

世界地质

水文地质工程地质译文集

长春地质学院
《世界地质》编辑部

水文地质 工程地质译文集

李同斌 王占兴 严寿鹤 主编

长春地质学院《世界地质》编辑部

责任编辑：刘立学 陈继红 李晓华

世界地质

(水文地质工程地质译文集)

编辑者：《世界地质》编辑部
(长春市地质宫)

发行者：长春地质学院图书馆情报部

印刷者：吉林省第二建筑公司印刷厂

1988年2月

吉林省期刊登记证第75号

《边界积分方程法在多孔介质 渗流中的应用》内容简介

该书是由美国的James A. Liggett和Philip合著的。边界积分方程法用于地下水渗流计算是近几年发展起来的一种新方法。该方法对解具有自由面的地下水渗流问题效果非常好。它可以通过减少定解问题的维数,简化计算过程,减少计算工作量。书中全面系统地阐述了边界积分方程法的数学原理和应用。其中包括:①用边界元法解二维的平面和轴对称渗流问题;②用特殊单元处理奇异点问题;③用积分方程法处理非均质各向异性含水层中的渗流问题;④用边界元法处理自由面流问题和非稳定渗流场问题;⑤用边界元和有限单元相结合的方法,处理多相流动问题。其中包括水—气混合流动、溶质对流、弥散等复杂问题。该书简明扼要,通俗易懂。除介绍了各种方法的数学原理外,还对每种方法的使用条件,方法的优缺点,以及改进计算精度的方法进行了详细讨论。书中还附有各种方法适用的计算程序,使用说明和实例。该书可供在水文地质,工程地质,石油地质等方面,从事教学,科研,生产工作的高、中级专业人员使用,亦可做为上述各专业的大学生和研究生的学习参考书。(常吐青)

(限国内发行)

目 录

水 文 地 质

边界积分方程法在多孔介质渗流中的应用

.....James A. Liggett, Philip L-F. Liu (王占兴、李同斌译) (1)

碳酸岩含水层中矿物溶解动力学—水文地质学模型

.....A. Mekcao (曹玉清译) (205)

化学动力学和岩溶地貌发育过程..... William P. White (曹玉清译) (218)

印度哈里亚纳邦含盐地下水的处理..... (谷德操译) (232)

地下水溶质运移的二维流有限解析—数值解法

.....J. C. Hwang等 (高振宇译) (237)

用目标规划法管理地下水长期开采..... Amin Yazdani等 (许天福译) (248)

工 程 地 质

拱坝基础分析—用无张和节理化岩石材料两种模拟方法的比较

.....Alonso, E. E. Carol, I. (刘超臣译) (257)

土的压缩和固结..... 吉国 祥 (张文殊译) (283)

室内固结土小型圆锥触探试验及测压锥试验

.....Almeida, M. S. S. Parry, R. H. G (张喜发译) (339)

边界积分方程法

在多孔介质渗流中的应用

James A. Liggett Philip L-F. Liu

序 言

鉴于渗流区的几何形状和非均匀各向异性介质的复杂性,目前对多孔介质问题没有几个解析解。长期以来,数值解法(如the Theis方法)在地下水计算中起着重要作用。在六十年代,有限差分法得到了广泛的应用(见Remson et al, 1971)。在七十年代,有限单元法开始取代有限差分法作为一种主要方法(如Pinder and Gray, 1977)。有限单元法的优点是:(1)它能较容易地适应渗透区的几何形状,而有限差分法,通常要把几何形状调整的符合网格间距;(2)由于几何的原因,其边界条件更容易应用;(3)它较容易利用变化的网格间距。在详细研究区或水流变化大的地区采用小的单元;在不太重要的地带或水流变化平缓地带可采用大一些的单元;(4)可以较容易地编制通用程序,使之对每一具体的情况,不要改变编码就能适用于任何形状及许多不同的物理状况。有限单元法计算的主要缺点是:(1)网格数据的输入耗费时间(尽管网格产生程序可以本能地缩短这一过程);(2)计算时间长,特别是复杂问题和三维问题的计算;(3)分析者必须确定单元的大小,以便处处满足离散控制微分方程的要求。

最近,在Derby地区的计算中,边界积分方程法(BIEM),作为一个较好的方法而出现。它一方面保留了上述提到的有限单元法的所有优点;而另一方面大大地减少了它的缺点。然而,它不能完全取代有限单元方法。BIEM不能完全处理所有物理的复杂性,在这个意义上说,它并没有有限单元法应用那样广泛。(因为BIEM也可以把边界划分成象单元一样的小区,上面这个断言从字面上来看是不成立的。然而,如果证明了这样的划分是必要的,有限单元法将是一种较好的方法)。在非饱和流的例子里,

BIEM不适用,但可以象第九部分中阐明的那样与有限单元法相结合。在绝大多数的问题中,BIEM可以提供一解,而且即便某些近似也是必要的,这个方法远比靠调整诸如渗透系数,储水系数等物理参数要精确。

在一个重要方面,BIEM要比有限单元法更有效。尽管三维的有限单元解是完全可能的,但剖分网格的工作及需要过多的计算机内存和计算时间过长等,使该方法常常不实用。对比之下,对解三维问题,BIEM只需要二维网格,而且计算时间和内存大大减少。这样较大的问题通常地能够得到解,而不只是在研究的基础上解决或只能解决一次。

BIEM具有把计算区域减少一个维数的优点。与体积法(三维)或面积法(二维)

相对应, BIE M是一个面积法(三维)或线性方法(二维), 它可以把二维问题用线积分解决; 三维问题用面积法解决。在一般情况下, 不需要把整个区离散, 这样可以大大提高效率。然而至少可以精确地求解控制微分方程或微分算子。而把所有的离散只限制在边界上。使用者不必研究导数的离散, 需要的只是选择一些边界元, 以便在边界上把变量精确的离散。这种选择可以根据使用者对定解问题从物理方面的了解, 不是从数学上去认识。

在这类书中通常要介绍该课题的发展历史, 但对BIE M法来说, 介绍发展历史却很困难。因它是一种积分方程法, 其历史应包括从阿贝尔(Abel, 1823)以来的积分方程的发展史。要写这样的历史显然是太多了, 而且BIE M是从积分方程及其数值解法的一般发展历史的哪一点开始形成起来是不清楚的。然而, 很清楚BIE M或与源分布密切相关的技术已经应用好多年了(Prager, 1928)。但是, 没有用数字计算机, 这些方法是无法实用的。因此, 解工程问题的现代BIE M方法应从六十年代算起(如Kupradze, 1965; J. Swon and Symm, 1977)。该方法在七十年代用于解水的线性波动问题(Shaw 1975) 和多孔介质中的渗流问题(Liggett, 1977)。可以预料在八十年代, BIE M将成为地下水计算工程分析的主要工具。

前面几章中, 我们将介绍多孔介质方程, 并建立BIE M的理论及其数值算法。然后把BIE M应用于固定边界的二维问题。第三部分将考虑提高求解精度的专门方法。第四部分将处理渗透性的非均质各向异性问题。第五部分将考虑自由面问题和非稳定流问题。第六、第七部分将把这些解推广到具有轴对称的问题和三维的情况。第八部分考虑两种以上彼此之间具有明显分界面的流体问题。在第九部分中, BIE M将和有限单元法相结合, 使之有效地解决一些问题。在某一地区用这一方法有利; 而在另一地区, 应用另一种方法较好。

在第十部分中, 我们把前面介绍过的几种方法结合在一起, 用来处理复杂的地下水问题。并将给出一些基本的可以只用线性积分解决三维问题的实例。最后介绍其中三个基本程序。这些程序具体说明用一般的方法进行自动计算, 以便使读者能在使用BIE M计算方法时很快有个起点。

Jim Liggett

Phil Liu

1982年2月

一、地下水流的模型方程

在此,我们简单复习一下描述各种类型地下水渗流问题的控制方程和边界条件。用适当的假设和近似方法,把一般方程简化为简单模拟方程。以便在本书的其余部分使用。除一些简单例子的解外,几乎都需要数值法求解。奇特的几何形状和含水层的复杂性,构成了主要困难。对于自由面问题,运动边界条件的非线性和自由面位置是解的一部分的事实,致使问题难于处理。

(一) 质量守恒

在研究关于多孔介质中的渗流问题时,我们通常研究宏观渗流特征,而不研究微观的细节。我们把通过垂直渗流方向的过水断面(孔隙加颗粒骨架)的容积流量,定义为比流量(或渗透速度)。假设把平均流场视为连续介质,并应用质量守恒定律,我们可以导出下列方程(Eggleston, 1970):

$$-n\rho \frac{\partial S}{\partial t} - n\rho S\beta \frac{\partial p}{\partial t} + S\rho\alpha \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho q) \quad (1.1)$$

式中:

q —比流量(或渗透速度); p —孔隙水压强; σ_z —水平面上法向粒间应力; S —饱和度(流体体积/孔隙体积); ρ —流体的密度; n —孔隙度; β —流体的压缩系数(流体弹性模数的倒数); α —颗粒骨架的垂向压缩系数。

正应力与孔隙水压力之间的关系,取决于介质和流体的性质。

对于饱和流, $S=1$, $\partial S/\partial t=0$, (1.1)式可简化为下列形式:

$$-n\rho\beta \frac{\partial p}{\partial t} + \rho\alpha \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho q) \quad (1.2)$$

在一、(八)提出关于非饱和流的简单讨论。为了进一步简化(1.2)式,我们必须考虑介质和流体的性质。

在承压含水层的情况,即透水层被不透水的顶、底板严格的控制着。孔隙水压力变化必然对粒间的垂向应力引起大小相等而方向相反的变化,即: $\sigma_z = -p$ 。因此(1.2)式变成:

$$-\rho(\alpha + n\beta) \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho q) \quad (1.3)$$

我们可引入比储水系数

$$S_e = \rho g(\alpha + n\beta) \quad (1.4)$$

把(1.4)式代入(1.3)式,得:

$$-\frac{1}{g} S_e \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho q) \quad (1.5)$$

即在有自由水面存在的无压含水层的情况下,介质的和流体的压缩性与由于自由面高度的变化而引起的流体体积的变化相比是无足轻重的。因此,可以假设 $\alpha = \beta = |\nabla\rho|$

= 0, 而方程 (1.2) 变为:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (1.6)$$

(二) 达尔西定律

为了完整地描述多孔介质中的渗流, 需要建立孔隙压力, 高度和渗透速度之间的关系。用简单的假设, 可以从纳维埃-斯托克方程 (Dear, 1972; Eagleson, 1970) 导出这种关系。但是, 结果将包含一个以上的未知因子, 这是由于对介质中土粒和孔隙的几何形状的不完善的描述所致。达尔西 (1856年) 经过以饱和水流通过土柱的实验得到了同样的结果。他证实了水头差与土柱的长度成反比。这种一维经验关系式写成三维形式为:

$$\mathbf{q} = -K \nabla \Phi \quad (1.7)$$

式中: K 是渗透系数或水力传导系数, Φ 是测压水头

$$\Phi = \frac{p}{\rho g} + z \quad (1.8)$$

假设流体和土体的压缩性很小, 可以忽略把 (1.7) 式代入 (1.6) 式得:

$$\nabla \cdot (K \Delta \Phi) = 0 \quad (1.9)$$

如果介质是均质的 (即 K 是常数), 那么,

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.10)$$

该式是拉普拉斯方程。这个关系式对承压含水层或无压含水层中稳定流是有效的, 而对无压含水层中的非稳定流也是一个很好的近似表达式。当与适当的边界条件结合时 (1.10) 式给予多孔介质中许多问题以充分的描述。

如果压缩性小而可以忽略的假设, 不够确切, 必须使用 (1.5) 式。把 (1.8) 和 (1.7) 式代入 (1.5) 式, 我们得到:

$$S \cdot \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho k \nabla \Phi) \quad (1.11)$$

尽管介质是可压缩的, 人们通常仍然能把流体的密度假定为常数。于是:

$$S \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla \Phi) \quad (1.12)$$

再加上均匀介质的假设, 则有:

$$S \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = K \nabla^2 \Phi \quad (1.13)$$

这个方程是控制固体中的热流方程。

(三) 源和汇

在区域 (大范围) 地下水流问题中, 人们经常把回灌井或抽水井概化为源和汇。水是从介质中的某一点注入或抽出, 在这种情况下, 质量守恒方程 (1.9), 必须修改为:

$$\nabla \cdot (K \nabla \Phi) = - \sum_{k=1}^{n_p} Q_k \delta(X - X_k) \delta(Y - Y_k) \delta(Z - Z_k) \quad (1.14)$$

式中： n_p 是源或汇的个数； Q_k 是第 k 个点的体积流量（源为正，汇为负）； X_k, Y_k, Z_k 第 k 个源或汇的坐标； $\delta(P)$ 是 δ (delta)函数；当 $P \neq 0$ 时， δ 为零，当 $P = 0$ 时， δ 为1。对均匀介质(1.14)式变成波松方程：

$$\nabla^2 \Phi = \sum_{k=1}^{n_p} \frac{Q_k}{K} \delta(X - X_k) \delta(Y - Y_k) \delta(Z - Z_k) \quad (1.15)$$

该式与(1.10)式相对比类似，(1.13)式变成

$$S_s \frac{\partial \Phi}{\partial t} = K \nabla^2 \Phi + \sum_{k=1}^{n_p} Q_k \delta(X - X_k) \delta(Y - Y_k) \delta(Z - Z_k) \quad (1.16)$$

(四) 非达尔西流

利用达尔西定律(1.7)式假设雷诺数很小(根据孔隙大小)，惯性影响不重要，多数地下水流的雷诺数是在达尔西范围内。可是水力坡度大的渗流或者颗粒粗大的介质(粗砂)中渗流，可能普遍或局部的显示出非达尔西性质。Forchheimer(1901)提出过非线性关系式：

$$\nabla \Phi = -(a + b|q|)q \quad (1.17)$$

式中： a 和 b 是根据介质性质凭经验确定的常数。实际上 a 和 b 严格地说不是常数，而应该是雷诺数的函数(Stark and Volker, 1967)；可是它们似乎在雷诺数变化很大的范围内变化很小。另外，有些作者提出了类似的方程：

$$\nabla \Phi = -c|q|^{m-1}q \quad (1.18)$$

式中 c 和 m 是经验常数。当 $b = 0$ 和 $a = k$ 时，方程(1.17)式可简化为达尔西定律。当 $m = 1$ 和 $c = K$ 时(1.18)式可简化为达尔西定律。

在这两种情况中都定义“有效”渗透系数为：

$$K = 1 / (a + b|p|) \quad (1.19)$$

或

$$K = 1 / (c|q|^{m-1}) \quad (1.20)$$

在这种情况下(1.9)式有效。有人曾提出过许多描述非达尔西流的关系式，并有许多完善的论述，见Bear(1972)著作。

除第九部分的某些例外，本书其余部分的讨论都只限于达尔西流。

(五) 各向异性介质

在叙述达尔西定律(1.7)式时，我们假设比例常数，即渗透系数，在各个方向上都是相同的。比较一般的公式是：

$$q = -K \cdot \nabla \Phi \quad (1.21)$$

式中 K 是九个分量的渗透系数张量。对笛卡儿坐标(X, Y, Z)，(1.21)式变成：

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \Phi / \partial x \\ \partial \Phi / \partial y \\ \partial \Phi / \partial z \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

式中 (U, V, W) 分别是 (X, Y, Z) 方向上的速度分量, 即 $q = (U, V, W)$ 。各向异性介质经常地出现在土成层沉积的地方。土层常常在一个方向上压密比较厉害, 颗粒有很好的定向性或者有缝隙。其中任何一种情况, 都可能产生这种情况: 水在某一方面向上比另外方向上容易流动。

由于 K 矩阵是对称的, K 的九个分量中仅有六个不同的渗透系数, 即 $K_{xy} = K_{yx}$, $K_{xz} = K_{zx}$, 和 $K_{yz} = K_{zy}$ 。由于对所有土层来说, 水流在大小相等方向相反的压力梯度作用下, 在任一方向上的流动是大小相等和方向相反的。对于这种矩阵, 我们能找到一个笛卡儿坐标系, 在该坐标系中, 非对角线元素为零。这个新坐标系的轴, 是和渗透系数矩阵的特征向量的方向一致的 (见 Long, 1961)。我们写成

$$K \cdot A = \lambda A \quad (1.23)$$

式中: λ 是标量, A 是未知向量。方程 (1.23) 与下面联立标量方程是等价的。

$$\begin{aligned} (K_{yx} - \lambda)A_1 + K_{xy}A_2 - K_{xx}A_3 &= 0 \\ K_{yx}A_1 + (K_{yy} - \lambda)A_2 + K_{yz}A_3 &= 0 \\ K_{zx}A_1 + K_{zy}A_2 + (K_{zz} - \lambda)A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

由于 $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ 不是唯一解, 系数矩阵行列式必须为零。即:

$$\begin{vmatrix} K_{xx} - \lambda & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} - \lambda & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.25)$$

方程式 (1.25) 构成渗透系数张量的特征值 λ 的三次方程, 所以我们要求得 λ 的三个值。在解出三个值之后, 我们能看出 A_1, A_2, A_3 的方向与三个特征值一一相对应的三个特征向量。这三个方向构成坐标系。在该坐标系中, 渗透系数张量是对角线 (以前论述的证据相当的长, 由于它不是我们题目的中心, 读者可以查阅关于张量分析的任何一书或者 Long (1961) 的著作)。结果是:

$$K_{i_* j_*} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{i_* j_*} a_{j_* i_*} K_{ij} \quad (1.26)$$

$i_* = 1, 2, 3; j_* = 1, 2, 3$

式中 i, j 取由渗透系数张量的主轴构成的带星号的坐标系中的 x, y, z 值。 $a_{i_* j_*}$ 和 $a_{j_* i_*}$ 是两个坐标系之间夹的余弦 (即: $a_{x_* y_*} = \cos \theta_{x_* y_*}$, 式中 $\theta_{x_* y_*}$ 是 x_* 坐标和 y_* 坐标之间的夹角)。

方程 (1.22) 变成:

$$\begin{pmatrix} u_* \\ v_* \\ w_* \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K_{x_* x_*} & 0 & 0 \\ 0 & K_{y_* y_*} & 0 \\ 0 & 0 & K_{z_* z_*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \Phi / \partial x_* \\ \partial \Phi / \partial y_* \\ \partial \Phi / \partial z_* \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

用 (1.6) 式则有:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_*} \left(K_{x_*x_*} \frac{\partial \Phi}{\partial x_*} \right) + \frac{\partial}{\partial y_*} \left(K_{y_*y_*} \frac{\partial \Phi}{\partial y_*} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z_*} \left(K_{z_*z_*} \frac{\partial \Phi}{\partial z_*} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

如果假设是均匀介质，则

$$K_{x_*x_*} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_*^2} + K_{y_*y_*} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_*^2} + K_{z_*z_*} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_*^2} = 0 \quad (1.29)$$

通过以下变换，该式可以简化成拉普拉斯方程：

$$\begin{aligned} X_{**} &= X_*, \quad Y_{**} = Y_*, \quad (K_{x_*x_*} / K_{y_*y_*})^{1/2} \\ Z_{**} &= Z_*, \quad (K_{x_*x_*} / K_{z_*z_*})^{1/2} \end{aligned} \quad (1.30)$$

于是：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_{**}^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_{**}^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_{**}^2} = 0 \quad (1.31)$$

通过坐标的旋转和延伸，能把各向异性问题作为各向同性问题求解。

(六) 饱和流的边界条件

对绝大多数稳定态地下水问题边界条件可分为两类：(1) 狄利克雷条件：

$$\Phi = \Phi_0 \quad \text{在 } \Omega_1 \text{ 上, } \Omega_1 \in \Omega \quad (1.32)$$

Φ_0 是沿边界 Ω 的一部分 Ω_1 给定的势。

(2) 纽曼条件：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= -q_0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 上} \\ \Omega_2 \in \Omega \end{aligned} \quad (1.33)$$

式中 $\partial \Phi / \partial n$ 是势的方向导数 (即 $\partial \Phi / \partial n = \nabla \Phi \cdot n$, 其中 n 是边界的单位外法向)。另外在无压非稳定流问题中，利用自由面边界条件。图1把通过土坝的渗流作为一个例子。在这个例子中，所有边界条件都必须应用。

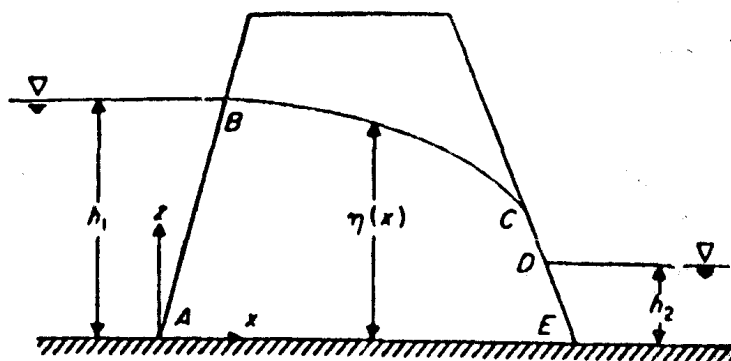


图1 通过土坝的稳定态渗流

1. 固定边界

对于图1.1中的土坝，上游面AB和下游面DE上的势，给定如下：

$$\Phi = h_1 \quad \text{沿AB} \quad (1.34a)$$

$$\Phi = h_2 \quad \text{沿DE} \quad (1.35b)$$

沿渗出面CD，势和垂直高度是相同的。

$$\Phi = Z \quad \text{沿CD} \quad (1.35c)$$

由于假定大气压力为零，沿隔水边界AB法向流量为零。于是：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{沿AE} \quad (1.34d)$$

最后，沿自由面，法向流量也是零，因为对于稳定流自由面是流面。于是：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{沿BC} \quad (1.34e)$$

$$\Phi = \eta \quad \text{沿BC} \quad (1.34f)$$

式中 $z = \eta(x)$ 是自由面高度。如果假设土坝是均匀介质，我们可以把(1.10)式用作渗流的控制方程。方程为(1.34)式提供了必需的边界条件。

2. 非稳定自由面边界条件

对无压的饱和地下水流问题，自由面高度可以用 $z = \eta(x, y, t)$ 表示。可以把自由面看作是定大气压的线（例如如图1.1中的BC线）。尽管这条线的上部存在着毛细带或非饱和带，在不失去一般性的前提下，可把这个常量选作零。根据速度势的定义，(1.8)式，运动自由面边界条件变成：

$$\Phi = \eta \quad \text{在 } z = \eta \text{ 上} \quad (1.35)$$

由于自由面是个实际的面（换句话说，自由面总是由同一流体质点组成的），自由面位置的变化速率一定等于该面上的垂直速度。因此，

$$\frac{D}{Dt} (z - \eta) = - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{q}{n} \cdot \nabla (z - \eta) = 0 \quad \text{在 } z = \eta \text{ 上} \quad (1.36)$$

式中 q/n 表示自由面上流体质点的速度。如果自由面以上土的含水量不是零，在(1.36)式中，应该用有效孔隙度 n_e 代替孔隙度 n 。利用达尔西定律，我们能把(1.36)式重新整理成下列形式：

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{k}{n} \left[\nabla_2 \Phi \cdot \nabla_2 \eta - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] \quad \text{在 } z = \eta \text{ 上} \quad (1.37)$$

式中 ∇_2 表示水平梯度算符。运动自由面边界条件(1.37)显然是非线性条件。而且把两种自由面边界都用在自由面上，自由面的位置事先是未知的。

考虑均匀各向同性介质， $K = \text{常数}$ 。我们能够引进下列无量纲的变量：

$$t^* = tk/nL \quad (\Phi^*, \eta^*, X^*, Y^*, Z^*) = (\Phi, \eta, X, Y, Z)/L \quad (1.38)$$

式中 L 是特征比例长度。带星号的量都是无量纲的量。为了简便在本节的其余部分

将星号全部去掉。把(1.38)代入(1.35)和(1.37)式,结果得无量纲自由面边界条件。

$$\Phi = \eta \quad \text{在 } z = \eta \text{ 上} \quad (1.39a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \nabla_2 \Phi \cdot \nabla_2 \eta - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.39b)$$

自由面的单位法向量可定义为:

$$\mathbf{n} = \frac{\Delta(z - \eta)}{|\Delta(z - \eta)|} \quad (1.40)$$

我们还可把自由面上势的法向导数定义如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = (|\nabla(z - \eta)|)^{-1} \nabla(z - \eta) \cdot \nabla \Phi \\ &= (1 + |\nabla_2 \eta|^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \nabla_2 \eta \cdot \nabla_2 \Phi \right) \end{aligned} \quad (1.41)$$

式中已经利用(1.40)式。把(1.41)代入自由面边界条件(1.39)式后,我们得:

$$\Phi = \eta \quad \text{在 } z = \eta \text{ 上} \quad (1.42a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -(1 + |\nabla_2 \eta|^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (1.42b)$$

当受垂向补给影响自由面移动的情况下,运动自由面边界条件(1.42b)应改为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -(1 + |\nabla_2 \eta|^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} + w \\ &\quad \text{在 } z = \eta \text{ 上} \end{aligned} \quad (1.43)$$

式中 w 表示单位面积上无量纲的(垂向)补给强度。它一般是水平坐标和时间的函数。补给强度 w (永远是正的)引起自由面升高。

(七) 承压和非承压含水层中的二维(裘布依)流

在处理水平方向延伸量度远大于含水层厚度的大规模(区域)地下水流问题时,根

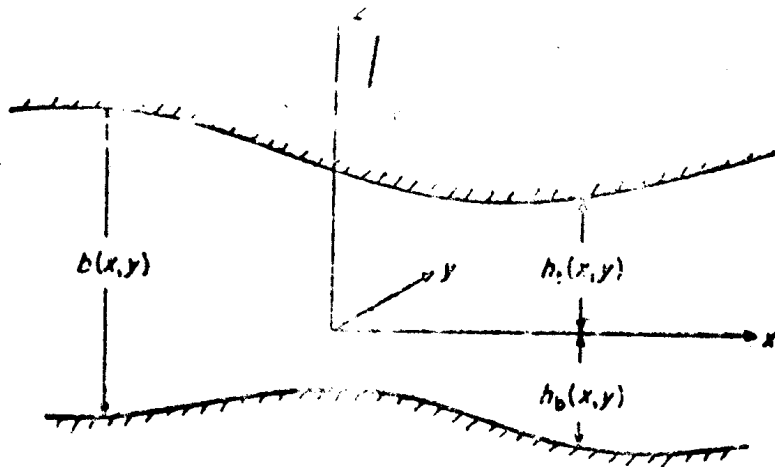


图 2 承压含水层渗流

据垂向流与水平流相比很小的假设，可以简化控制方程。结果是该方程的维数减少，因此减少求解的计算工作量。

1. 承压含水层

在被上、下隔水层限制的承压含水层的情况下（如图2所示）， $z = h_1$ ， $z = h_2$ ，在垂直方向上对连续方程（1.6）积分结果得：

$$\int_{h_2}^{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{h_2}^{h_1} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{h_2}^{h_1} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (1.44)$$

利用莱布尼兹规则，把（1.44）写成：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_2}^{h_1} u dz - u(x, y, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + u(x, y, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_2}^{h_1} v dz - v(x, y, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} + v(x, y, h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} \\ & + w(x, y, h_2) - w(x, y, h_1) = 0 \end{aligned} \quad (1.45)$$

式中 $u(x, y, h_1)$ 表明， u 要在上界面计算穿过上界面没有水流的条件是，

$$u(x, y, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + v(x, y, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} = w(x, y, h_1) \quad (1.46)$$

对于下界面用类似的条件。于是方程（1.45）在没有近似情况下，简化为，

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.47)$$

式中：

$$u = \int_{h_2}^{h_1} u dz, \quad v = \int_{h_2}^{h_1} v dz \quad (1.48)$$

\bar{u} 是乘以含水层厚度 $b(x, y) = h_1 - h_2$ 的垂直平均速度。

可用类似方法对达尔西定律（1.7）式积分得：

$$\int_{h_2}^{h_1} u dz = -K \int_{h_2}^{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dz \quad (1.49a)$$

$$\int_{h_2}^{h_1} v dz = -K \int_{h_2}^{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dz \quad (1.49b)$$

我们现在取近似值，假定水平势的梯度不是垂直坐标的函数，则

$$\bar{u} = -K(h_1 - h_2) \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -Kb \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1.50a)$$

$$\bar{v} = -K(h_1 - h_2) \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -Kb \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1.50b)$$

通过把（1.50a）式与（1.49a）式的更精确积分比较，能够清楚的看出（1.50）的

近似式为：

$$u = -K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_1}{h_b} \Phi_{dz} - \Phi(x, y, h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + \Phi(x, y, h_b) \frac{\partial h_b}{\partial x} \right) \right] \quad (1.51)$$

这种近似是 Φ 在垂向上不变，以及含水层厚度没有突变。

渗透系数和含水层厚度的乘积，叫做导水系数：

$$T = Kb \quad (1.52)$$

利用(1.50)式和(1.47)式得：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.53)$$

该方程与(1.9)式相似。常导水系数的假设产生拉普拉斯方程。另一方面，导水系数可以有方向性改变。这种情况是可以利用类似于在(五)中给出的方法。

2. 非承压含水层

对非承压含水层，把 x -坐标选在含水层底板(图3)是方便的。虽然这个坐标系

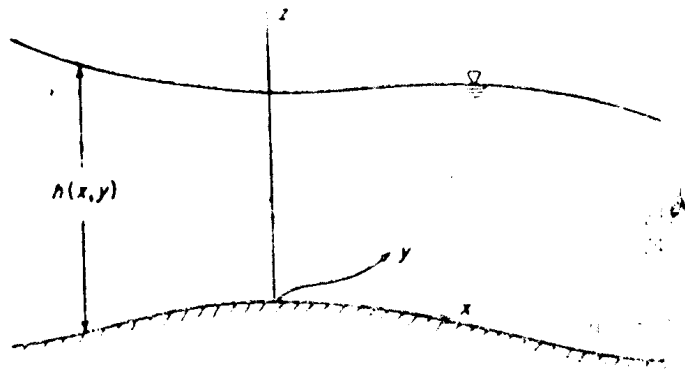


图3 非承压含水层中的渗流

不是笛卡儿坐标，我们能够假设底板的垂向变化很小，结果与上面的假设相一致。同样可以近似的认为 Φ 在垂向上没有变化。这意味着我们可以认为 Φ 等于流体的深度，即：

$$\Phi(x, y) = h(x, y) \quad (1.54)$$

根据(1.52)和(1.53)式得：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad (1.55)$$

如果 K 相对于 x, y 是个常数，那么

$$\frac{\partial^2 \Phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^2}{\partial y^2} = 0 \quad (1.56)$$

因此控制方程仍然是拉普拉斯方程，但是要用势的平方代替势。

(1.56)的边界条件是(六)中的条件，只是不用自由面边界条件，因为我们已经取消了垂向坐标。

3. 越流含水层

上面的近似仍是有效的，含水层中，经常出现限制层不是不完全透水的（弱透水层），相反，它们“渗漏”或允许一些水流入或流出含水层。我们假定穿越流量与通过限制层的势（水头）差成正比（图4）：

$$q_1 = \frac{K_1}{b_1} (\Phi_1 - \Phi) \quad (15.7)$$

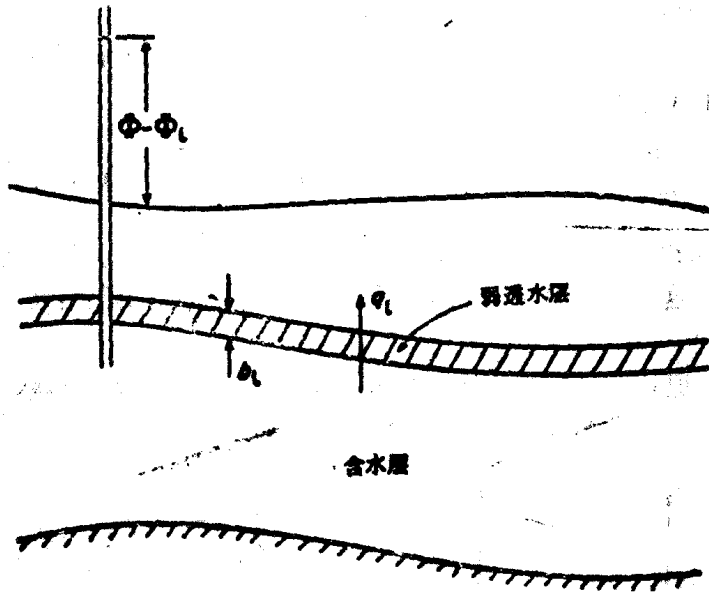


图 4 越流含水层

式中 K_1 是弱透水层的渗透系数， Φ_1 是弱透水层外面的水头， b_1 是弱透水层的厚度。连续方程(1.47)变成：

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{K_1}{b_1} (\Phi_1 - \Phi) \quad (1.58)$$

而(1.53)变成：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \left(T \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{K_1}{b_1} (\Phi_1 - \Phi) = 0 \quad (1.59)$$

我们现在定义：

$$\tilde{\Phi} = T - \Phi_1 \quad (1.60)$$

并假设 Φ_1 和 T 是常数，得：

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} - \frac{K_1}{b_1 T} \tilde{\Phi} = 0 \quad (1.60)$$

用和(三)中相同的方法能加上代表井的源和汇。