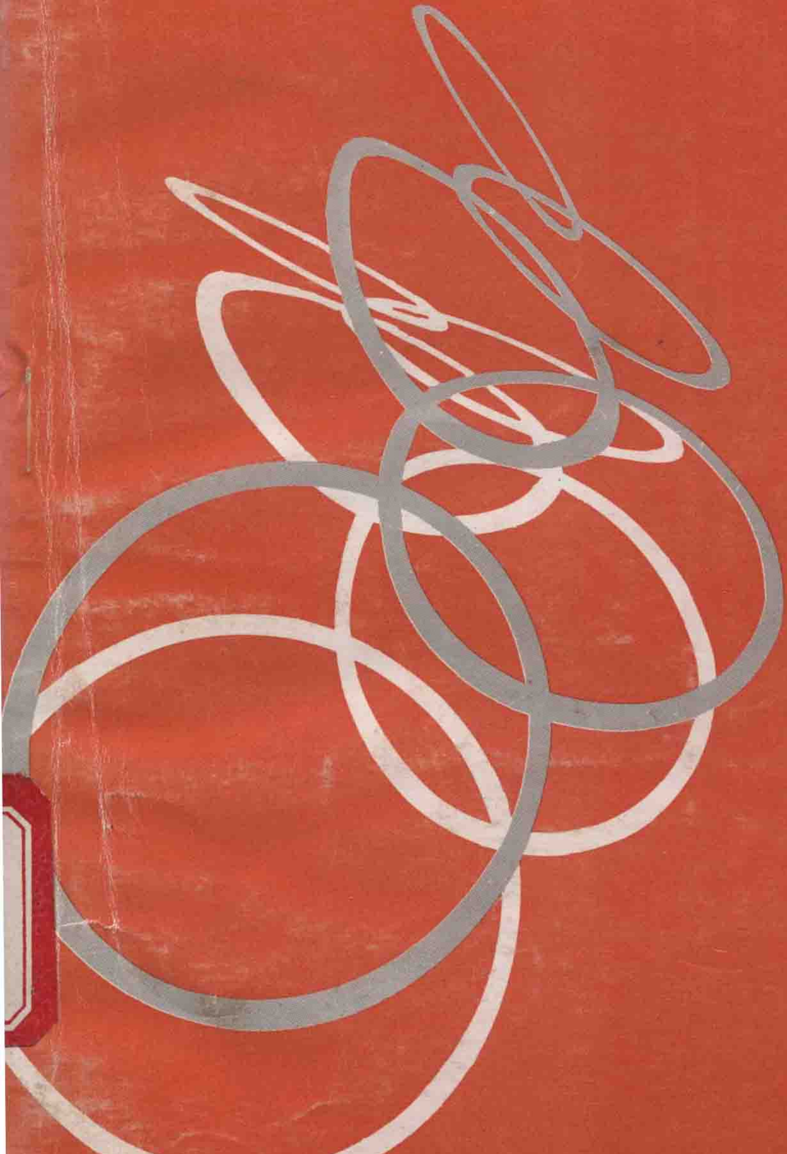
特级教师编著
王家骏 主编

北京市海淀区数学奥林匹克

（初中版）

初一分册



民族出版社

北京市海淀区数学奥林匹克
（初中版）
初一分册

特级教师编著
王家骏　主编

民族出版社

（京）新登字 154 号

图书在版编目（CIP）数据

北京市海淀区数学奥林匹克：初中版/王家骏主编．—北京：民族出版社，1994.10

ISBN 7-105-02320-1

Ⅰ．北… Ⅱ．王… Ⅲ．数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（94）第 13021 号

北京市海淀区数学奥林匹克（初中版）

初一分册

特级教师编著

王家骏 主编

民族出版社出版发行 各地新华书店经销

中国人民解放军第四二二九工厂印制

开本：787×1092 毫米 1/32 印张：7.25 字数：157 千字

1994 年 10 月第 1 版 1994 年 10 月第 1 次印刷

印数：1—10000 册

ISBN 7－105－02320－1/G・179

（汉 108）

全三册定价：20.40 元 单价：6.80 元

最佳智力开发丛书

父 母 送 给 孩 子 們

最 好 的 礼 物！

亲 属 赠 给 小 朋 友

最 佳 的 礼 品！！

前言

数学是一门研究物质世界的空间形式和数量关系的科学，又是一门思维科学，因此中、小学学生必须学习数学，学好数学，将为他们一生的发展所受益。现在学校、社会、家长都普遍重视孩子的数学学习，不仅学好课内，也注重课外的训练。

这套丛书就是为提供这种训练而由第一线的数学教师，按照大纲、教材的要求，根据他们多年教学的实践经验，遵照教的规律和学的规律而编写的。认真使用此书将有助于提高学生学习数学的兴趣，有助于发展学生的能力，有助于学生潜能的开发，有助于学生准确地形成数学的概念，并打下坚实的基础。

任何一本书的编成，都不会十全十美的，在使用的实践中，广大读者将会发现本丛书的不足之处，也将会产生许多更好的命题与分析方法，渴望您能告诉我们，使本丛书更加成熟。

北京海淀教师进修学校
校长 王家骏
1994.4.

编辑说明

为了使广大中、小学学生的智力达到最佳开发，提高中、小学学生的数学素质，培养学生灵活运用基础知识分析问题和解决问题的能力，我们邀请了北京市海淀区数十名从事多年数学奥林匹克研究工作的特级教师和位于教学第一线的教育专家为全国广大中、小学学生精心设计了一套“最佳智力开发丛书——《特级教师编著·北京市海淀区数学奥林匹克》，”该书的最大特点是能有效地激发全国广大中、小学学生的数学兴趣，提高其自身素质以及思维能力。

该套丛书由王家骏（北京市海淀区教育局局长、海淀区教师进修学校校长）同志主编。

1994 年 10 月

目　录

第一讲　有　理　数

一、基本性质

有理数的计算是初中数学的重要内容，有着广泛的应用。提高计算能力，是中学数学学习的一个重要目的。在解有理数的计算题中，不仅要求同学能正确地算出结果，而且要求同学善于动脑筋，学会一些速算和巧算的方法，抓住题目特点，将推理与计算相结合，选择简捷的解题方法，提高解题的效率。

二、例题选讲

例 1　计算 $1+4+7+10+13+16+19+22+25+28$

分析：　观察和式发现首末两端之和与首末两端等距离的两项之和相等。于是我们可利用这一规律，将和式倒过来写，再与原和式对应相加。

解：　令 $S=1+4+7+10+13+16+19+22+25+28$，

则　　$S=28+25+22+19+16+13+10+7+4+1$

两式相加得

$$\begin{aligned}2S&=(1+28)+(4+25)+\cdots\\&\quad+(25+4)+(28+1)\\&=29\times10\end{aligned}$$

所以　　$S=\dfrac{29\times10}{2}=145$

即 $1+4+7+10+13+16+19+22+25+28$

$=145$

注： 通过观察发现，此题中每两个相邻数差都相等，我们称这样的一列数为等差数列。对于等差数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 的和，依照前面算法，有 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=\dfrac{(a_1+a_n)\times n}{2}$

今后看到具体的数相加，首先判断它是否为等差数列，如是可直接利用上面的公式求和。

例 2 求 1 到 1000 的自然数中所有奇数的和减去所有偶数的和之差。

解：1 到 1000 的自然数中，奇数共有 500 个，偶数亦为 500 个。把所有奇数的和记为 $S_{奇}$，所有偶数的和记为 $S_{偶}$，则

$$S_{奇}=1+3+5+\cdots+997+999$$

$$=\frac{(1+999)\times 500}{2}=250000$$

$$S_{偶}=2+4+6+\cdots+998+1000$$

$$=\frac{(2+1000)\times 500}{2}=250500$$

所以 $S_{奇}-S_{偶}=250000-250500$

$=-500$

注： 利用等差数列的求和公式进行计算时，一定要数清楚数列的项数，即公式中的 n。

例 3 已知 $-a_1{}^2-(a_2-1)^2-(a_3-2)^2-\cdots-(a_{100}-99)^2=0$

求 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}$ 的值。

解： $\because\ -a_1^2-(a_2-1)^2-(a_3-2)^2-\cdots$

$-(a_{100}-99)^2=0$

$\therefore\ a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=2,\ \cdots,$

$a_{99}=98,\ a_{100}=99$

$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_{100}$

$=0+1+2+\cdots+98+99$

$=\dfrac{(0+99)\times100}{2}$

$=4950$

例 4 计算 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\cdots+\dfrac{1}{1993\times1994}$

分析： 直接通分，计算量很大，运算非常复杂，若把每一项都拆成两项的差，则可消去一部分项，使问题简化。

解： 原式$=\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}$

$+\cdots+\dfrac{1}{1993\times1994}$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)$

$+\cdots+\left(\dfrac{1}{1993}-\dfrac{1}{1994}\right)$

$=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$

$+\cdots+\dfrac{1}{1993}-\dfrac{1}{1994}$

$=1-\dfrac{1}{1994}$

$=\dfrac{1993}{1994}$

例 5 计算 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots$

$$+\frac{1}{1+2+3+\cdots+50}$$

分析： 此题中分母有规律，即通项为 a_n，

则 $$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$

由等差数列的求和公式得

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$

$$=\frac{1}{\frac{(n+1)\times n}{2}}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

解： 原式 $=1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

$$+\cdots+2\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{51}\right)$$

$$=1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{50}-\frac{1}{51}\right)$$

$$=1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{51}\right)$$

$$=1+1-\frac{2}{51}=1\frac{49}{51}$$

例 6 证明： $0.099<\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}<0.111$

证明： 设 $A=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}$

则 $$A>\frac{1}{10\times 11}+\frac{1}{11\times 12}+\cdots+\frac{1}{1000\times 1001}$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{1000}-\frac{1}{1001}$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{1}{1001}$$

而 $\frac{1}{10}-\frac{1}{1001}>\frac{1}{10}-\frac{1}{1000}=0.099$

$\therefore\quad A>0.099$

又 $A<\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{10\times11}+\cdots+\frac{1}{999\times1000}$

$$=\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}$$

$$=\frac{1}{9}-\frac{1}{1000}$$

而 $\frac{1}{9}-\frac{1}{1000}<0.112-0.001=0.111$

$\therefore\quad 0.099<A<0.111$

即 $0.099<\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}<0.111$

例7 计算 $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{8\times9\times10}$

分析：本题关键在于发现

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

解：原式

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8\times9}-\frac{1}{9\times10}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{8\times9}-\frac{1}{9\times10}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{9\times10}\right)=\frac{11}{45}$$

例8 计算 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+19\times20$

解：只有将每一项拆成两项的差，才能使其相加大部分

项抵消。观察发现

$$n(n+1)=\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)]$$

∴ 原式

$$=\frac{1}{3}[(1\times2\times3)+(2\times3\times4-1\times2\times3)$$
$$+(3\times4\times5-2\times3\times4)+\cdots$$
$$+(19\times20\times21-18\times19\times20)]$$
$$=\frac{1}{3}\times19\times20\times21$$
$$=2660$$

注： 对于项数很多，看来难以计算的问题通过拆项，可使和中互为相反数的项抵消。这是一种很有用的方法。

一般拆项，常利用

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$n(n+1)=\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)]$$

$$n(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)]$$

例 9 计算 $1+2^1+2^2+\cdots+2^{100}$

分析： 观察和式特点，从第二项起，每一项都是它前面一项的 2 倍。如将和式各项都乘以 2，所得新和式中除个别项外，其余与原和式中的项相同，若两式相减将使差易于计算。

解： 令$S=1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{100}$

$\therefore \quad 2S=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{100}+2^{101}$

两式相减,得 $\quad S=2^{101}-1$

$\therefore \quad 1+2^1+2^2+\cdots+2^{100}=2^{101}-1$

例 10 计算 $\quad 1+3\times2+5\times2^2+\cdots+201\times2^{100}$

分析: $1,3\times2,5\times2^2,\cdots,201\times2^{100}$,恰是一等差数列 $1,3,5,\cdots,201$,与一等比数列 $1,2,2^2,\cdots,2^{100}$ 的对应项的积构成的一列数,它的求和问题也可用上例的错位相减解决。

解: 令 $S=1+3\times2+5\times2^2+\cdots+201\times2^{100}$

$\therefore \quad 2S=2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+201\times2^{101}$

两式相减,得

$$\begin{aligned}S&=-1-2(2^1+2^2+\cdots+2^{100})+201\times2^{101}\\&=-1-2(2^{101}-2)+201\times2^{101}\\&=199\times2^{101}+3\end{aligned}$$

例 11 计算 $\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}$

解: 令 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}$

$\therefore \quad 2S=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{99}}$

两式相减,得 $\quad S=2-\frac{1}{2^{100}}$

即 $\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}=2-\frac{1}{2^{100}}$

例 12 计算 $\quad \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{199}{2^{100}}$

解: 令 $S=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{199}{2^{100}}$

$\therefore \quad 2S=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\cdots+\frac{199}{2^{99}}$

两式相减，得

$$S=1+\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{8}+\cdots+\frac{2}{2^{99}}-\frac{199}{2^{100}}$$

$$=1+2(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{99}})-\frac{199}{2^{100}}$$

$$=1+2\times(1-\frac{1}{2^{99}})-\frac{199}{2^{100}}$$

$$=3-\frac{4}{2^{100}}-\frac{199}{2^{100}}$$

$$=3-\frac{203}{2^{100}}.$$

即 $\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{199}{2^{100}}=3-\frac{203}{2^{100}}$

例 13 计算 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$

分析： 应用平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，把每个括号中的式子都写成两因式的积的形式

解： 原式

$$=(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{10})(1+\frac{1}{10})$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{9}{10}\times\frac{11}{10}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{11}{10}=\frac{11}{20}$$

例 14 已知：$(M+35)^2=13302921$

求：$(M+45)(M+25)$的值

分析： 要想由已知式求出 M 的值有一定困难，对所求值的式子研究发现，它可以变化为$(M+35+10)(M+35-$

10),应用平方差公式即为:$(M+35)^2-10^2$。

解: $(M+45)(M+25)$

$=(M+35+10)(M+35-10)$

$=(M+35)^2-100$

$\because\ (M+35)^2=13302921$

$\therefore$ 原式$=13302921-100$

$=13302821$

即 $(M+45)(M+25)=13302821$

注: 在具体计算中,特别要注意公式的逆用、变用和连用。

例 15 计算

$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)$

分析: 式子有什么特点? $2,2^2,2^4,2^8,2^{16},2^{32}$有什么规律?每一个数都是它前面一个数的平方。能用什么公式呢?如果$(2+1)$前面有$(2-1)$,就可以连续地应用$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$,而$2-1=1$。

解: 原式$=(2-1)(2+1)(2^2+1)\cdots(2^{32}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)$

$=2^{64}-1$

例 16 计算 $\underbrace{999\cdots9}_{1994\text{个}}\times\underbrace{999\cdots9}_{1994\text{个}}+1\,\underbrace{999\cdots9}_{1994\text{个}}$

分析: 此题可应用完全平方公式$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

解: 原式$=(10^{1994}-1)^2+1\,\underbrace{999\cdots9}_{1994\text{个}}$

$$=10^{1994\times 2}-2\times 10^{1994}+1+1\underbrace{999\cdots 9}_{1994\text{个}}$$

$$=10^{1994\times 2}-2\times 10^{1994}+2\times 10^{1994}$$

$$=10^{3988}$$

另解： 原式$=\underbrace{999\cdots 9}_{1994\text{个}}\times\underbrace{999\cdots 9}_{1994\text{个}}+10^{1994}+\underbrace{999\cdots 9}_{1994\text{个}}$

$$=\underbrace{999\cdots 9}_{1994\text{个}}\times(\underbrace{999\cdots 9}_{1994\text{个}}+1)+10^{1994}$$

$$=\underbrace{999\cdots 9}_{1994\text{个}}\times 10^{1994}+10^{1994}$$

$$=10^{1994}\times(\underbrace{999\cdots 9}_{1994\text{个}}+1)$$

$$=10^{1994}\times 10^{1994}=10^{3988}$$

例 17 计算 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-1994^2+1995^2$

解： 原式 $=1^2+(3^2-2^2)+(5^2-4^2)+\cdots+(1995^2-1994)^2$

$=1^2+(3-2)(3+2)+(5-4)(5+4)+\cdots+(1995-1994)(1995+1994)$

$=1+5+9+\cdots+3989$

$=\dfrac{(1+3989)}{2}\times 998$

$=1991010$

例 18 若 $P_n=\left(1+\dfrac{1}{1\times 3}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{2\times 4}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{3\times 5}\right)\times\cdots\times\left(1+\dfrac{1}{n(n+2)}\right)$，能否找到充分大的 n，使 $P_n>2$？