高等学校試用教材

解析几何与代数

上 册

（解析几何）

施孔成编

高等教育出版社

高等学校試用教材

解析几何与代数

上册

(解析几何)

施孔成编

高等教育出版社

本書是“解析几何与代数”的上册——解析几何部份

本書是按照教育部 1955 年編訂的物理系一年級“解析几何与代数”課程教学大綱的解析几何部份編写的，可作为师范学院物理系的試用教材。

本書共有十一章，第一章講行列式的初步理論，其余十章講平面解析几何与空間解析几何，各占五章。

解析几何与代数

上册

施孔成編

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　　新华書店总經售

統一書号13010·379　開本 850×1168 1/32　印張 8 11/16　字数218,000　印數 0001—5,500

1957年12月第1版　1957年12月北京第1次印刷　定價（8）¥ 1.00

序　言

解析几何为笛卡尔（Descartes）所创始。他首先利用“数”来决定“点”的位置，因而建立了坐标方法。

解析几何是用代数的方法来研究几何圖形的性質的；它是学習分析的重要基础。因此解析几何不只是数学、物理两系的必修課程，也是学習工程的人所必需的。

本書是按照教育部1955年編訂的物理系一年級“解析几何与代数”課程教学大綱的解析几何部分編写的。全書共分十一章，除第一章是行列式的初步理論外，其余十章，解析几何的平面与空間部分各占五章。內容方面，尽量吸取苏联教材的优点，并参考其他書籍，力求适合我国高中畢業生的数学水平，使初学者易于接受。

在本書第六章的二次曲綫通論里，一般二次方程的化簡，仍然以利用坐标变换为主。不过利用不变式化簡二次方程（特别是有心二次曲綫方程）的方法，也还是有它的特别方便的地方。并且，不变式的性質，也相当重要。因此，把利用不变式化簡的方法添入（附有※号），任課教师可以估計所用学时决定取舍。

在十一章里，关于二次曲面的研究，按照大綱精神是从它們的标准方程出發。至于一般二次方程的化簡方法，并未談到。但为了系統起見，在这章开始时，首先說明这些标准方程是一般二次方程化簡的結果。所以把空間的坐标軸旋轉一节，放在最后，以备参考（附有※号）。

关于每章習題的选擇，力求适合各章內容。通过習題演算，一方面，希望学生能巩固理論并熟練技巧；另一方面，希望能培养其

独立思考的能力。

在編写前，曾几次向参加討論大綱的孙澤瀛、徐春霆二同志請教。关于內容結構方面，曾在几何教研組中几次討論，在編写过程中，又參照各方面的意見做了修改。不过錯誤之处在所不免，希望讀者同志們多提宝貴意見。

梅 孔 成

序于华东师范大学1957年4月

目 录

第一篇 平面解析几何学

第一章 行列式理論初步

第二章 坐标法

第三章 曲綫与方程

第四章 直綫

第五章 圓錐曲綫(二次曲綫)

第六章 坐标变換——二次曲綫通論

第二篇 空間解析几何学

第七章 空間的坐标法

第八章 曲面方程与曲綫方程

第九章 平面

第十章 空間直綫

第十一章 二次曲面的基础理論

第一篇 平面解析几何学

第一章 行列式理論初步

行列式的理論，在代数学中，占着很重要的地位。它的应用范圍也很广，与几何学的关系尤为密切。在解析几何学中，如求三角形的面积，以及三点共綫，三綫共点等問題，在利用了行列式之后，就非常方便。关于一般行列式理論將在本課程(解析几何与代数)的代数部分里进行研究，这里不予涉及。本章仅就它应用在解析几何方面的初步理論加以介紹；因此，从綫性方程組的求解，引进二阶、三阶行列式的一些基本性質。

§1. 二阶行列式

設有二元綫性方程組：

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=c_1\cdots\cdots(\mathrm{i})\\ a_2x+b_2y=c_2\cdots\cdots(\mathrm{ii})\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

在中学教科書中，用消元法求解。以 b_2 乘(i)式，b_1 乘(ii)式，然后相减，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1$$

同理，得

$$\left.(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1\right\}\tag{2}$$

如果 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$，那么，方程組(1)有唯一的解：

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\ y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\tag{2'}$$

上式中的分子分母为形式相同的代数式。为了便于記忆起見，我們引进一种新的記号来代表它們。首先，用記号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

代表$(a_1b_2-a_2b_1)$，亦卽

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1$$

并且称它为 a_1、a_2、b_1、b_2 四个元素所組成的二阶行列式。这个行列式有兩个行和兩个列。橫排的元素 a_1, b_1 組成第一行，a_2, b_2 組成第二行，縱排的元素 a_1, a_2 組成第一列、b_1, b_2 組成第二列。兩元素 a_1, b_2 組成行列式的主对角綫（就是从它的左上角到右下角的对角綫）；兩元素 a_2, b_1 組成行列式的副对角綫（就是从它的左下角到右上角的对角綫）。它的展开法則，可以說明如下：

二阶行列式等于它的主对角綫上兩元素的乘积减去副对角綫上兩元素的乘积。

根据以上的法則，我們可以导出二阶行列式的几个基本性質：

i) 行列式內，行与列互換，則其値不变，如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix};$$

ii)行列式內，兩行对調（或兩列对調），則它的符号改变，如

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};$$

iii)行列式內，如果有一行（或一列）的元素全为零时，則其値显然为零。

iv)行列式內，如果兩行（或兩列）相同，則其値为零，如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

v)行列式內，如果某行（或某列）的元素有公因子时，这个公因子可以提到行列式之外。如

$$\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

以上几种性質，只須把等号兩端的行列式展开，卽可証明。

采用了行列式記号以后，方程組(1)的解，可写成：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

观察上式，x 和 y 的値，都是由分式表示，兩分式的分母是相同的。在表示 x 的分式中，只要把分母的第一列(卽 x 的系数) a_1, a_2 換为常数項 c_1, c_2 就得到它的分子。同样，在表示 y 的分式中，只要把它分母的第二列(卽 y 的系数) b_1, b_2 換为 c_1, c_2 就得到它的分子。这个公分母称为方程組(1)的行列式。

关于方程組(1)的解，有下列三种不同的情况：

i) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 时，方程組(1)有唯一的解。

ii) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 时，則从方程組(2)，显見矛盾，所以方程組(1)無解。

iii) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$ 时，

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

这时方程組(1)的兩个方程实际上是一个方程，所以它有無限多的解。

例 1. 解
$$\left.\begin{aligned} 2x-y-1&=0 \\ 3x+y&=9 \end{aligned}\right\}$$

[解] 因为 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0$，所以这个方程組有唯一的解，把

方程組写成：

$$\left.\begin{array}{l}2x-y=1\\3x+y=9\end{array}\right\}.$$

利用公式(2′)，得

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\9 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{10}{5}=2,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{15}{5}=3.$$

例 2. 解 $\left.\begin{array}{l}3x-2y=5\\6x-4y=7\end{array}\right\}.$

[解] $\begin{vmatrix}3 & -2\\6 & -4\end{vmatrix}=0$, 但 $\begin{vmatrix}5 & -2\\7 & -4\end{vmatrix}\neq 0$,

所以方程組無解。

如果，在方程組(1)里，$c_1=c_2=0$，那末，方程組(1)变为：

$$\left.\begin{array}{l}a_1x+b_1y=0\\a_2x+b_2y=0\end{array}\right\}. \tag{1'}$$

組(1′)称为二元綫性齐次方程組。当 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ 时，它有唯一的解，即

$$x=0,\quad y=0$$

称为零解。如果 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$，这时

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}.$$

方程組(1′)的兩方程，实际上是一个方程，因而，它除有零解外，还可以有無限多的解。

§2. 含有兩个三元綫性齐次方程的方程組

設有方程組：

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

首先假定在 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$

中,至少有一个不等于零. 如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, 把(3)式改写为

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=-c_1z \\ a_2x+b_2y=-c_2z \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

解出 x, y 为:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}z,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}z.$$

上式中, z 为任意的. 令 $k=\dfrac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$,

则 $$x=k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad y=k\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad z=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

k 的値是任意的, 因此方程組(3)有無限多的解, 但其每一組解 x, y, z 与三个行列式: $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 都成比例,即

$$x:y:z=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

其次,如果三个行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$ 全等于零,

这时，$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$. 所以，方程組(3)的两个方程实际上是一个方程。假設 $a_1\neq0$, 解出：$x=-\frac{b_1y-c_1z}{a_1}$. 此处，y, z 都是任意的，因而方程組(3)有無限多的解

例． 求方程組：

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-4z=0 \\ x-\ y+5z=0 \end{aligned}\right\}$$

的所有解。

［解］　从公式(4)得

$$x=k\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix},\quad y=k\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix},\quad z=k\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};$$

或

$$x=11k,\quad y=-14k,\quad z=-5k. \tag{i}$$

此处，k 是任意数；(i)式表示方程組的所有解。

§3. 三阶行列式

設有三元綫性齐次方程組：

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i}) \\ a_2x+b_2y+c_2z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii}) \\ a_3x+b_3y+c_3z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iii}) \end{aligned}\right\}; \tag{5}$$

这方程組显然有一組零解：$x=0, y=0, z=0$。現在，發生这样一个問題：就是方程組(5)除了零解以外，是不是还有其他的解呢？为了解答这問題，我們进行討論如下：

假設 $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}$ 不全为零。

解第二，第三兩方程：

$$a_2x+b_2y+c_2z=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0$$

得 $$x=k\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad y=k\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix},\quad z=k\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad (6)$$

这里，k 是任意数($k\neq 0$，因为如果 $k=0$，將得組(5)的零解了)。

如果(6)式里的 x, y, z 滿足第一方程 $a_1x+b_1y+c_1z=0$

那末，$$k\left\{a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right\}=0$$

因为 $k\neq 0$ 所以

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (7)$$

或 $$a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+b_1c_2a_3-b_1c_3a_2+c_1a_2b_3-c_1a_3b_2=0. \qquad (7')$$

由于以上的結果，我們知道：当方程組(5)的系数 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3、c_1、c_2、c_3 滿足关系式(7)或(7')的时候，它可以有無限多組的非零解(注意：关于以上齐次方程組的詳細討論，參看§8)。

观察等式(7)或(7')的左边。它是一个关于 a_i, b_i, c_i ($i=1,2,3$)的三次齐式。具有这样形式的齐式，非常重要。我們現在用一种新記号：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 來代表它，就是令，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=$$
$$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+b_1c_2a_3-b_1c_3a_2+c_1a_2b_3-c_1a_3b_2, \qquad (8)$$

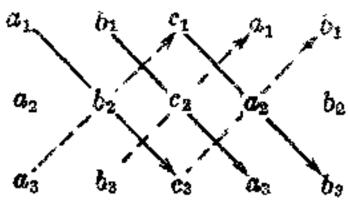
并且称它为三阶行列式。a_1、a_2、a_3、b_1、b_2、b_3、c_1、c_2、c_3 称为它的九个元素。

在行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 中，有三个行，三个列，以文字 a, b, c 順序表示

第 1, 2, 3 列的元素；以下标 1, 2, 3 順序表示第 1, 2, 3 行的元素。例如 a_1, b_1, c_1 組成第一行，b_1, b_2, b_3 組成第二列。余类推。又元素 a_1, b_2, c_3 組成行列式的主对角綫；元素 a_3, b_2, c_1 組成行列式的副对角綫。[参看 §1]在等式(8)右边六項的代数和，称为三阶行列式的展开式。

关于三阶行列式中，各項的結構，自有其一定的規律。为便于記忆起見，我們先介紹沙洛氏(Sarrus)对角綫展开法。

在行列式原有三列之后，再添写第一、第二兩列如下表：



(9)

在原行列式主对角綫上三元素的乘积，以及平行于它的另兩条对角綫上三元素的乘积均取正号(表上用实綫画出)。至于在副对角綫上三元素的乘积以及平行于它的另兩条对角綫上三元素的乘积均取負号(表上用虛綫画出)。如是而得的六項代数和，就是行列式(8)的展开式。

§4. 三阶行列式的几个主要性質

(i) 行列式中，如果把它的行与列互换，那末，行列式的值不变。如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

(ii) 行列式中，如果把它的某兩行(或某兩列)对調，那末，行列式的符号須改变。如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(iii) 在行列式中，如果某一行(或某一列)的元素全为零，那末，行列式的值等于零

(iv) 行列式中，如果某一行(或某一列)的元素有一个公因子时，这公因子可以提到行列式記号之外

$$\begin{vmatrix} a_1 & mb_1 & c_1 \\ a_2 & mb_2 & c_2 \\ a_3 & mb_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

以上(i), (ii), (iii), (iv)几种性質，用对角綫展开法即可証明。

(V) 在行列式中，如果有兩行(或兩列)的元素完全相同，則其値必等于零。

証 令 $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

如果把其第一列与第二列对調，則仍为 Δ_1，但从性質(ii)，应改变其符号

即 $\Delta_1 = -\Delta_1$ 所以 $\Delta_1 = 0$.

§5. 三阶行列式的余子式及代数余子式

令 $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

在这行列式中，任取一元素，把这元素所在的行及其所在的列都划掉，那末，留剩下来的二阶行列式，称为对应于这元素的“Δ”的余子式。或簡称为这元素的余子式，例如，元素 a_1 的余子式为