

館
4
閱
覽

40661

基本馆藏

高等学校試用教材

解析几何与代数

上册

(解析几何)

施孔成編

高等教育出版社

3192

0815

71

140661

高等学校試用教材



解析几何与代数

上册

(解析几何)

施孔成編

高等教育出版社

本書是“解析几何与代数”的上册——解析几何部份

本書是按照教育部 1955 年編訂的物理系一年級“解析几何与代数”課程教学大綱的解析几何部份編写的,可作为师范学院物理系的試用教材。

本書共有十一章,第一章講行列式的初步理論,其余十章講平面解析几何与空間解析几何,各占五章。

解 析 几 何 与 代 数

上 册

施 孔 成 編

高等教育出版社出版 北京琉璃廠 170 号

(北京市書刊出版業營業許可證出字第 054 号)

京华印書局印刷 新华書店总經售

統一書号 13010·379 開本 850×1168¹/₃₂ 印張 8¹¹/₁₆ 字數 218,000 印數 0001—5,500
1957 年 12 月第 1 版 1957 年 12 月北京第 1 次印刷 定價 (8) 1.00

序 言

解析几何为笛卡尔 (Descartes) 所创始。他首先利用“数”来决定“点”的位置，因而建立了坐标法。

解析几何是用代数的方法来研究几何图形的性质的；它是学习分析的重要基础。因此解析几何不仅是数学、物理两系的必修课程，也是学习工程的人所必需的。

本书是按照教育部 1965 年编订的物理系一年级“解析几何与代数”课程教学大纲的解析几何部分编写的。全书共分十一章，除第一章是行列式的初步理论外，其余十章——解析几何的平面与空间部分各占五章。内容方面，尽量吸取苏联教材的优点，并参考其他书籍，力求适合我国高中毕业生的数学水平，使初学者易于接受。

在本书第六章的二次曲线通论里，一般二次方程的化简，仍然以利用坐标变换为主。不过利用不变式化简二次方程（特别是有心二次曲线方程）的方法，也还是有它的特别方便的地方。并且，不变式的性质，也相当重要。因此，把利用不变式化简的方法添入（附有※号），任课教师可以估计所用学时决定取舍。

在十一章里，关于二次曲面的研究，按照大纲精神是从它们的标准方程出发。至于一般二次方程的化简方法，并未谈到。但为了系统起见，在这章开始时，首先说明这些标准方程是一般二次方程化简的结果。所以把空间的坐标轴旋转一节，放在最后，以备参考（附有※号）。

关于每章习题的选编，力求适合各章内容。通过习题演算，一方面，希望学生能巩固理论并熟练技巧。另一方面，希望能培养其

独立思考的能力。

在編写前,曾几次向参加討論大綱的孙澤法、徐春霆二同志請教。关于內容結構方面,曾在几何教研組中几次討論,在編写过程中,又參照各方面的意見做了修改。不过錯誤之处在所不免;希望讀者同志們多提宝貴意見。

施 孔 成

序于华东师范大学1957年4月

目 录

序言.....	vii
---------	-----

第一篇 平面解析几何学

第一章 行列式理論初步

§ 1. 二阶行列式.....	1	余子式.....	9
§ 2. 含有两个三元线性齐次方程 的方程组.....	4	§ 6. 三阶行列式的应用.....	12
§ 3. 三阶行列式.....	6	§ 7. 三元线性非齐次方程组的一 般研究.....	15
§ 4. 三阶行列式的几个主要性质.....	8	§ 8. 三元线性齐次方程组.....	21
§ 5. 三阶行列式的余子式及代数 余式.....	11	习题.....	22

第二章 坐标法

§ 9. 有向直线与有向线段.....	24	§ 17. 两有向直线的交角.....	36
§ 10. 有向线段的加法.....	25	§ 18. 点及线段的射影.....	37
§ 11. 直线上点的坐标.....	27	§ 19. 折线的射影.....	40
§ 12. 直线上线段的定比分割.....	28	§ 20. 三角形的面积.....	41
§ 13. 平面上点的坐标.....	29	§ 21. 极坐标.....	44
§ 14. 两点间的距离.....	32	§ 22. 极坐标与笛卡儿坐标的变换.....	44
§ 15. 平面上线段的定比分割.....	33	习题.....	47
§ 16. 质量中心.....	35		

第三章 曲线与方程

§ 23. 曲线的方程.....	49	§ 27. 曲线的极坐标方程.....	55
§ 24. 方程的几何意义.....	49	§ 28. 曲线的参数方程.....	59
§ 25. 两个基本问题.....	51	习题.....	62
§ 26. 两曲线的交点.....	54		

第四章 直线

§ 29. 直线的斜截式方程.....	64	方程.....	72
§ 30. 直线的一般式方程.....	65	§ 35. 点到直线的距离.....	73
§ 31. 直线的点斜式方程.....	66	§ 37. 两直线的交角.....	75
§ 32. 直线的截距式方程.....	67	§ 38. 两直线的平行条件与垂直的 条件.....	76
§ 33. 直线的两点式方程.....	68	§ 39. 两直线的相互位置.....	78
§ 34. 直线的法式方程.....	70	§ 40. 通过一定点的线束.....	79
§ 35. 化直线的一般式方程为法式 方程.....	72		

§41. 通过兩直綫交点的綫束	80	§44. 直綫的極坐標方程	86
§42. 三直綫共点的条件	82	習題	86
§43. 直綫的参数方程	81		

第五章 圓錐曲綫(二次曲綫)

§45. 圓錐曲綫的發生和类别	89	§58. 圓錐曲綫的直徑	109
§46. 圓	90	§59. 圓錐曲綫的切綫与法綫	110
§47. 点关于圓的幂	92	§60. 已知斜率 k 的切綫方程	114
§48. 根軸	93	§61. 橢圓的切綫及法綫的性质	116
§49. 橢圓	95	§62. 橢圓的切綫及法綫的性质在 物理学上的应用	118
§50. 橢圓的形狀	97	§63. 抛物綫的切綫及法綫性质	119
§51. 双曲綫	98	§64. 抛物綫的切綫及法綫性质在 物理学上的应用	120
§52. 双曲綫的形狀	99	§65. 圓錐曲綫的直徑、共轭直徑	121
§53. 抛物綫	103	§66. 圓錐曲綫的極坐標方程	126
§54. 抛物綫的形狀	104	習題	129
§55. 橢圓的离心率和准綫	105		
§56. 双曲綫的离心率和准綫	106		
§57. 抛物綫的离心率和准綫	108		

第六章 坐标变换 - 二次曲綫通論

§67. 坐标变换	135	§74. 有心二次曲綫方程的化簡	148
§68. 坐标变换的应用	136	§76. 有心二次曲綫的作圖	150
§69. 一般二次方程	140	§77. 無心二次曲綫方程的化簡	153
§70. 代数方程的次数	141	§78. 無心二次曲綫的作圖	155
§71. 二次曲綫的初步分类	142	§79. 二次曲綫的分类与总结	158
§72. 二次曲綫的中心	143	§80. 利用不变式化簡有心二次 曲綫方程	158
§73. 二次方程的两个不变式	145	習題	161
§74. 利用坐标变换化簡一般二次 方程	147		

第二篇 空間解析几何学

第七章 空間的坐标法

§81. 空間内点的直角坐标	163	向数	171
§82. 两个基本問題	166	§86. 兩直綫的夹角	173
§83. 空間直角坐标軸的平移	168	§87. 圆柱坐标与圆球坐标	175
§84. 空間綫段的射影	169	習題	178
§85. 直綫的方向角, 方向余弦, 方			

第八章 曲面方程与曲綫方程

§88. 曲面的方程	180	§90. 柱面	183
§89. 球面	181	§91. 旋轉曲面	184

§92. 空間曲綫的方程	186	習題	182
§93. 三曲面的交点	190		
第九章 平面			
§94. 平面的法式方程	193	§101. 两平面的夾角	202
§95. 一般一次方程	194	§102. 两平面的夾角平分面	205
§96. 一般一次方程的討論	196	§103. 平面族	206
§97. 平面的截距式方程	197	§104. 平面族方程的应用	208
§98. 平面的三点式方程	198	§105. 三平面的交点	209
§99. 空間四点共面的条件	200	習題	212
§100. 点与平面的距离	201		

第十章 空間直綫

§106. 直綫的一般式方程	215	§112. 从兩直綫方程求其夾角	222
§107. 直綫的射影式方程	215	§113. 直綫与平面的夾角	224
§108. 直綫的标准式方程	217	§114. 直綫与平面的交点	225
§109. 直綫的兩点式方程	219	§115. 兩直綫共面的条件	227
§110. 从直綫的一般式方程求方 向数	220	§116. 兩直綫的交点	230
§111. 直綫的一般式与标准式方程 的交換	220	§117. 点到直綫的距离	231
		習題	223

第十一章 二次曲面的基础理論

§118. 一般二次方程	237	§126. 变态的二次曲面	259
§119. 橢圓面	238	§127. 二次曲面的分类	260
§120. 單叶双曲面	241	§128. 直綫曲面	261
§121. 双叶双曲面	245	§129. 二次曲面(常态)的切面与 法綫	268
§122. 二次錐面	248	§130. 空間直角坐标軸的旋轉	268
§123. 橢圓抛物面	251	習題	269
§124. 双曲抛物面	252		
§125. 二次柱面	256		

第一篇 平面解析几何学

第一章 行列式理論初步

行列式的理論，在代数学中，占着很重要的地位。它的应用范围也很广，与几何学的关系尤为密切。在解析几何学中，如求三角形的面积，以及三点共线，三线共点等问题，在利用了行列式之后，就非常方便。关于一般行列式理論將在本課程(解析几何与代数)的代数部分里进行研究，这里不予涉及。本章仅就它应用在解析几何方面的初步理論加以介绍；因此，从线性方程组的求解，引进二阶、三阶行列式的一些基本性質。

§ 1. 二阶行列式

設有二元线性方程組：

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \dots \dots (i) \\ a_2x + b_2y &= c_2, \dots \dots (ii) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

在中学教科書中，用消元法求解。以 b_2 乘 (i) 式， b_1 乘 (ii) 式，然后相减，得

$$\left. \begin{aligned} (a_1b_2 - a_2b_1)x &= c_1b_2 - c_2b_1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y &= a_1c_2 - a_2c_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

如果 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ，那么，方程組 (1) 有唯一的解：

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (2')$$

上式中的分子分母为形式相同的代数式。为了便于记忆起见，我們引进一种新的記号来代表它們。首先，用記号

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

代表 $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$, 亦即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

并且称它为 a_1, a_2, b_1, b_2 四个元素所组成的二阶行列式。这个行列式有两个行和两个列。横排的元素 a_1, b_1 组成第一行, a_2, b_2 组成第二行, 纵排的元素 a_1, a_2 组成第一列, b_1, b_2 组成第二列。两元素 a_1, b_2 组成行列式的主对角线 (就是从它的左上角到右下角的对角线); 两元素 a_2, b_1 组成行列式的副对角线 (就是从它的左下角到右上角的对角线)。它的展开法则, 可以说明如下:

二阶行列式等于它的主对角线上两元素的乘积减去副对角线上两元素的乘积。

根据以上的法则, 我们可以导出二阶行列式的几个基本性质:

i) 行列式内, 行与列互换, 则其值不变, 如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix};$$

ii) 行列式内, 两行对调 (或两列对调), 则它的符号改变, 如

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};$$

iii) 行列式内, 如果有一行 (或一列) 的元素全为零时, 则其值显然为零。

iv) 行列式内, 如果两行 (或两列) 相同, 则其值为零, 如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

v) 行列式内, 如果某行 (或某列) 的元素有公因子时, 这个因子可以提到行列式之外。如

$$\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

以上几种性質,只須把等号兩端的行列式展开,即可証明。

采用了行列式記号以后,方程組(1)的解,可写成:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_2 \\ c_2 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

观察上式, x 和 y 的值,都是由分式表示。兩分式的分母是相同的。在表示 x 的分式中,只要把分母的第一列(即 x 的系数) a_1, a_2 換为常数項 c_1, c_2 就得到它的分子。同样,在表示 y 的分式中,只要把它分母的第二列(即 y 的系数) b_1, b_2 換为 c_1, c_2 就得到它的分子。这个公分母称为方程組(1)的行列式。

关于方程組(1)的解,有下列三种不同的情况:

i) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时,方程組(1)有唯一的解。

ii) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时,則从方程組(2),显見矛盾,所以方程組(1)無解。

iii) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ 时,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

这时方程組(1)的两个方程实际上是一个方程,所以它有無限多的解。

例 1. 解
$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 3x + y - 9 = 0 \end{cases}$$

[解] 因为 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, 所以这个方程組有唯一的解,把

方程組写成:

$$\left. \begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 3x + y &= 9 \end{aligned} \right\}$$

利用公式(2'),得

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{15}{5} = 3.$$

例 2. 解

$$\left. \begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ 6x - 4y &= 7 \end{aligned} \right\}$$

[解] $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$, 但 $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$,

所以方程組無解。

如果,在方程組(1)里, $c_1=c_2=0$,那末,方程組(1)变为:

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0 \\ a_2x + b_2y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

組(1')称为二元綫性齐次方程組。当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时,它有唯一的解,即

$$x=0, \quad y=0$$

称为零解。如果 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, 这时

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

方程組(1')的兩方程,实际上是一个方程,因而,它除有零解外,还可以有無限多的解。

§ 2. 含有两个三元綫性齐次方程的方程組

設有方程組:

$$\left. \begin{aligned} a_1 z + b_1 y + c_1 x &= 0 \\ a_2 z + b_2 y + c_2 x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

首先假定在

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

中,至少有一个不等于零 如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 把(3)式改写为

$$\left. \begin{aligned} a_1 z + b_1 y &= -c_1 x \\ a_2 z + b_2 y &= -c_2 x \end{aligned} \right\} \quad (3')$$

解出 x, y 为:

$$x = \begin{vmatrix} -c_2 z & b_1 & 0 \\ -c_1 z & b_2 & 0 \\ a_2 & b_2 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{vmatrix} z,$$

$$y = \begin{vmatrix} a_1 - c_1 z & 0 & c_2 - a_1 \\ a_2 - c_2 z & 0 & c_1 - a_2 \\ a_1 & b_1 & a_2 b_1 - a_1 b_2 \end{vmatrix} z.$$

上式中, z 为任意的, 令 $k = \frac{z}{a_1 b_1 - a_2 b_2}$,

$$\text{則 } x = k \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, y = k \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, z = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

k 的值是任意的, 因此方程組 (3) 有無限多的解, 但其每一組解

x, y, z 与三个行列式: $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 都成比例, 即

$$x:y:z = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

其次, 如果三个行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$ 全等于零,

这时, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, 所以, 方程組(3)的两个方程实际上是一个方程。假设 $a_1 \neq 0$, 解出: $x = -\frac{b_1 y + c_1 z}{a_1}$ 此处, y, z 都是任意的, 因而方程組(3)有無限多的解

例. 求方程組:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

的所有解。

[解] 从公式(4)得

$$x = k \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}, \quad y = k \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad z = k \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};$$

或 $x = 11k, \quad y = -14k, \quad z = -5k, \quad (i)$

此处, k 是任意数; (i)式表示方程組的所有解。

§ 3. 三阶行列式

設有三元线性齐次方程組:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= 0 \dots\dots\dots (i) \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= 0 \dots\dots\dots (ii) \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= 0 \dots\dots\dots (iii) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

这方程組显然有一組零解: $x=0, y=0, z=0$ 。現在, 發生这样一个問題: 就是方程組(5)除了零解以外, 是不是还有其他的解呢? 为了解答这問題, 我們进行討論如下:

假設 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}$ 不全为零。

解第二, 第三兩方程:

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0$$

$$\text{得 } x = k \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, y = k \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (6)$$

这里, k 是任意数 ($k \neq 0$), 因为如果 $k = 0$, 將得組(5)的零解了)。

如果(6)式里的 x, y, z 滿足第一方程 $a_1x + b_1y + c_1z = 0$

$$\text{那末, } k \left\{ a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right\} = 0$$

因为 $k \neq 0$ 所以

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

$$\text{或 } a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + b_1c_2a_3 - b_1c_3a_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 = 0. \quad (7')$$

由于以上的結果,我們知道:当方程組(5)的系数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ 滿足关系式(7)或(7')的时候, 它可以有無限多組的非零解(注意:关于以上齐次方程組的詳細討論, 參看 § 8)。

观察等式(7)或(7')的左边, 它是一个关于 a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, 3$)的三次齐式。具有这样形式的齐式, 非常重要。我們現在用一种

新記号: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 来代表它, 就是合

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \\ = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + b_1c_2a_3 - b_1c_3a_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2. \quad (8)$$

并且称它为三阶行列式, $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ 称为它的九个元素。

在行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 中, 有三个行, 三个列, 以文字 a, b, c 順序表示

第 1, 2, 3 列的元素; 以下按 1, 2, 3 順序表示第 1, 2, 3 行的元素。例如 a_1, b_1, c_1 組成第一行, b_1, b_2, b_3 組成第二列, 余类推。又元素 a_1, b_2, c_3 組成行列式的主對角綫; 元素 a_3, b_1, c_2 組成行列式的副對角綫。[參看 § 1] 在等式 (8) 右边六項的代數和, 称为三阶行列式的展开式。

关于三阶行列式中, 各項的結構, 自有其一定的規律。为便于记忆起見, 我們先介紹沙洛氏 (Sarrus) 對角綫展开法。

在行列式原有三列之后, 再添写第一、第二兩列如下表:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_1 & & b_1 & & c_1 & & a_1 & & b_1 \\
 & a_2 & & b_2 & & c_2 & & a_2 & & b_2 \\
 & & a_3 & & b_3 & & c_3 & & a_3 & & b_3
 \end{array} \quad (9)$$

在原行列式主對角綫上三元素的乘积, 以及平行于它的另兩条對角綫上三元素的乘积均取正号(表上用实綫画出)。至于在副對角綫上三元素的乘积以及平行于它的另兩条對角綫上三元素的乘积均取負号(表上用虛綫画出)。如是而得的六項代數和, 就是行列式 (8) 的展开式。

§ 4. 三阶行列式的几个主要性質

(i) 行列式中, 如果把它的行与列互換, 那末, 行列式的值不变。如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(ii) 行列式中, 如果把它某兩行, 或某兩列) 对調, 那末, 行列式的符号須改变。如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & b_1 & c_1 & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & b_2 & c_2 & \cdots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & b_3 & c_3 & \cdots \end{vmatrix}$$

(iii) 在行列式中, 如果某一行(或某一列)的元素全为零, 那末, 行列式的值等于零

(iv) 行列式中, 如果某一行(或某一列)的元素有一个公因子时, 这公因子可以提到行列式记号之外

$$\begin{vmatrix} a_1 & mb_1 & c_1 & \cdots & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & mb_2 & c_2 & \cdots & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & mb_3 & c_3 & \cdots & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

以上(i), (ii), (iii), (iv)几种性质, 用对角线展开法即可证明。

(V) 在行列式中, 如果有两行(或两列)的元素完全相同, 则其值必等于零。

$$\text{証 令 } \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

如果把其第一列与第二列对调, 则仍为 Δ_1 , 但从性质(ii), 应改变其符号

$$\text{即 } \Delta_2 = -\Delta_1 \text{ 所以 } \Delta_1 = -\Delta_1$$

§ 5. 三阶行列式的余子式及代数余子式

$$\text{令 } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

在这行列式中, 任取一元素, 把这元素所在的行及其所在的列都划掉, 那末, 剩下来的二阶行列式, 称为对应于这元素的“ Δ ”的余子式。或简称为这元素的余子式, 例如, 元素 c_3 的余子式为