

力学译丛

第二輯

上海市力学学会編譯委员会

上海市科学技术編譯館

目 录

一般力学

自动控制理論的一些問題.....	В. Н. Петров	(1)
------------------	--------------	-------

固体力学

强度的力学理論(附譯后簡評).....	М. М. Филоненко-Бородич	(7)
蠕变情况下的应力分析.....	I. Finnie	(28)
塑性理論——近代成就的概述.....	William Prager	(40)

流体力学

力学中一个新的比拟关系.....	И. М. Белецкий	(61)
磁流体力学中的激波.....	Р. В. Половин	(62)
論磁流体力学中欧姆定律的形式.....	Г. А. Любимов	(74)
高超音速流动.....	Lester Lees	(81)

自动控制*理論的一些問題

(第一次国际自动控制會議的总结)**

В. Н. Петров 著

郭乾榮譯 朱照宣校

自动学的蓬勃发展是近年来，特别是最近十年来的特征。

自动化是技术进步的基本方向之一。生产过程自动化和建造高质量自动系统的任务对自动控制理論提出了完全新的要求。

全世界都对这门新的年轻科学的发展給以很大的重視。就在最近几年內已举行了一系列关于自动学的一般和特殊問題的大規模国际代表大会和會議。三年前成立了国际自动控制联合会(IFAC***)，其基本任务是联合各国学者和工程师的力量来全力发展自动学，并且在这个目标下来組織科学情报的交流和举行国际自动控制會議。

苏联学者积极参加 IFAC 的組織并加以发展。在苏联成立的全国自动控制委员会是 IFAC 的会员。列托夫(A. M. Леров)教授(苏联)曾被选为 1959 年 IFAC 的主席。

IFAC 大会决定 1960 年在莫斯科召开第一次 IFAC 国际會議。

會議于 1960 年 6 月 27 日开幕，一直继续到 7 月 2 日結束。在这一周内，全世界許多国家的学者在列宁山上以罗蒙諾索夫命名的国立莫斯科大学大厦內商討了自动控制理論的最重大問題，自动技术工具的設計及其在生产过程自动化中应用的問題。

来自 29 个国家的 1190 位代表参加了會議的工作，其中有自动学領域中最卓越的学者；还有近 1000 位来宾。苏联和美国代表团的人数最多。在 21 个分組會議上宣讀了 274 篇报告和一系列补充的科学报导****。有 580 余人在討論时发言。

在會議期間举行了由 7 个国家提供的关于自动学的科学和科普影片的会演。共上演 176 場次，放映了 43 部影片。20 个国家的出版社和科学机构寄来 3000 册以上有关自动学的书籍；这些书的展覽引起了會議参加者的极大兴趣。

在商討自动控制問題时所表現的高度积极性反映了这个科学和技术領域的一般情况。

在會議上对有关自动控制的最重大問題的商討，有力地証明了自动控制理論发展的高度水平和在解决控制系統的分析 and 綜合的基本問題时已經广泛地应用了严格的数学方法。在最近几年內研究出解决最复杂問題的某些极普遍和有效的方法。

自动控制理論已經成为一门精确的技术科学，成为研究和設計自动系統的有效工具。統計方法实际上已渗透到自动控制理論的一切領域。极大值原理和动态规划方法为最优系統理論提供了基础。数理邏輯的工具在自动系統結構理論的建立中得到了应用。离散——继电和脉冲系統理論已經形成。不变性理論、建立多环和自治調整(автономное регулирование)系統的方法以及其它新的理論方向得到了很大的发展。

目前自动控制的普遍理論正在形成中。当然，在自动控制領域內还有着大量未解決的問題，这些問題需要数学方法的进一步发展。

与研究新方法的同时，已經成熟的方法，特别是計算自动調整和控制系統的近似方法——如諧波平衡法、頻率法等等，得到了进一步的发展，使这些方法具有在工程实际中便于应用的形式。

* 这里将俄文 управление 譯为“控制”，不是指广义的“控制論”(кибернетика)。广义的自动控制理論將包括信息論、信息机理論和自动調整理論三个內容——譯者注。

** 大会的所有报告均已譯成俄文汇编成六册在 1961 年由苏联科学院出版。本文內容与作者在大会最后一天所作《理論組工作总结》的內容基本相同——譯者注。

*** IFAC——International Federation of Automatic Control (俄文簡称为 ИФАР——譯者注)。

**** 应为 23 个分組，285 篇报告——譯者注。

會議的口號——“理論——廣泛的應用性,技術工具——最大的可靠性,自動化系統——高效率”——十分恰當地表征了近年來在各國所進行的工作的方向。

除了討論自動調整和控制系統的最重大的理論問題和已經研究出的計算方法外,會議參加者對於建立自動系統的新原理的商討予以很大的重視。

在會上特別鮮明地顯示出近年來在自動控制領域內發生的那些質的變化。

如果說從前自動調整和控制系統的基本任務還只是維持預先給定的工藝過程的進行,那末現在就已經能完成這樣的任務:自動地實現自動化裝置和整個生產的最有利工作狀態,並保證它們能夠達到最大經濟性和生產率。

應用了計算技術工具以及能夠解決最佳解的選擇問題的邏輯裝置和自尋最優狀態的最優系統後,就可以建立新型的極其完善的自動系統。這些問題導至自動控制新原理的研究——過程最優化原理、建立自協調 (самонастраивающиеся)、自適應 (самоприспосабливающиеся) 和甚至“自教育” (самообучающиеся) 系統的原理,“自教育”系統不但具有在最有利狀態下保持自協調的能力,並且能夠隨著工作經驗的積累來改善自己的特性和作用性質。

建立組合系統的原理得到了發展,在這種系統中調整機構的動作不但是由於被調量與期待值的偏差結果所引起,並且還能直接由負載情況或根據其它的擾動來實現。

已經擬定了一些方法,來建立對有害擾動反應微弱而又能最精確地跟蹤控制作用的極完善系統。

包含繼電、脈沖和數字裝置的离散自動系統具有很大的前途,這種系統具有巨大的可能性來處理從一次發送器和測量元件上所得到的大量信息,並且能夠保證高度精確地完成複雜的控制規律。

為了解決一系列自動系統的設計問題,為了分析和綜合包含幾十個或幾百個繼電器的複雜繼電網路、自動最優調整器、數字和相似模擬裝置以及其它的新型自動裝置(這些新型自動裝置不但可以加速設計和精密加工新的控制系統,並且可以使人的很多方面的腦力勞動機械化),建立新類型機器的問題就具有重大的價值。

會上令人信服地證明了自動控制理論所達到的高度水平。在會議的各分組會上商討了一些最重大的問題。

線性連續系統理論組*

在線性連續系統組里,不變性理論和建立多回路和自治調整系統的問題看來引起最大的興趣和招致最大多數的參加者來討論。這顯然是由於技術的發展導致自動系統更加複雜化,以致必須分析具有多個被調整量的系統和採用按偏差 (отклонение)** 和按擾動 (負載) 作用的系統等。

在這個分組里,引起極大興趣的問題有:多回路調整系統的分析、綜合多回路調整結構的普遍方法、改善具有一個和幾個被調整量的自動調整系統動特性的方法和手段,以及含有滯後元件系統理論等問題。

關於探討一些辦法使調整系統穩定性判據更為完善的報告和建立調整系統質量評價更普遍方法(這是一些各別的、過去沿不同方向發展的解決質量問題方法的總體)的報告,也引起很大興趣。

這一分組里共聽了 23 篇報告,有 40 余人參加討論。

非線性連續系統理論組

非線性連續系統理論組的工作包括非線性連續自動調整和控制系統的分析 and 綜合問題的廣闊範圍;組里聽了 14 篇報告,30 人在討論時發言。對非線性連續系統的精確的和近似的研究方法作了概述。

大部分的報告都討論了諧波平衡法的發展。這個在工程實踐中有廣泛應用的方法在多周期振蕩情形中,在研究次諧波和高諧波 (супергармонический) 共振、同步振蕩、參數放大等現象時,都被推廣成矩陣形式。

探討了非線性系統中的強迫振蕩。用諧波平衡法與統計線性化法相結合,找到了系統在隨機作用下的某些綜合問題的解決途徑。

應用諧波線性化法的各種變化形式,成功地研究了在調整系統中限制供電電源的功率對調整過程

* 文中的小標題均由譯者所加——譯者注。

** 指被調整量的實際值與期待值的偏差,通常稱為誤差 (ошибка),故確切地應稱為按誤差作用的系統。偏差與誤差的區別可參看 Соколовников 主編自動調整原理第二章第二節——譯者注。

的影响,找到了借助于周期外作用来抑制自振的条件和在有間隙系統中抑制自振的办法。还探討了利用对数频率特性的諧波綫性化法的变化形式。

对报告展开討論时,提出了两种观点。一种观点认为諧波平衡法虽然非常有效,但必須謹慎应用,因为它的描述函数 (описывающие функции) 的交点不存在,并未給出稳定性的充分条件;特别是当交点不存在时,在系統中还可以存在复杂的自振。

另一种观点是:諧波平衡法是很有效而且很简单的方法,可以推广到用来求次諧波解,并且在实际遇到的情形中,它能够給出正确的結果。

在分組会上还探討了放大系数的程序改变对調整过程质量所引起的影响問題、在調整器中采用半比例元件的問題、复杂非綫性系統的靜特性計算方法和計算非綫性調整系統积分平方估价的新方法。

离散系統理論組

自动控制理論蓬勃发展的新方向之一是离散系統理論。这个領域的主要問題是含有继电、脉冲和数字系統的普通离散自动系統的分析 and 綜合問題,以及探討建立最优和自協調离散系統的方法。

在继电系統理論方面,會議的报告主要注意于次諧波振蕩的精确和近似分析。还探討了在随机作用下在高速性方面达到最优化的問題。

会上最广泛地闡明了脉冲系統理論。对这种系統的数学研究方法作了鳥瞰,对多次和多回路系統、变参数系統的計算方法和脉冲系統的統計計算法給予很大的重視。

在所报告的著作中,与非綫性脉冲系統有关的一些困难課題也得到了发展。等差相平面法 (разностная фазовая плоскость) 在这里得到了应用,利用这个方法发展了研究振幅-脉冲系統的方法。

在最优脉冲系統方面,探討了这些系統在不受限制和受飽和型和能量限制下的結構选择問題。还探討了建立按质量判据来反饋的自協調系統的方法。

在继电-脉冲系統理論方面,在相平面法、并且引入随机滯后的基础上,探討了这种类型的最簡單系統。

数字自动系統理論的基础得到了发展。給出了量子化效应的評價,探討了研究周期状态的方法、根据补偿滯后和实现最优过程的条件来綜合的方法。

組里有 64 人发言,共听了 23 篇报告;其中一部

分报告含有新的、以前在文献中沒有闡述过的思想和方法。在离散自动系統理論方面,最令人注意的思想是关于根据按质量判据反饋来建立脉冲自協調系統的和根据动态规划方法来建立最优数字系統的思想。

在組里展开了广泛有益的討論。关于在脉冲控制系统中应用数字計算裝置、利用相空間法研究非綫性脉冲系統和应用算子法分析脉冲調整系統的問題进行了最热烈的討論。

会上強調了发展分析和綜合非綫性脉冲系統和受随机作用系統的方法的必要性。

自动学統計問題組

在自动学随机問題 (стохастические проблемы) 組里商討了一些科学方向。

現代控制系統統計理論的基本問題之一是非綫性系統的統計分析和綜合問題。在这个問題的报告中和在討論这些报告的过程中出現了在这方面的三个不同的工作方向:发展和归納統計綫性化法及其应用范围;根据馬尔科夫 (Марков) 随机过程理論来建立某一特定种类的非綫性系統的精确理論;发展簡化成綫性系統的綜合方法。在討論过程中,各国学者对統計綫性化法表现了很大的兴趣,这个方法的思想是与非綫性系統确定性理論 (детерминистическая теория) 中的諧波綫性化法相近似。在应用馬尔科夫随机过程理論来分析自动系統方面,参加討論的苏联学者报导了一系列以前国外未知的有趣結果来补充报告者的发言。在簡化成綫性的非綫性系統統計理論方面,討論过程中出現了一系列有趣的結果,这些結果在設計自協調和自寻最优优化系統 (самооптимизирующиеся системы) 方面很有实用前途。

第二个有兴趣的、展开热烈討論的方向是綫性系統的統計綜合理論。这个領域內的問題在美国和苏联学者的著作中得到了很好的发展;討論指出在这方面美国有两个新的相互竞赛着的方向。第一个方向是应用动态规划方法来確定控制部分的最优程序。第二个方向是研究直接求最优系統的微分或差分方程的方法。

最优系統算法的求得問題也引起了很大兴趣。在这方面指出了:在有随机的噪声和干扰場合下,大部分探測問題和最优处理信息的問題都可以用統一的观点来考虑和用一个共同的理論方法来解决。

除了上述三个主要方向的报告和討論外，在随机問題組里商討了用实验方法确定控制系統和对象的特性和随机过程的統計特性、綫性系統的統計計算、变換連續信息为离散信息的誤差研究問題，以及应用信息理論方法来評定自动系統及其元件的傳遞能力問題。在組里共听了 17 篇报告和 40 篇发言。

最优系統理論組

在最优系統理論組里討論了 12 篇报告。討論時近 40 人发言。組里分析了最优系統理論問題，包括研究最优化問題的普遍方法和个别具体問題的詳細研究成果。

最优系統理論的一般問題主要是与研究非經典变分問題的求解方法有关。在这方面，关于在最优自动控制系統理論中的极大值原理的报告引起了极大的兴趣。討論时发言者指出：这个原理給出了在控制函数受到极普遍的限制下研究最优化非綫性問題的有力方法。极大值原理是普遍原理之一，它适用于最广泛的問題。

在組里对最优系統的綜合問題給以很大的重視。在这方面，討論了逆時間法和以应用极大值原理为基础的在系統相空間中建立等值面的方法。在討論过程中提出了应用上述方法来綜合具体系統的例子。探討了綜合三阶快速最优系統的例子。

在討論中探討了极大值原理和动态规划方法間的联系。动态规划方法应用在最优控制問題中时，給出与极大值原理方程緊密有关的泛函方程。已經指出，利用动态规划方法将在計算上遇到很大的困难。

以偏微分方程描写的分布参数系統的某些最优控制問題的提出和解决，以及綫性系統最优控制理論的一般和特殊問題，都引起了极大的兴趣。

自協調系統理論組

在自協調系統理論組里，听了 20 篇报告。探討了生物界和机械界对变化条件具有适应性能的系統，这种适应性的目的是保証控制对象和周圍环境能够相互作用以使控制对象在一定意义下处于最佳状态。在組里既探討了借自动寻找来保証适应的系統，也探討了无自动寻找而借开环或閉环形式改变系統的状态来保証适应的系統。

討論了自动最优化系統統計理論問題、自協調

系統动力学問題、生物电控制問題和生理調整系統的某些性质，还有自協調自动駕駛仪理論問題。

自協調系統組的討論是最热烈的討論之一，听众极其众多。組里通常有 200 余人出席。討論時超过 70 位参加者发言。提出了 200 多个問題。这証明了科学界对这个在自动控制理論中极为重要和有前途的方向特別重視。

关于供近似地确定自动調整系統和自協調系統对象的特性用的計算装置，对其理論和应用都提出了有趣的报告。对涉及生物控制論問題的报告展开了热烈的討論。苏联、南斯拉夫和美国学者对于研究建立在很多方面类似于生物机体的系統的理論作出了很大的貢獻。在組里有六篇报告是与研究生物界自适应系統有关的問題。生物电控制問題的一些学者們所得到的結果引起了应得的重視。利用生物体内发生的生物电流来控制人造器官以替代已丧失的器官，已經得到了实现的可能性。

以自动調整和控制理論的方法和方式来研究生物系統，現在正得到更大的推广。类似的控制論方向开始給出有趣的結果，并且已經在會議的报告中得到了反映。

在一系列的报告和討論中，指出了研究和探討能够在控制对象的特性和参数迅速漂移下工作的自協調系統的必要性。这些問題与自協調过程的稳定性問題緊密有关。所以在討論時再三強調：在自協調系統的各种工作状态下，以精确的数学公式来写出其稳定条件的重要性。

結構和信号构成理論組

继电裝置的結構理論是目前自动控制理論的重要方向之一。这个理論的发生最初是在自动裝置继电綫路的分析和綜合問題中，但現在它的方法被用来解决很多类型的自动控制問題。在它的基础上发展起自动計算和操纵裝置現代普遍理論的一系列方向、邏輯和神經網絡理論、有限自动裝置 (конечные автоматы) 理論等。

信号构成理論与继电裝置結構理論緊密連接在一起。

許多国家在进行上述領域內的工作。每年全世界发表 150~200 篇关于这个题目的科学論文。

在結構和信号构成理論組里，討論了 7 篇报告，討論時有 36 人发言。組里涉及到继电裝置理論和信号构成理論的一系列重要問題，其中有继电裝置

綜合方法的建立問題、具有給定可靠性的繼電結構的構造問題、應用新邏輯語言來描寫离散序列的問題、繼電裝置分析和綜合過程的機械化問題、在遙測系統中信息傳遞的抗干擾性和效率問題。

由于組內報告的數目有限，特別是由于缺乏其它外國在這個領域內工作的許多著名學者的報告，在組里不可能闡明現代結構和信息構成理論的很多問題。這個缺陷部分地為組內報告展開討論時的發言所彌補。

計劃將來舉行關於繼電裝置理論和與它相連接的科學方向的專門討論會。

專門數學問題組

在專門數學問題組里提出了 13 篇報告。25 人參加討論。商討了若干科學問題。

第一個問題統一了以右端連續的微分方程所描寫的自動調整系統定態的求得和研究問題。在報告中闡明了這個問題的一系列重要觀點。明確了穩定定態的概念，並且給出了嚴格數學定義，用公式表示了微分方程組周期解與參數關係的研究結果。

組里討論的第二個問題是研究具有間斷特性的非線性系統問題。在這方面討論了在類似系統中確定定態的問題。曾展開了熱烈的討論。

組里討論的第三個問題是調整系統的穩定性問題。在報告和有趣的討論中涉及的基本問題是關於進一步發展利用略布諾夫 (Ляпунов) 第二法來確定穩定性的方法。

模擬和實驗研究方法組

在模擬和實驗研究方法組里听了 11 篇報告，討論時有 12 人發言。

應用模擬方法和實驗方法來研究和建立複雜控制系統的問題引起會議參加者應有的重視。目前不僅是用相似法，並且还用數字和复合裝置來模擬的方法，有助於人類腦力勞動的某些方面機械化，並且在極高程度上促進其效率的提高。使實驗技術更加精確，並且為進行實物試驗時大大節省材料建立了先決條件。

在報告及討論中，數字模擬工具和方法的發展得到了反映。提出了利用適合於程序控制系統的數字裝置來復寫二階曲線的新方法。探討了复合的數字-相似裝置，特別是來復寫核反應堆動力學的裝

置。應用數字方法，同時提高其精確度，就可以大大地擴展變量變化的容許範圍。

組中提出的在電子模擬機上解偏微分方程的一種方法引起很大的興趣，這一方法是基於偏微分方程和受隨機擾動的電路中所發生的隨機過程之間存在有一定聯繫。

在一篇報告中描寫了獨創的高頻交流模擬裝置，它由無源網絡結合乘子隨動系統 (множительные следящие системы) 所構成。這個裝置可以保證較高的精確度，並且具有可逆性 (обратимости) (包括非線性元件) 的特點，這就大大地擴展了它的能力。

在生產過程控制系統的工作最優化方面，應用電子模擬的新思想，無論對建立最優系統，或對控制過程的數學描寫精確化，都打開了廣闊的前景。

其它各組

會議參加者對自動技術工具的構造問題及其計算和設計方法，給予很大的重視。近年來出現了許多新型的自動裝置元件，其中有半導體元件、利用特殊鐵磁材料的磁性元件、光敏電阻等等。傾向於利用有高度可靠性的無觸點元件是發展自動技術工具的最重要特點。另一特點是傾向於劇烈縮減自動裝置的尺寸，傾向於應用越來越小型的元件。但是在這種自動裝置元件的構造和廣泛應用的道路上，有着很大的困難。把新儀器從試驗樣品達到廣泛運用的地步，還需要很大的努力。因此在會議上，與商討自動裝置元件新構造原理的同時，廣泛地討論了新型元件的高動力性能和最佳特性的獲得辦法和計算方法，以及自動裝置可靠性的問題。

利用各種物理現象來構造新型自動元件的問題，特別是利用放射性同位素、分子共振和其它現象來構成敏感元件、放大器和變換器的問題，引起了很大的重視。關於以氣動元件，特別是以任何運動部分而是利用氣流的相互作用的新型氣動元件為基礎來構造自動設備和計算裝置的工作，也引起了很大興趣。指出了：在構造自動檢驗 (контроль) 和調整裝置以及運動系統時，應用离散自動裝置及具有數字變換器的測量元件的優越性，借編碼方法和數字變換裝置以离散形式來傳送信息是新型自動和運動裝置的特點。實際上越來越需要構造複雜的變換器、各種邏輯裝置和對建立保持設備最有利工作狀態的自協調系統及其需要的最優調整器。會議

的报告和报导中表明,各国在建立这种装置方面得到了很大的成功,虽然还谈不上它们在自动化实践中的广泛应用。

会议中有些分组的工作是关于在国民经济各部门中生产过程自动化的问题。20个国家的学者提出了这些问题的报告。在这些报告中探讨了机械制造、电力系统、化学工业、炼油工业、冶金工业的自动化问题。

注意力的中心是如何确定和保证自动化系统最优工作状态的问题,以及在冶金和其它工业部门中实现自协调系统的初次试验的分析和实现自协调自动驾驶仪的初次试验的分析问题。控制对象动态特性的研究也给以很大的重视。

在生产自动化系统中计算装置和控制机的应用

开辟了引人注目的前景。生产过程的强化和它们经济效率的提高问题,也在热烈的讨论中得到了反映。

会议无论在苏联或外国的科学界和工程界的人士中都引起了很大的兴趣。

会议中对报告的商讨、富有成果的争论和各国学者意见的广泛交换,都无疑地会对自动控制理论的进一步发展产生巨大的影响,并将促进这门年轻科学的更有效的成长。

(译自 Известия АН СССР, отделение технических наук, энергетика и автоматика, 1960, № 5, стр. 68~76)

(上接第 61 页)

个质点在中心力场中的运动,力场的势为

$$U = Cr^n \left(C < 0, n = \frac{Q}{\pi} \right)$$

特别是在库仑力场下, $U = \frac{c}{r}$ 和流体力学中的汇成比拟,汇强为 $Q = -\pi(n = -1)$ 。

如果再进一步应用光学和力学间的比拟,还能

够建立几何光学的平面问题和流体力学的平面问题之间的联系。这只需要在公式 (11) 中取 $\varphi(x, y) = \ln n(x, y)$, 其中 $n(x, y)$ 是光介质的折射系数。

若注意到电势为 φ_1 的电场和折射系数为 $n = c\sqrt{\varphi_1}$ [4] 的光介质相当,则还可类似地和电子光学的问题建立起联系。

参 考 文 献

- [1] К. Якоби, Лекции по динамике, 1936.
- [2] И. М. Белецкий, Уч. зап. Моск. гос. заочн. пед. инст., сер. Физ.-матем., в. 8 (1959).
- [3] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М.—Л., 1951.
- [4] В. Главер, Основы электронной оптики, 1957.

(译自 Доклады Академии Наук СССР, Том. 140, № 6, 1961, стр. 1278~1280)

强度的力学理论

М. М. Филоненко-Бородич 著

王則明譯 朱頤齡校

编者按：

本文前半部分是对现有理论作总结性的介绍；直到后半部分才逐步提出作者的分析与见解。全文篇幅较长，但前半部分内容基本上可参考一般教科书。因此，为了节约篇幅，从 §1 到 §5 除译出每节的标题外，只摘译了其中若干处的图、文、公式、符号等。这些互不衔接的片断译文，不反映该节的主要内容，只是为了后文中的查考。从 §6 以后，则原文照译，完全未加删节，俾保存原作风貌。

§1. 历史概况. 强度理论的本质

§2. 经典的强度理论

经典的理论：第一理论——最大正应力理论。
第二理论——最大线应变理论。第三理论——最大切应力理论。

第二强度理论：若 ϵ_0 与 $-\epsilon_0$ 为简单拉伸与压缩时的线应变极限值， σ_0 与 $-\sigma_0$ 为相应的应力极限值，则强度条件为：

$$\left. \begin{aligned} -\epsilon_0 &\leq \epsilon_1 \leq \epsilon_0, \\ -\epsilon_0 &\leq \epsilon_2 \leq \epsilon_0, \\ -\epsilon_0 &\leq \epsilon_3 \leq \epsilon_0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

利用虎克定律，条件(6)可写作：

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_0 &\leq \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1) \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq \sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

第三强度理论：

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_0 &\leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_2 - \sigma_3 \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_3 - \sigma_1 \leq \sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

§3. 胡伯-米塞斯-亨盖(Huber-Mises-Hencky)能量理论

变形功：

$$A_{\phi o p, m} = A - A_{\sigma \sigma} = \frac{2(1+\nu)}{6E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1], \quad (22a)$$

$$A_{\phi o p, m} = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (22b)$$

强度条件：

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_0^2 \quad (23)$$

§4. 摩尔强度理论. 表达三向应力状态的摩尔图解方法

方向余弦： l, m, n

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (27)$$

联系正应力 σ 、切应力 τ 与作用面法线方向 (l, m, n) 的关系方程组：

$$\left. \begin{aligned} l^2 + m^2 + n^2 &= 1, \\ \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 &= \sigma, \\ \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 &= \sigma^2 + \tau^2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

§5. 摩尔理论的基本原理

摩尔认为：脆性破坏(断裂方式的破坏)应发生于图形(图8)的右部，该处拉应力大而切应力小，在

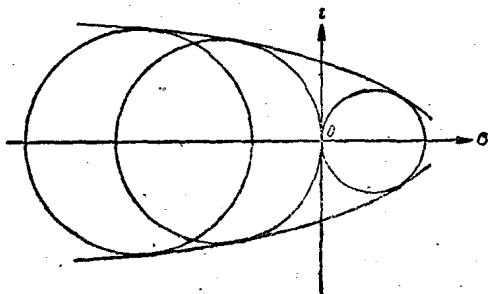


图8 两支对称曲线组成的包线

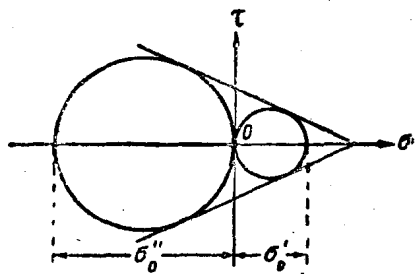


图9 建立于简单拉伸与压缩实验之上的最简包线

此处建立包线是没有意义的，所以要代以其他的极限曲线。

列恩(Leon 1933)指出，在摩尔理论中，若要建立统一的极限主圆包线，使它既可预见滑移破坏，也可预见断裂破坏，则必需满足下列条件：

- 1) 包线为到处光滑的曲线；
- 2) 包线与 σ 轴正交；
- 3) 包线与 σ 轴交点处曲率半径为有限。

摩尔极限条件：极限主圆半径 $r = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ 是圆

心坐标 $a = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ 的函数：

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) \quad (40)$$

按照理论提出时的年代次序，摩尔理论在1900年提出，应称为第四理论。胡伯-米塞斯-亨盖理论在1904年提出，应称为第五理论。

§6. 极限条件在 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 空间的图象

在以上所介绍的各种理论中，我们都是用表征应力状态的不变量来表达强度极限条件的。而且，我们一直是选用主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 作为不变量，同时还规定了：

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (41)$$

这些数值，在以 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为坐标轴的三度空间中，可以用来表示一点的直角坐标(图11)。

此空间内的每一点，表示某一应力状态；例如：

- 1) 在坐标轴上的点，表示沿着该轴的简单拉伸或压缩；
- 2) 位于坐标平面上的点，表示平面应力状态： $(\sigma_1, \sigma_2), (\sigma_2, \sigma_3), (\sigma_3, \sigma_1)$ ；
- 3) 坐标原点对应于物体内某点无应力；
- 4) 所谓空间对角线，即对坐标正半轴成相等倾

斜的直线，在这里具有特殊的意义。它的方向余弦可从关系式(27)得出。为：

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (42)$$

在空间对角线上所有点，表示所有三个主应力都相等的应力状态。这种应力状态有时称之为静水应力状态。位于第一象限内的半对角线上所有点

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0,$$

表示三向均匀拉伸情况；而在第七卦限内的反向半对角线就给出三向均匀压缩情况：

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0.$$

任何理论的强度条件的极限点，应当分布在某极限面上。即：

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (43)$$

这个面包围着坐标原点，因为无应力点总在不破坏区域内，所以原点不可能位于极限面上。若在(43)中代入坐标原点得到

$$F(0, 0, 0) < 0,$$

则所有满足下列条件的应力状态

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0, \quad (44)$$

都是够强度的，因为表示这些应力状态的点，和坐标原点处在同一区域中。这就意味着，任何理论的强度条件，可以表为(44)的形式。

例如，按第五理论的强度条件(23)

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_0^2,$$

我们就得到形如(43)的极限面方程：

$$2F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_0^2 = 0,$$

或者，去括号再除以2：

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_0^2 = 0$$

在此代入原点坐标，就得到

$$F(0, 0, 0) = -\sigma_0^2 < 0,$$

所得的强度条件[根据(44)——译者]，仍回到我们原已提出的形式：

$$2F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_0^2$$

考虑到空间对角线的特殊意义，当研究某一极限面的形式时，可不用坐标系 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ，而采用以空间对角线作为一个坐标轴。相应的坐标转换公式可按如下方法得到：1) 将坐标系绕 σ_3 轴旋转 45° (图11)；2) 再在 $\sigma_1\sigma_3$ 与 $\sigma_2\sigma_3$ 所成两面角的等分平面内，旋转一余弦等于 $\frac{1}{\sqrt{3}} = n$ 的角度(此余弦即空间对

角线的方向余弦)(图 12)。换言之,选用欧拉角时:
进动角 ψ 、章动角 φ 、与自转角 θ ,应按下列条件:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}; & \sin \varphi &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \\ \cos \psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}; & \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{3}}; \\ \theta &= 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} \sin \theta = 0, \\ \cos \theta = 1. \end{cases}$$

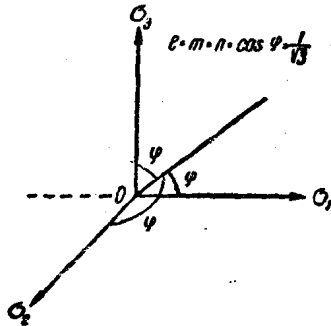


图 11

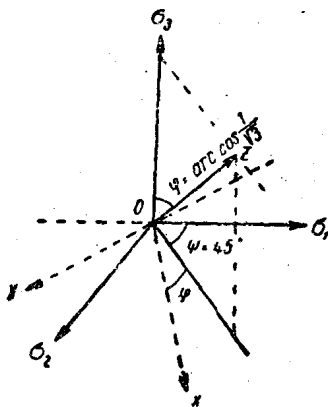


图 12

根据此欧拉角,应用解析几何公式,就可以得到用新坐标 x, y, z 来表示原有坐标 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的方向余弦。从而得到下列转换公式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z, \\ \sigma_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x + 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}z \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

我们现在来看第二强度理论,按照这一理论的强度条件(6)与(8),存在有缩短的极限值(负伸长)。但是从这理论的本质来看,应当只限于正值的伸长;这样,在双边不等式中,应弃去其左边($-\sigma_0$)而只保留三个不等式,从而得到三个极限条件:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) &= \sigma_0, \\ \sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1) &= \sigma_0, \\ \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) &= \sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

此乃形成三面角的三个平面方程式。利用公式(45),就得到它们在新坐标系 x, y, z 中的方程式:

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{\sqrt{2}\sqrt{3}}x - \frac{1+\nu}{\sqrt{2}}y + \frac{1-2\nu}{\sqrt{3}}z &= \sigma_0, \\ \frac{1+\nu}{\sqrt{2}\sqrt{3}}x + \frac{1+\nu}{\sqrt{2}}y + \frac{1-2\nu}{\sqrt{3}}z &= \sigma_0, \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1+\nu)x + \frac{1-2\nu}{\sqrt{3}}z &= \sigma_0 \end{aligned}$$

从这些方程式中容易看出:三平面的交点位于空间对角线上,其坐标为:

$$x=y=0; \quad z = \frac{\sigma_0\sqrt{3}}{1-2\nu}$$

三平面和 xy 平面($z=0$)相交时就组成一个等边三角形,它由下列直线所组成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{3}} - y &= \frac{\sigma_0\sqrt{2}}{1+\nu}, \\ \frac{x}{\sqrt{3}} + y &= \frac{\sigma_0\sqrt{2}}{1+\nu}, \\ x &= \frac{-\sigma_0\sqrt{3}}{(1+\nu)\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

但在原来的坐标系($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)中,对于平面应力状态,例如 $\sigma_3=0$,即在 $\sigma_1\sigma_2$ 平面内的应力,所得的强度区域,系在下列三直线[参见(46)]所形成的三角形内(图 13)。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \nu\sigma_2 &= \sigma_0, \\ -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) &= \sigma_0, \\ \sigma_2 - \nu\sigma_1 &= \sigma_0 \end{aligned} \right\}$$

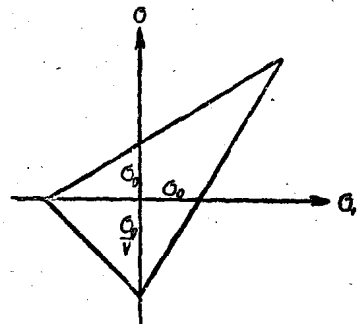


图 13

同样可以考虑第三理论的极限面。强度条件(10)引出六个极限条件:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_0, \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm \sigma_0, \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \pm \sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

它确定了三对平面。利用方程(45)，将它轉化到新坐标系中有：

$$\left. \begin{aligned} -\sqrt{2}y &= \pm\sigma_0, \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y &= \pm\sigma_0, \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y &= \pm\sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

注意，此式中不含有坐标 z ；这就意味着，所有平面平行于空間对角綫 (z 軸)。将(49)式看为在平面 xy 上的直綫方程，就容易看出，它們形成一个正六角形(图 14)。因而可以推出极限面乃是一个正六角棱柱面，其軸沿空間对角綫方向。棱柱面和 $\sigma_1\sigma_3$ 平面相交所得的六角形(图 15)，由下列直綫所組成：

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \pm\sigma_0, \\ -\sigma_3 &= \pm\sigma_0, \\ \sigma_1 - \sigma_3 &= \pm\sigma_0, \end{aligned}$$

此六角形划出在平面应力状态 σ_1, σ_3 中的强度区域。

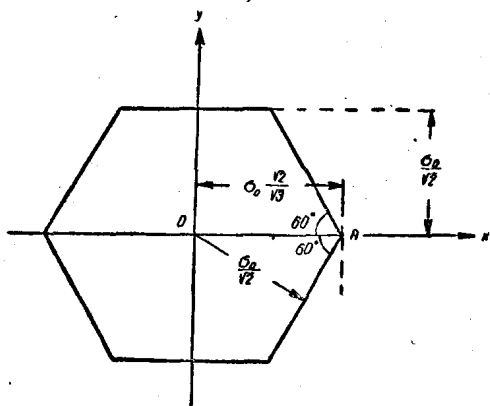


图 14

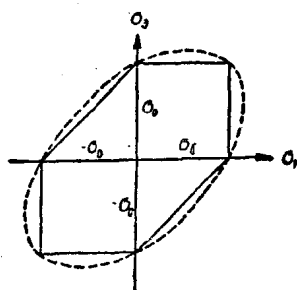


图 15

考虑第五理論的强度条件(23)引到极限关系式

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_0^2 \quad (50)$$

借助于(45)轉換到新坐标 x, y, z ：

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 &= 2y^2, \\ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \sqrt{3}xy, \\ (\sigma_1 - \sigma_3)^2 &= \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \sqrt{3}xy \end{aligned}$$

将这些值代入(50)，就得到

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{3}\sigma_0^2 \quad (51)$$

在平面 xy 上的圓周方程；和第三理論一样，在极限条件(51)中不出現 z 坐标。这就表明极限面是圓柱面，其基准圓的半徑等于 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sigma_0$ (51)；柱軸沿空間对角綫。有时称之为米塞斯-亨盖圓柱。柱和坐标系 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 中的坐标平面相交成一橢圓；例如，在平面应力状态 σ_1, σ_3 ($\sigma_2=0$) 时，所得橢圓为

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 = \sigma_0^2 \quad (52)$$

将坐标系旋轉 45° ，就可以証明，此橢圓主軸系沿坐标系 $\sigma_1\sigma_3$ 的平分綫方向；在图 15 中如虛綫所示。从方程(52)还可看出，第三理論六角形的所有頂点，位于橢圓(52)上，即橢圓外接于六角形。由此可知，米塞斯-亨盖圓柱外接第三理論六角棱柱(这点也可从比較柱的基准圓(51)半徑与棱柱基准綫頂点 A (图 14)的橫坐标而看到)。这种情况指出，第三理論与第五理論是相当接近的，而第五理論的强度区域略大于第三理論。

摩尔理論(第四理論)从主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 空間的图象来看是頗为特殊的，因为它略去了中間应力 σ_2 的影响；这就意味着，我們只要討論 $\sigma_1\sigma_3$ 平面就够了。摩尔本人已提出了这平面图象(图 8)。但所采用的坐标为 σ, τ ，而不是不变量(通过 σ_2 軸的任意平面都可以作为原始数据)；只在建立主摩尔圓和寻找其包綫时才引入不变量。由于应力 σ_2 不起作用；摩尔理論的极限面在 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 空間之图象，将为某一柱状面，柱面的基准曲綫在 $\sigma_1\sigma_3$ 平面內而母綫則平行于軸 σ_2^* 。若在坐标系 $\sigma\tau$ 中的包綫方程为已知(图 16)：

$$\tau = f(\sigma), \quad (53)$$

則它在 $\sigma_1\sigma_3$ 平面上的图象，即这里所說的柱面的基准曲綫，可由下述方法得到(图 16)：

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{d\tau}{d\sigma} = -\tau'; \quad (54)$$

* 作者在这里之所以认为摩尔理論頗为特殊，在于討論第二、第三、第五理論在 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 空間的图象时，事实上并不受 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 的限制。但这里討論摩尔理論时，則必須认为在 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 范圍內，这样，它的图形才是母綫平行于 σ_2 軸的柱状面。若无此限制，則摩尔理論在 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 的图象，就是六个同形柱状面所組成以对角綫为軸的六叶喇叭面——譯者注

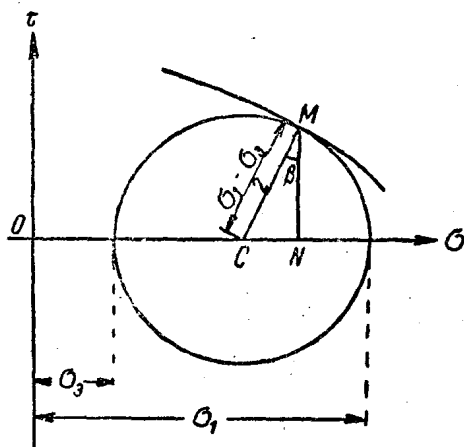


图 16

式中負号是考虑到摩尔包綫的切綫之角系数为負。

从图中可以看到

$$\sigma = OC + CN = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \beta,$$

$$\tau = NM = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \beta$$

从这些等式,考虑到(53),就有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} &= \sigma - \tau \operatorname{tg} \beta = \sigma + \tau \tau', \\ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} &= \frac{\tau}{\cos \beta} = \tau \sqrt{1 + \tau'^2}, \end{aligned} \right\} \quad (55')$$

从此就得到在 $\sigma_1\sigma_3$ 平面上极限曲线点的坐标

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma + \tau(\tau' + \sqrt{1 + \tau'^2}), \\ \sigma_3 &= \sigma + \tau(\tau' - \sqrt{1 + \tau'^2}) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

因为按照(53), τ 是 σ 的函数,所以上列等式乃是在 $\sigma_1\sigma_3$ 平面上摩尔极限曲线的参数方程,即在 $\sigma_1\sigma_3$ 空間,以 σ 为参数的摩尔柱面基准綫方程。

若摩尔包綫的某一段,可以代以一对直綫(图9),则 $\tau' = \text{常数}$,而方程(55)为参数 σ 的綫性式子,即在 $\sigma_1\sigma_3$ 平面上也为一双直綫。很容易得到此直綫,因为在坐标軸上分別有等于 σ'_0 及 $-\sigma'_0$ 之截距(簡單拉与压的极限应力),故方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma'_0} + \frac{\sigma_3}{-\sigma'_0} - 1 &= 0, \\ \frac{\sigma_1}{-\sigma'_0} + \frac{\sigma_3}{\sigma'_0} - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

由于在坐标原点,这些方程的左边取負值,則按摩尔理論得到下列强度条件:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \frac{\sigma'_0}{\sigma'_0} \sigma_3 &< \sigma'_0, \\ \sigma_3 - \frac{\sigma'_0}{\sigma'_0} \sigma_1 &< \sigma'_0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

作为例子,我們还考虑一种情况,当摩尔包綫为二次抛物綫时

$$\sigma = a - k\tau^2, \text{ 或 } \tau^2 = \frac{a - \sigma}{k} \quad (58)$$

从这方程就有

$$\tau \tau' = -\frac{1}{2k}; \quad \tau' = -\frac{1}{2k\tau};$$

$$\tau'^2 = \frac{1}{4k^2\tau^2} = \frac{1}{4k(a - \sigma)};$$

$$\begin{aligned} \tau \sqrt{1 + \tau'^2} &= \sqrt{\frac{a - \sigma}{k}} \sqrt{1 + \frac{1}{4k(a - \sigma)}} \\ &= \sqrt{\frac{a - \sigma}{k} + \frac{1}{4k^2}} \end{aligned}$$

利用这些算式,公式(55')有下列形式

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \sigma - \frac{1}{2k},$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{\frac{a - \sigma}{k} + \frac{1}{4k^2}}$$

此即摩尔极限曲线的参数方程。消去参数 σ ,就得到

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 = \frac{a}{k} - \frac{1}{4k^2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2k} \quad (59)$$

按照下列公式作变换,即将軸 σ_1 及 σ_3 在它們的平面內旋轉 45°

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 + \sigma_3), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - \sigma_3),$$

可以証明,方程(59)在坐标系 $\xi\eta$ 中也是一个二次抛物綫,其軸綫平行于軸 σ_1 与 σ_3 的平分綫。

从所考虑的两例中可以看出,摩尔极限曲线在 $\sigma_1\sigma_3$ 平面上的形状,类似于在坐标系 $\sigma\tau$ 中的形状,不过旋轉了 45° 。要确定方程(59)中的参数 a 与 k 也不难,其条件为在 σ_1 与 σ_3 正負半軸上,抛物綫的截距分別等于 σ'_0 与 $-\sigma'_0$ 。于是方程的最終形式为:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (\sigma'_0 - \sigma''_0)(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma'_0\sigma''_0 = 0 \quad (59a)$$

由于在坐标原点 ($\sigma_1 = \sigma_3 = 0$) 左边 < 0 , 于是强度条件为

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (\sigma'_0 - \sigma''_0)(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma'_0\sigma''_0 < 0 \quad (59b)$$

§7. 应力状态的广义不变量

前文所述的諸强度理論,以后三个理論流傳最广,从現代許多实验研究的結果看来,它們的近似性都是很好的。不过在另一面,我們也早已指出,这些理論仍有某些缺陷。第三与第五理論假定材料在簡單拉与压中抗力完全一样,达到同一屈服极限值

时发生塑性变形。第四理论(摩尔)不考虑中间主应力 σ_2 的影响,这些都和某些实验结果相矛盾。所以,近十年来,又出现了一系列的论著,企图推广或改善上述理论,以消除其缺陷。为了能较全面地阐明这些论著以及展望这些研究的前途,这里将对作为表示强度理论的基本数据——即应力张量的不变量,加以广义化。

主应力可以认为是最简单的不变量

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \quad (60)$$

可以对这些符号加以规定,例如(如前文业已采用了的),

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (60a)$$

这些不变量是久期方程式的根

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0, \quad (61)$$

其系数是应力张量分量的齐次对称函数

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (62)$$

若作出这张量的基本行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix},$$

则第一,线性不变量 J_1 等于行列式主(对角线)元素之和:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

第二,平方不变量 J_2 等于主元素子行列式之和:

$$J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix}$$

第三,立方不变量即行列式本身 Δ :

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

若应力张量是按主轴列出来的,其中切应力分量等于零,则所得不变量可以更简单地表示为:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_2 &= \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2, \\ J_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

这种不变量颇为特殊,因为它们都是变元 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的对称函数,即当变元相互交换时而不改变其值。按照代数的术语,它们属于最简单的对称形式(即齐次函数),因为每一变元都是仅以一次形式出现。下面将规定用符号 T_{mn} 来表示不变量的一重要类型,即它们是这样的齐次对称函数,其中变元的出现可以

有任意的幂次;第一个附标 m 指 T 型每一项的幂次;第二附标 n 指每一项含有多少变元(型的式样)。张量(62)的不变量是不超过三次的函数,所以可以建立下列六种 T 型:

$$T_{11} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = J_1; \quad (64')$$

$$\left. \begin{aligned} T_{21} &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2, \\ T_{22} &= \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 = J_2; \end{aligned} \right\} \quad (64'')$$

$$\left. \begin{aligned} T_{31} &= \sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3, \\ T_{32} &= \sigma_2^2\sigma_3 + \sigma_3^2\sigma_1 + \sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3^2 + \sigma_3\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2^2, \\ T_{33} &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = J_3 \end{aligned} \right\} \quad (64''')$$

注意,型 T_{11}, T_{22}, T_{33} 和最简单的不变量 J_1, J_2, J_3 一致,所以,久期方程(61)可以写作如下形式

$$\sigma^3 - T_{11}\sigma^2 + T_{22}\sigma - T_{33} = 0. \quad (65)$$

利用上述 T 型,可以建立为首三个幂次的最一般的对称形式;一般地说,它们是幂次相同的 T 型的任意线性函数;这样就得到三个对称形式:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= T_{11}, \\ \theta_2^2 &= T_{21} + \alpha T_{22}, \\ \theta_3^3 &= T_{31} + \beta T_{32} + \gamma T_{33} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

式中引进的系数 α, β, γ 可以为任意值而不破坏(66)的对称。这些不变量由原始不变量(60)单值地表示出。原始不变量(60)也应由函数(66)单值决定,即不变量(60)与(66)间应存在着相互单值关系;然后函数(66)才是应力张量的最一般的不变量。为了说明此问题,我们还要对(66)补充导自(66)的三个关系式。同时为了使计算简化,先直接从公式(64)求得三个恒等式:

$$\left. \begin{aligned} T_{11}^2 &= T_{21} + 2T_{22}; \quad T_{21}T_{11} = T_{31} + T_{32}; \\ T_{22}T_{11} &= T_{32} + 3T_{33} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

从而就找到

$$\theta_1^2 = T_{21} + 2T_{22}, \quad (68)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_2^2\theta_1 &= T_{21}T_{11} + \alpha T_{22}T_{11} \\ &= T_{31} + (\alpha+1)T_{32} + 3\alpha T_{33}, \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_3^3 &= T_{11}^2T_{11} = (T_{21} + 2T_{22})T_{11} \\ &= T_{21}T_{11} + 2T_{22}T_{11} = T_{31} + 3T_{32} + 6T_{33} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

关系式(68)——(70)附加于(66),将它们写在一起:

$$T_{11} = \theta_1; \quad (71')$$

$$\left. \begin{aligned} T_{21} + 2T_{22} &= \theta_1^2, \\ T_{21} + \alpha T_{22} &= \theta_2^2; \end{aligned} \right\} \quad (71'')$$

$$\left. \begin{aligned} T_{31} + (\alpha+1)T_{32} + 3\alpha T_{33} &= \theta_2^2\theta_1, \\ T_{31} + 3T_{32} + 6T_{33} &= \theta_3^3, \\ T_{31} + \beta T_{32} + \gamma T_{33} &= \theta_3^3 \end{aligned} \right\} \quad (71''')$$

假设不变量 $\theta_1, \theta_2^2, \theta_3^3$ 是给定的;则关系式

(71'), (71''), (71''') 可作为寻找六个 T_{mn} 型的方程式。这组方程只有当其行列式不等于零时才能求解。但其中第一个方程 (71') 已经给出了解:

$$T_{11} = \theta_1$$

随后的一组方程 (71'') 也容易解出, 容易看出其条件是 $\alpha \neq 2$:

$$T_{22} = \frac{1}{\alpha - 2} (\theta_2^2 - \theta_1^2);$$

$$T_{21} = \frac{2}{\alpha - 2} (\alpha \theta_1^2 - 2\theta_2^2)$$

最后看第三组 (71'''), 其行列式容易展开为:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha + 1 & 3\alpha \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & \beta & \gamma \end{vmatrix} = (\alpha - 2)(3\beta - \gamma - 3)$$

这就是说, α, β, γ 可以为任意值, 但要除开满足下列条件的值:

$$\alpha = 2; \quad 3\beta - \gamma = 3, \quad (72)$$

根据已知的 $\theta_1^2, \theta_2^2, \theta_3^2$, 从方程 (71) 找到 T_{mn} , 然后代入 (65), 就得到原始不变量。这样, 原始不变量 (60) 与广义不变量 (66), 在下列条件下, 彼此存在着单值关系

$$\alpha \neq 2; \quad 3\beta - \gamma \neq 3 \quad (73)$$

所以极限面方程既可写成如下形式

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad (74)$$

也可写成如下形式

$$\Phi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0 \quad (75)$$

极限表面 (75) 可以考虑在 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 空间, 也可以在新的 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 空间, 只要这些直角坐标点的值是表示应力状态的。

为确定起见, 这里将参数 α, β, γ 作如下调整。

令 $\alpha = -1$; 则平方不变量 (66) 将为

$$\begin{aligned} \theta_2^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 \\ &= \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \end{aligned} \quad (76)$$

可见除常数乘数以外, 它是和变形功的表达式是一样的 [参看 (22a) 与 (22b)]。

在选取参数 β 与 γ 值时, 可作如下计算, 使 (66) 中立方不变量, 即 θ_3^3 和应力偏量的最简立方不变量相符合:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 - \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \bar{\sigma} \end{pmatrix},$$

其中

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{0k} = \frac{1}{3}T_{11}, \quad (77)$$

即令

$$\theta_3^3 = (\sigma_1 - \bar{\sigma})(\sigma_2 - \bar{\sigma})(\sigma_3 - \bar{\sigma}) \quad (78)$$

从直接计算, 就可证明, 必须采用

$$\beta = -\frac{3}{2}, \quad \gamma = 6 \quad (79)$$

现在, 建立和 (78) 相并行的另一对称形式

$$\theta_3^3 = \frac{1}{3}[(\sigma_1 - \bar{\sigma})^3 + (\sigma_2 - \bar{\sigma})^3 + (\sigma_3 - \bar{\sigma})^3] \quad (80)$$

我们来证明, (78) 与 (80) 彼此是恒等的。为此, 解除两个式子中的括号, 利用 (64) 型的符号, 就得到

$$\theta_3^3 = T_{33} - T_{22}\bar{\sigma} + T_{11}\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^3,$$

$$\theta_3^3 = \frac{1}{3}T_{31} - T_{21}\bar{\sigma} + T_{11}\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^3.$$

两等式逐项相减, 得到

$$\theta_3^3 - \theta_3^3 = T_{33} - \frac{1}{3}T_{31} - (T_{22} - T_{21})\bar{\sigma},$$

或者, 考虑到 (77),

$$\theta_3^3 - \theta_3^3 = T_{33} - \frac{1}{3}T_{31} - \frac{1}{3}(T_{22} - T_{21})T_{11}. \quad (81)$$

利用恒等式 (67), 将右边前两项作变换,

$$T_{33} = \frac{1}{3}T_{11}T_{22} - \frac{1}{3}T_{32},$$

$$\frac{1}{3}T_{31} = \frac{1}{3}T_{11}T_{21} - \frac{1}{3}T_{32}$$

从而有

$$T_{33} - \frac{1}{3}T_{31} = \frac{1}{3}(T_{22} - T_{21})T_{11}$$

将它代入 (81) 右边, 就可看出是等于零, 即有

$$\theta_3^3 = \theta_3^3,$$

此即为所证。据此, 应力张量广义立方不变量采用 (80) 的形式, 便得到

$$\theta_3^3 = \sqrt{\frac{1}{3}[(\sigma_1 - \bar{\sigma})^3 + (\sigma_2 - \bar{\sigma})^3 + (\sigma_3 - \bar{\sigma})^3]} \quad (81')$$

从这里可以作如下有趣的结论: 应力偏量立方不变量 (78) 是应力张量对应于静水应力的平均立方偏差, 静水应力为

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

与此演算相类似, 我们回到应力偏量平方不变量 (76)

$$2\theta_2^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \quad (82)$$

与前相仿, 我们考虑应力张量对静水应力的平均平方偏差 A_2

$$A_2^2 = \frac{1}{3}[(\sigma_1 - \bar{\sigma})^2 + (\sigma_2 - \bar{\sigma})^2 + (\sigma_3 - \bar{\sigma})^2] \quad (83)$$

和前面一样, 解除 (82) 与 (83) 中的括号, 并用类型 (64) 表示其结果

$$\left. \begin{aligned} 2\sigma_2^2 &= 2T_{21} - 2T_{22}, \\ 3\Delta_2^2 &= T_{21} - \frac{2}{3}T_{11}^2 + \frac{1}{3}T_{11}^2 = T_{21} - \frac{1}{3}T_{11}^2; \end{aligned} \right\} (84)$$

但 $T_{11}^2 = T_{21} + 2T_{22}$
将此值代入(84)中第二式,再比较两式就得到

$$2\sigma_2^2 = 9\Delta_2^2;$$

即

$$\sigma_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \Delta_2 \quad (85)$$

这样,不计常数乘数,应力偏量平方不变量表达了应力状态与对应的静水压力的平均平方偏差;此结果首先为诺沃日诺夫(В. В. Новожилов)与波诺马列夫(С. Д. Пономарев)所指出。

总结上面的分析与应力状态广义不变量的选取($\alpha = -1$, $\beta = -\frac{3}{2}$; $\gamma = 6$),可以看出,应力张量完全由下列三项所决定:

1) 平均(静水)应力

$$\frac{1}{3} \sigma_1 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (86)$$

即应力张量线性不变量;

2) 应力状态对静水压力的平均平方偏差

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_2 \\ &= \sqrt{\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \bar{\sigma})^2 + (\sigma_2 - \bar{\sigma})^2 + (\sigma_3 - \bar{\sigma})^2]}, \quad (87) \end{aligned}$$

即应力偏量平方不变量;

3) 平均立方偏差

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \sigma_3 \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \bar{\sigma})^3 + (\sigma_2 - \bar{\sigma})^3 + (\sigma_3 - \bar{\sigma})^3]}, \quad (88) \end{aligned}$$

即应力偏量立方不变量。

重复一遍,应力张量广义平方不变量,不计常数乘数,可以有两种解释:1)作为形状改变功,2)作为应力状态对静水压力的平均平方偏差。除此以外,如所周知,它还准确地表达了八面体切应力;这可从(28)的第二与第三式直接得到,若在式中令(对于八面体平面)

$$l^2 = m^2 = n^2 = \frac{1}{3};$$

则

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= \frac{2}{9} \sigma_2^2 \end{aligned}$$

考虑到(87)就有

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_2 = \Delta_2 \quad (89)$$

在塑性理论中, σ_2 附以其它系数而称之为应力强度或切应力强度。

我们已知道[参看(50)]方程

$$\sigma_2^2 = C_2^2 \quad (90)$$

表达圆柱(米塞斯-亨盖圆柱),可以称之为平方不变量 σ_2^2 的表面。为了使广义立方不变量 σ_3^3 也有较明显的直观印象,也可以作出其表面

$$\sigma_3^3 = C_3^3 \quad (91)$$

很明显,这是三次曲面。为了说明其形状,我们利用公式(45),将方程(91)转换到 x, y, z 坐标系,这样有

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} z \quad (91')$$

于是有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \bar{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y, \\ \sigma_2 - \bar{\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y, \\ \sigma_3 - \bar{\sigma} &= -\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} x \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

为了简化计算,不变量 σ_3^3 采用在(78)中的形式;这样应用(92),就有

$$\begin{aligned} \sigma_3^3 &= (\sigma_1 - \bar{\sigma})(\sigma_2 - \bar{\sigma})(\sigma_3 - \bar{\sigma}) \\ &= \left(\frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \right) \left(-\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} x \right) \\ &= -\frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt{3}} x (3y^2 - x^2), \end{aligned}$$

于是方程(91)得到如下形式

$$\frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt{3}} x (3y^2 - x^2) = C_3^3 \quad (93)$$

式中不含有 z 坐标,即它是三次柱状面,其母线平行于空间对角线,其基准曲线(93)在垂直于空间对角线的平面内,乃是一个三次双曲线。此双曲线有三根渐近线:

$$\begin{aligned} x &= 0; \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}} x; \\ y &= \frac{1}{\sqrt{3}} x, \end{aligned}$$

都通过坐标原点(即三渐近平面相交于空间对角线),并且彼此间的夹角都是 60° , 其形状如图 17 所示。

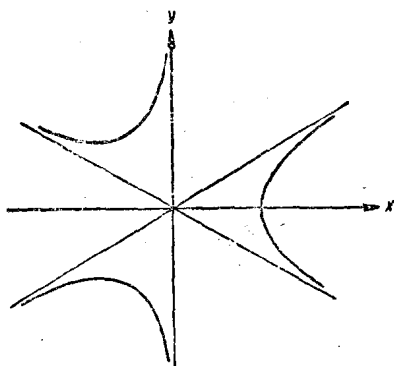


图 17

§ 8. 按上述原則所建立的一些新强度理論

我們回到极限条件的一般形式 (74); 其更一般的形式为 (75), 即用广义不变量来表达。但主要的, 我們將考虑在 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 空間的下列方程

$$\Phi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0^* \quad (94)$$

因为极限条件尚未假定所知仅是这种形式里包含有全部三个不变量。但应当指出, 前文所述諸理論(摩尔理論除外)的极限条件都是含有全部三个不变量 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 所以, 如前已指出, 这些条件可以用广义不变量单值地表示而写成 (94) 形式。

在此意义上, 最简单与最基本的却是胡伯-米塞斯-亨盖的理論, 其极限条件仅含有一个平方不变量 [参看 (23)]:

$$\theta_2^2 = \sigma_0^2 = \text{常数} \quad (95)$$

考虑中間主应力对强度的影响, 从而推广摩尔理論, 某些作者提出了較 (95) 更一般的极限条件, 而包含了前两个广义不变量

$$F(\theta_1, \theta_2) = C \quad (96)$$

提出这样的极限条件的有什列依海尔 (Шлейхер), 巴兰金 [П. П. Баландин (1937)], 雅根 [Ю. И. Ягн (1931)], 米罗柳波夫 [И. Н. Миролюбов (1953)]。这些作者选取二次多项式作为函数 F 的形式

$$\theta_2^2 + A\theta_1^2 + B\theta_1 = C \quad (97)$$

此式含有三个参数 A, B, C , 参数之确定至少須要三种实验, 如拉伸、压缩与扭转。这些理論詳細的叙述, 分析与实验验证結果可参閱《机械制造中的强度計算》[Расчеты на прочность в машиностроении

(1) стр. 298]。在这里只限于簡短的評介。

雅根所提出的极限条件完全是 (97) 的形式, 所以应用这个条件到任一給定的材料, 如上面所指出, 都必須有拉伸、压缩、扭转三种实验。

为了使实验部份只限于最简单的拉伸与压缩, 巴兰金将条件 (97) 加以簡化, 令 $A=0$, 則

$$\theta_2^2 + B\theta_1 = C$$

同样地为了使条件簡化, 米罗柳波夫在 (97) 中保留了三个系数 A, B, C , 但三个系数不都是独立的, 它們用两参数 χ 与 λ 来表示:

$$A = -2\chi^2; \quad B = 4\chi\lambda; \quad C = 2\lambda^2,$$

其中

$$\chi = \frac{1-\nu}{1+\nu}; \quad \nu = \frac{\sigma'_0}{\sigma''_0}$$

参数 χ 与 λ 由实验决定。

这三个理論的研究指出, 它們頗能适应塑性与脆性的材料 ($\sigma'_0 \neq \sigma''_0$)。

回到一般形式的极限条件 (96), 解出 θ_2 :

$$\theta_2 = \varphi(\theta_1), \quad (98)$$

或者为了避免根号:

$$\theta_2^2 = f(\theta_1) \quad (99)$$

容易看出, 它的极限面乃是一个旋轉面, 其軸沿空間对角綫

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

要看到这点很容易, 可将 (99) 代以含参数 t 的两个参数方程:

$$\bar{f}(\theta_1) = t, \quad \theta_2^2 = t \quad (100)$$

第一式表达了垂直于空間对角綫的平面 (不变量 θ_1 的面) [参看 (45)]

$$\theta_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = z\sqrt{3} = \psi(t) \quad (101)$$

它和坐标原点的距离为变量 z (即八面体平面)。第二方程則我們已知为圆柱, 其軸沿空間对角綫 (米塞斯-亨盖柱); 此柱的半径是变数。柱与平面相交为圆 (100), 圆心在空間对角綫上。当参数 t 变动时, 很明显, 这圆所扫描的为—旋轉面, 此即为所証。这个情况很重要, 旋轉面既然完全由它的母綫所决定, 即为平面曲綫所决定, 这就意味着, 极限条件 (96) 或 (98) 可以和在摩尔理論中的表达一样, 用平面上的图形来表示。在 $\theta_1\theta_2\theta_3$ 空間 [参看方程 (75)], 极限条件在 $\theta_1\theta_2$ 平面表为曲綫形式, 或者表为柱面形式, 其母綫平行于 θ_3 軸。

若要将极限条件 (99) 表示在 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 空間內, 只

* 函数 Φ 的形式由采用的强度理論所决定, 或得自經驗。这样, 函数应含有由实验所确定的参数。