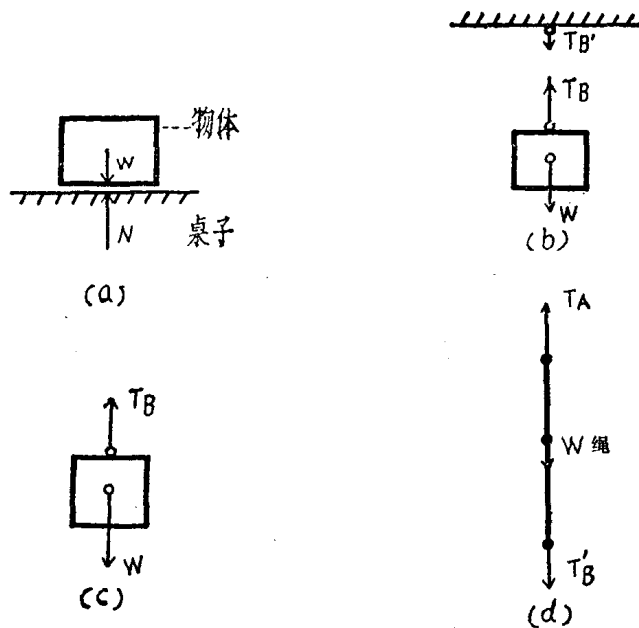


图 1-2

作用力 T'_B (也是一个主动力); (3) 绳子受到天花板的约束反力 T_A . 因此, 绳子的受力图如图 1-2d 所示。

1.2 作用在一个质点上的力的合成与分解。在一个质点上力的平衡。

先说明质点的含意。当物体上各点作均匀运动或均匀受力时, 我们常可以把物体看成一个质点, 用这点的运动来表示物体的运动, 用作用在这点上的力代表作用在整个物体上的力。这样的点不仅仅是一个几何上的点, 它是代表着一个物体 (或物体的一个部分), 因此有一定的物理内容, 例如它具有一定质量, 因此又称为质点。

前面已经说明力是个向量, 力作用的效果不但和力的大小、还和力的方向有关。如果在一点同时作用着许多力, 这些力联合起来的共同效果是什么呢? 为此, 我们要寻求能够和这些力作用的效果相同的一个合力。我们不能简单地把这些力的大小加起来, 而要同时考虑到它们的方向, 也就是要用数学中讲过的向量加法。它的要点可以简述如下:

a. 沿同一条作用线上的力的合成。

规定某一个方向为正, 则与它相反的方向为负, 把这些力按代数值 (即包括正负号) 相加就得合力。用图表示就像图 1-3a 和 b 中向量 \vec{AB} 和 \vec{AC} 相加得 \vec{AD} . 用向量书写法可以写成:

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}. \quad (1)$$

b. 沿两个不同方向的力的合成——平行四边形加法。参看图 1-3c, 若在 A 点有两个向量 \vec{AB} 和 \vec{AC} , 以它们为边作平行四边形 ABCD, 则对角线 \vec{AD} 就是向量 \vec{AB} 和 \vec{AC} 之和, 仍写成 (1) 式的形式。 \vec{AD} 的大小和方向可以用作图法或用三角函数的方法求得。

c. 力的分解: 以上情形 \vec{AD} 是 \vec{AB} 和 \vec{AC} 的合力, 同时也可将 \vec{AB} 和 \vec{AC} 看成是 \vec{AD}

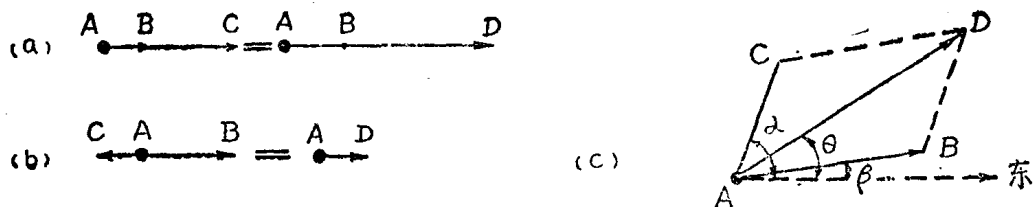


图 1-3



图 1-4

的分力，这就是力的分解。从以上情形看从分力求合力只有一个合力。但从合力求分力却有许多种分力，除非另外做好规定。我们将规定以这点为原点选好一个坐标系，沿坐标方向分解，这时就只有一组分力了。

例如，在A点选定坐标方向 x 及 y ，则可将力 \overrightarrow{AD} 分解成沿 x 及 y 方向的两个分力，记为 $\overrightarrow{AD_x}$ 和 $\overrightarrow{AD_y}$ 。设力向量 \overrightarrow{AD} 与 x 轴正方向的夹角为 α （见图1-4a， α 从 x 轴量起，并以从正 x 方向转向正 y 方向为正，反之则为负），用 $\overrightarrow{AD_x}$ 及 $\overrightarrow{AD_y}$ 分别记分力 $\overrightarrow{AD_x}$ 及 $\overrightarrow{AD_y}$ 的代数值（分力方向与轴正向一致时取正，否则为负），以 \overline{AD} 记 \overrightarrow{AD} 的大小，得

$$\left. \begin{aligned} \overline{AD_x} &= \overline{AD} \cos \alpha, \\ \overline{AD_y} &= \overline{AD} \sin \alpha, \end{aligned} \right\} (2)$$

我们把 $\overline{AD_x}$ 及 $\overline{AD_y}$ 分别称为力 \overrightarrow{AD} 的 x 分量及 y 分量，可见分量是标量。一般情形中，某力用 \mathbf{F} 表示，则相应地用 F_x ， F_y 表示沿坐标方向的分力，用 F_x ， F_y 表示分量。另一方面，因为力的分解是作为向量分解的，故“力的分量”这名称可推广到“向量的分量”。实际上在直角坐标中，向量的 x （或 y ）分量就是该向量在 x （或 y ）轴上的投影，也就是该向量的 x （或 y ）坐标。我们将区别分力是向量，而分量则是标量。

在空间的情况，如果向量 \overrightarrow{AD} 与 x ， y ， z 的正方向的夹角分别为 α_x ， α_y ， α_z （图1-4b），则它的 x ， y ， z 分量分别为：

$$\left. \begin{aligned} \overline{AD_x} &= \overline{AD} \cos \alpha_x, \\ \overline{AD_y} &= \overline{AD} \cos \alpha_y, \\ \overline{AD_z} &= \overline{AD} \cos \alpha_z. \end{aligned} \right\} (3)$$

d. 多个力的合成。我们先选好一个坐标系，将各个力分解为沿坐标方向的分力，然后按各坐标方向相加，最后进行合成。现先以平面情形的例题说明之。

例1 求出图1-5a所示作用在A点的诸力 \overrightarrow{AB} ， \overrightarrow{AC} ， \overrightarrow{AD} ， \overrightarrow{AE} 的合力。

解 首先要选好分解的方向。为方便起见，现选 \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{AM} 两个互相垂直的方向为坐

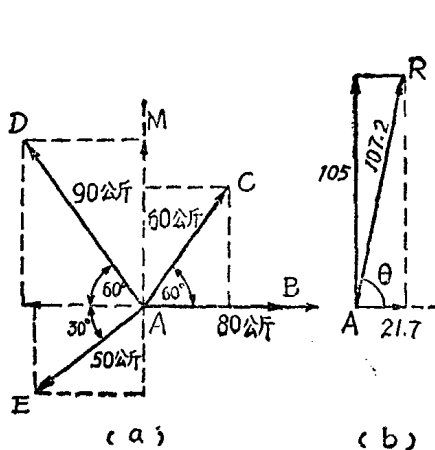


图 1-5

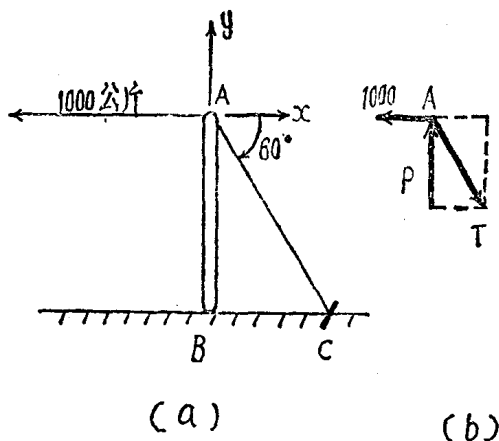


图 1-6

标方向并称之为水平方向和垂直方向，那么：

\overrightarrow{AB} 的水平分量为80公斤，垂直分量为0。

\overrightarrow{AC} 的水平分量为 $60\cos 60^\circ = 30$ 公斤，垂直分量为 $60\sin 60^\circ = 52.0$ 公斤。

\overrightarrow{AD} 的水平分量为 $-90\cos 60^\circ = -45$ 公斤，垂直分量为 $90\sin 60^\circ = 78.0$ 公斤。

注意 \overrightarrow{AD} 的水平分量与 \overrightarrow{AB} 方向相反，所以是负的，垂直分量与 \overrightarrow{AM} 方向相同，所以仍是正。

\overrightarrow{AE} 的水平分量为 $-50\cos 30^\circ = -43.3$ 公斤，垂直分量为 $-50\sin 30^\circ = -25$ 公斤。

现将各水平分量相加得

$$80 + 30 - 45 - 43.3 = 21.7 \text{ 公斤,}$$

各垂直分量相加得

$$52 + 78 - 25 = 105 \text{ 公斤.}$$

它们就是合力的水平分量和垂直分量 (图1-5b)，现在求合力得

$$\overrightarrow{AR} = \sqrt{(105)^2 + (21.7)^2} = \sqrt{11025 + 471} = 107.2 \text{ 公斤,}$$

$$\tan \theta = \frac{105}{21.7} = 4.84, \theta = 78^\circ 20'.$$

用数学式子表示，若在一质点作用着在同一平面上的 n 个力。我们先按 (2) 式把这些力分解成 x 和 y 方向的分量。将这些分量分别加起来，就得到合力的 x 和 y 分量，写成：

$$\left. \begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = \Sigma F_x, \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \cdots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = \Sigma F_y. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

这里各式中第三个等号后采用略去脚标 i 的简写，以下仿此。把这两个分量合成，就得到这几个力的合力的大小为：

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad (5)$$

合力与正 x 轴的夹角 θ 为：

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x}. \quad (6)$$

分量与合力大小的关系为:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= R \cos \theta, \\ R_y &= R \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

若这 n 个力不在一个平面上,则需要先选取一个空间直角坐标系 $Oxyz$ 如图1—4b.将各力按(3)式分解成 x 、 y 、 z 方向的分量,然后将这些分量分别加起来,得到合力的 x 、 y 、 z 分量,写成:

$$\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \Sigma F_x, \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \Sigma F_y, \\ R_z &= F_{1z} + F_{2z} + \cdots + F_{nz} = \Sigma F_z. \end{aligned} \quad (8)$$

从这些分量就可以找到合力的大小和它的方向:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (9)$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R}. \quad (10)$$

现在考虑质点在诸力作用下的平衡。一般,作用在同一个质点上的若干个力,称为力系,力系平衡的意义就是这些力的共同效果与没有力作用一样,也就是说合力等于零。对于作用于某质点的力系具体分以下情况:

a. 二个力平衡的条件就是它们必须在同一条作用线上,大小相等方向相反。

b. 在平面上的力系平衡的条件就是合力的两个分量都等于零,即:

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0. \quad (11)$$

c. 在空间中的力系平衡的条件就是合力的三个分量都等于零,即:

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma F_z = 0. \quad (12)$$

例2 有竖立在地表面上的直杆 AB 如图1—6a,在顶端 A 处受水平拉力1000公斤,问在平衡时斜拉的钢绳和竖杆中各受力多少?

解 我们考虑的是 A 点的平衡,将 A 点的受力图画出如图1—6b,分别设 AB 及 AC 在 A 点的约束反力为 P 与 T ,方向也暂按图上箭头所示。(如果按这方向计算的结果是正,说明所设的方向正确,如果计算结果是负,说明与所设的方向相反。)选 x 、 y 座标如图,将 T 分解为 x 、 y 分量,得:

$$T_x = T \cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}T,$$

$$T_y = T \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}T,$$

应用平衡条件(11),从

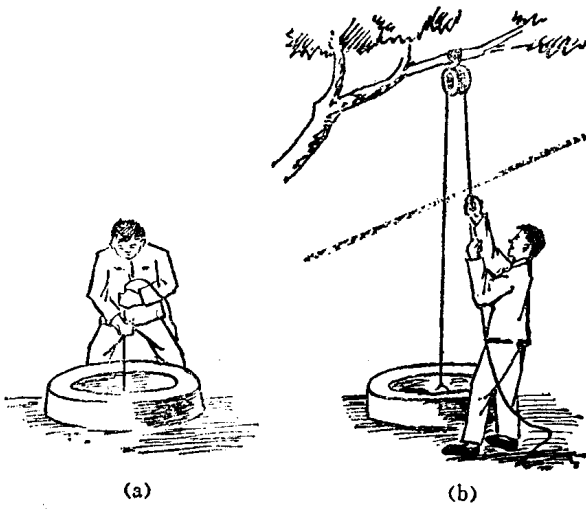
$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{得: } \frac{1}{2}T - 1000 = 0, \quad \text{或 } T = 2000 \text{ 公斤,}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{得: } -\frac{\sqrt{3}}{2}T + P = 0, \quad \text{则 } P = 1732 \text{ 公斤.}$$

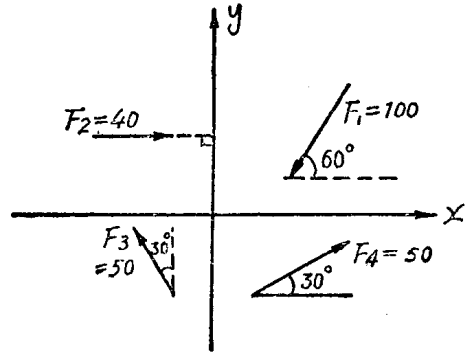
作用在 A 点的约束反力 T 是离开 A 点的方向,说明钢绳中受的是拉力,而 P 力是向着 A 点的,说明杆内受的是压力。

练习1.2

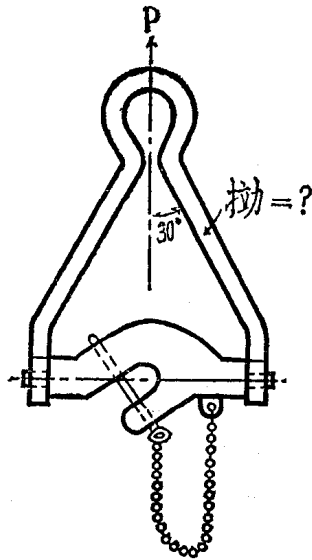
1.人自井中提水,已知人重55公斤,所提的水及桶共重25公斤。试求在图示两种情况



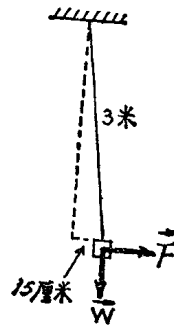
练习图 1.2-1



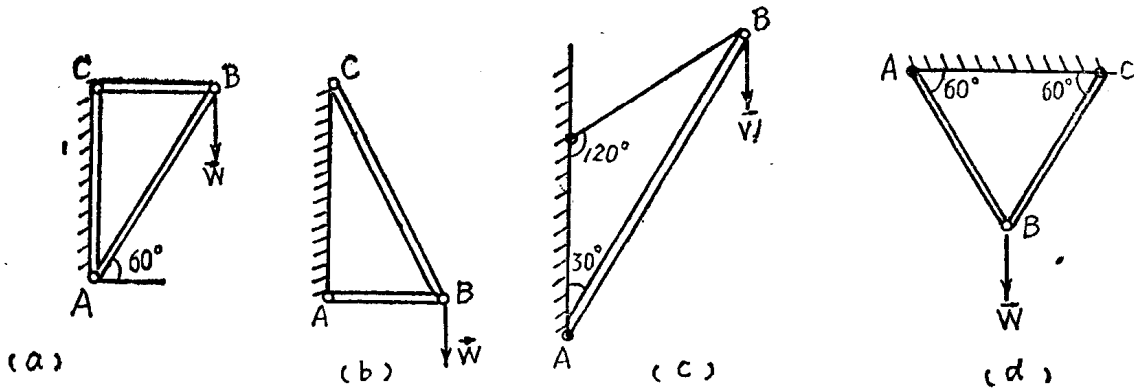
练习图 1.2-2



练习图 1.2-3



练习图 1.2-4



练习图 1.2-5

下，人对井台的压力。画出人的受力图。

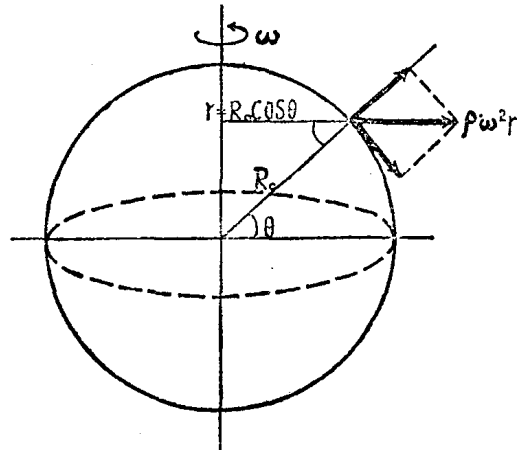
2. 求图示诸力的 x 、 y 分力。

3. 钻机提引梁的构造如图，设提升的重量为 P 。求两臂中所受拉力，忽略变形的影响。

4. 在 3 米长钢绳上悬挂一块 600 公斤的水泥板，现在水平方向加一力 F ，使它水平移动 15 厘米；问 F 力的大小。

5. 有重物 $W = 1000$ 公斤吊在支架 ABC 上，求如图所示的四种情形下支杆 AB 、 BC 中受的力，如果 W 改为水平向右的力 F ，情形将怎样？

6. 设地球是半径为 R_0 的圆球，以角速度 ω 绕极轴旋转，对地表一个单位体积的质点产生一个 $\rho\omega^2 r$ 的离心惯性力，方向如图， ρ 是质点质量， $r = R_0 \cos\theta$ 是质点到极轴的垂直距离， θ 是纬度。将这个离心惯性力分解为两个分量：一个垂直地表，一个向赤道。解释重力在两极最大，在赤道最小，并写出其变化规律。解释地球为什么会变成一个扁球体。按此解释，地球会不会愈来愈扁？



练习图 1.2-6

1.3 力 矩

对于一个由许多质点以至无穷多质点组成的物体来说，大小和方向都相同的力如果在物体上的作用点不同，一般说来，它所产生的运动改变也不同。

先考虑平面内受力的情形。

例如图 1-7 所示，用一个扳手去扳转螺钉，使它绕 O 点转动（ O 点实际上是螺钉的轴线与平面的交点）。转动的效果不但和力的大小、方向有关，还和力在扳手上的作用点有关。

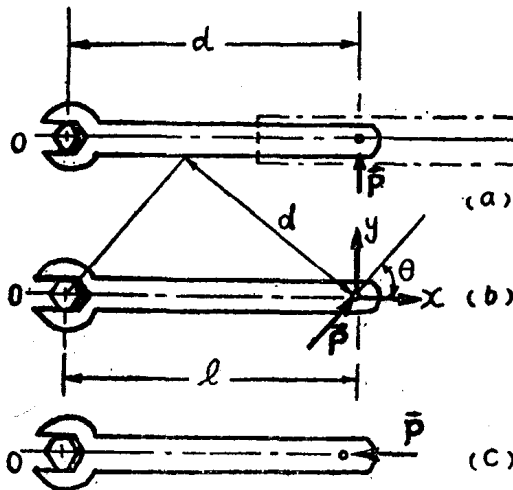


图 1-7

一般来说，我们很自然地将力垂直作用在扳手上，这时，力的作用点离 O 点愈远，（例如还可以接上一个套筒，把力加在套筒上，）则愈容易转动，力的作用点离 O 点愈近则愈不容易转动。另外，如果将力斜着作用在扳手上如图 (b) 中所示，要产生转动就不如垂直作用在扳手上那么有效。如果将力沿着扳手本身的方向作用如图 (c) 中所示，则力再大也转不动螺钉。总结这些情况，力对 O 点转动的效果不是简单地与 O 点到力的作用点的距离有关而是与 O 点到力的作用线的垂直距离有关，这距离愈大产生转动的效果就愈大。这