立體幾何學

原著者　〔蘇聯〕基謝里夫
譯者　郭明達

上海大路出版社出版

立體幾何學

原著者 〔蘇聯〕基謝里夫
譯者 郭 明 達

上海大路出版社出版

立體幾何學　25開　102用紙面　定價 ¥ 8,500

原書名	ГЕОМЕТРИЯ ЧАСТЪ ВТОРАЯ СТЕРЕОМЕТРИЯ
原著者	А. П. КИСЕЛЕВ 基謝里夫
原出版者	УЧПЕДГИЗ(1950 年 版)
譯　者	郭　明　達
出版者 發行者	大路出版社 上海虎丘路128號
印刷者	國風印刷公司 上海新閘路568弄437號

1953年11月初版　1954年4月四版(印數) 4001－5000冊

增訂版原序

重訂基謝里夫第二編立體幾何學課本，與重訂第一編(平面幾何)，具有同樣的目的卽：程度方面適合中等學校，論證演算方面，則充分表達各項結構與現時所用的幾何課本(如 M.П. 理學院數學系、莫斯科數學專修科中等學校數理組)內的關係。最終目的：是計算近世科學上所發生的問題，重在用初等幾何解釋。

重訂時，大部份時間花在有系統的闡述：直線、平面在空間平行垂直的問題，這項工作，可能令部份定理的論證，及平行的直線與平面上定理的數量加以精簡。編內次要的定理，不僅參照以前的課本删減，並將學者易於自己證明的定理，置入練習題中。各項作圖的定理，非常充分；有代表性的作圖題，亦提出在課文內解決。在可能內，儘量使關於平行及垂直的相互關係定理，充分明瞭及容易領悟。

編內插入空間圓形問題；又將若干計算體積的定理，加以簡化，一如以前計算面積時一樣。內有數章關於空間坐標射影圖形的解釋，甚為簡單具體；其應用以前的公理，解決空間相似形的基本問題，亦力求明顯。

我所增加的如下列各章：空間作圖問題(§6、7、19－22、35－37)；第一章的練習題(22頁)；空間對稱圖形(§99－104)；直線射影在平面上的圖形(§60－66)；正多面體的作圖(§98)及有關公理(附錄)。

H·格拉哥里夫

譯者附言

本書爲蘇聯 А.П.Киселев 所著。經格拉哥里夫教授改編，內容異常豐富謹嚴，其中以相似多面體，對稱圖形，卡發雷利定理，及迴轉體各定理的證明。皆爲前此任何立體幾何教本所不及。篇末附錄一章，所載：「三角形內角之和」，及「過一點不能作一根以上的直線平行於已知直線」。尤爲異樣的精彩。國內僅見有參考編譯的教材，讀者每以未窺全豹爲憾。故特爲譯出，作爲教學上的參考。裨益必然很多。但譯者學養不够，不能將原著精神充分表達甚爲抱愧。且錯訛之處，亦必難免。如荷高明賜以指正，則深爲企盼。

譯者 1952 年 5 月

目　次

緒　論

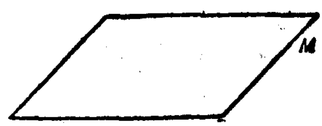
§1. 在研究立體幾何及空間形體，並不是一切點都在一平面內，空間形體用插圖來表示，在眼中看起來，如同眞物體一樣，這種插圖是完全依據幾何形狀性質的正確定義而畫成的。

有一種將空間形體表示在一平面上的方法，詳見下章(§60–§66)。

第一章　直線與平面

一、平面位置的決定

§2. **平面的表示法**　在日常生活中，有許多是具有幾何平面形的，爲矩形的如：書面、牕玻璃、桌面、等等，若從角上看過去，則它們成爲平行四邊形，因此在圖上表示平面，用平行四邊形。通常用一個字母來代表，如“平面 M”〔圖 1〕。



〔圖 1〕

§3. **平面的基本性質**　下列各平面的性質，是依據不須證明的公理。

(1) 若直線上的兩點，在一平面內，則直線上每一點都在平面內。

(2) 若兩平面有一公共點的，則兩平面必相交於經過此點的直線上。

(3) 通過不在直線上的三點，可以作一平面，且僅可作一個。

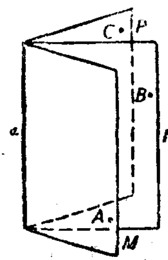
§4. 系　由最後的性質可以獲得下列推論。

(1) 過直線，與線外一點可以作一平面(只有一個)，實際是由直線上任意兩點及另外第三點，可以作一平面。

(2) 過相交直線，可以作一平面(只有一個)，實際是取交點，及在每一根直線上各取一點，共得三點，則可作一平面(只有一個)。

(3) 通過平行二直線可作一平面，實際是兩直線在平行時，由平面幾何學已可決定，在一平面內；又如通過二直線之一，及另一直線上任一點，卽可作一僅有的平面，故可決定一個平面。

§5. 環繞直線的平面　通過每一直線可作無數的平面，在已知直線 α〔圖2〕，在線外一點 A，通過直線 α 及 A 點，可作一平面(§4)，叫作 M，又在 M 面外。另取一點 B，通過 B 及直線 α 順次作平面 N，它不在 M 面內。我們又同樣取一點在 M、N 之外，再作一新的平面 P，它也不在 M、N 面內(因 C 點不在 M、N 內)，繼續這樣取新的點，卽繼續可以得通過直線 α 的新面，這就是無數的平面了。我們加以觀察，就知道，這些分散的平面，都環繞着直線 α，於是可以知道平面的另一種性質，卽平面可以取面內任一直線為軸而四面旋轉。



〔圖2〕

§6. 空間作圖問題　在平面幾何作圖，是用儀器畫在平面上，在立體作圖，卽不能完全依靠儀器，因表現立體圖形，單憑儀器是不可能的；再者，立體幾何圖形以面做單元的，若僅用直線畫在平面上，也很難表出許多的面。

因此在立體作圖，必需確定一種作圖的方法；在立體空間作圖法，我們可得下列規定。

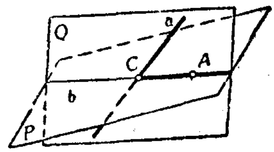
(1) 若已知的條件可以決定一平面時，如通三點，過一直線及線外一點，過兩平行直線，過兩相交直線，則這個平面可以作得。

(2) 若已知兩平面相交，則其交線為已知；卽我們可以求出這根交線。

(3) 若已知的平面與紙面相合，我們卽可用平面幾何上的方法作出一切的圖。

滿足任一空間作圖，必須將實際數字完全表出，這樣，可以幫助解決複雜的問題。

§7. 空間作圖的例題　求已知直線 a〔圖 3〕交平面 P 的交點：——取 P 上任一點 A，通過 A 點與直線 a 作平面 Q，交 P 面於直線 b；a、b 相交於點 C。這 C 點卽爲所求的，如直線 a b 平行，這問題便不能解決。

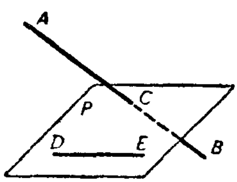


〔圖 3〕

二、平行直線與平行平面

平行直線

§8. 概說　空間兩直線，有時不能通過而作得平面，例如〔圖 4〕：設兩直線 AB 與 DE，一線相交於平面 P，另一線在 P 上，但不過交點 C 與 AB 相遇，過這樣兩直線卽不可作一平面。因設如可作，則 DE 與 C 點所在的平面，必變爲兩個；一個與 AB 相交(假設)，一個是包含 AB，這顯然是不可能的(§3)。



〔圖 4〕

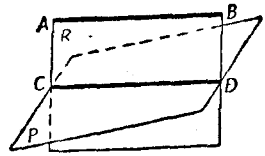
如兩直線不在一平面內，但延長又不相交，又不平行，這種直線與在一平面內不相交的直線，名稱上必須加以區別，故兩線不在一平面內的，特稱爲交錯線。

直線與平面相平行

§9. 定義　不在平面上的直線，延長又不與平面相交，則這直線平行於平面。

§10. 定理　若直線 AB〔圖 5〕平行於平面 P 上任一直線 CD，則此直線 AB 平行於平面 P。

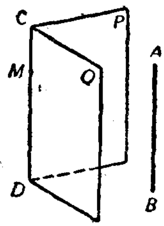
先求出經過 AB 和 CD 直線的平面 R。假定 AB 交平面 P，則這交點在直線 AB 上，亦必在含 AB 的面 R 上，同時又應在 P 面上，可知這交點同時必在面 R 及 P 上；亦必在兩面的交線 CD 上，接着直線 AB 與 CD 相交，但已假定 $AB \parallel CD$，則相交爲不可能。當然，直線 AB 不能交平面 P，因此 $AB \parallel P$。



〔圖5〕

§11．**定理**　若平面 R〔圖5〕通過 AB 與平行於直線 AB 的平面 P 相交，則其交線 CD 平行於 AB。

因第一：直線 CD 與 AB 在一平面內；第二：直線 CD 不可能與 AB 直線相交，因此直線 AB 不可能交平面 P。

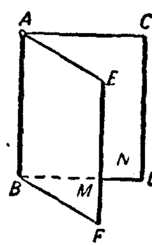


〔圖6〕

§12．**系1**．若直線 AB〔圖6〕平行於兩相交平面 P 及 Q，則必平行於兩平面的交線 CD。

作經過 AB 及 CD 線上任一點 M 的平面，這個平面，必交 P 與 Q 於平行於 AB 線而包含 M 點的兩線。但過 M 點只能作一直線平行於 AB 線，可知 P 與 Q 面，和所作面的兩交線必合而爲一，這直線同時在 P 面及 Q 面上，故必在兩平面的交線 CD 內，因此 $CD \parallel AB$。

§13．**系2**．若兩直線 AB 及 CD〔圖7〕各平行於第三直線 EF。則兩直線互相平行。



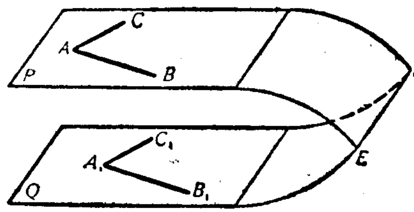
〔圖7〕

作過平行直線 AB、EF 的平面 M。因 $CD \parallel EF$ 則 $CD \parallel M$（§10）。再作過 CD 及 AB 線上一點 A 的平面 N，則有 $EF \parallel CD$ 即 $EF \parallel N$。因知平面 N 應交平面 M 於平行 EF 的直線（§11）。同時包含 A 點，但在平面 M 內。過 A 點平行於 EF 的直線僅能有 AB 線，結果平面 N 交平面 M 於 AB 線，因知 $CD \parallel AB$。

平 行 平 面

§ **14**. **定義** 若兩平面延長而不相交，則叫做平行平面。

§ **15**. **定理** 若兩相交直線 AB 及 AC〔圖 8〕在平面 P 上，順次平行於另一平面 Q 上的兩直線 A_1B_1 及 A_1C_1，則兩平面相平行。

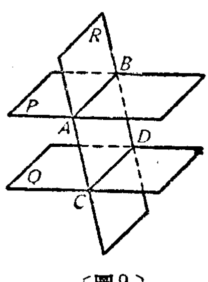


〔圖 8〕

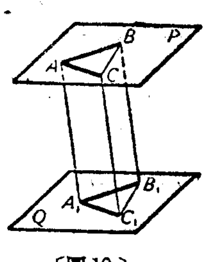
直線 AB 及 AC，平行於平面 Q（§ 10）。設兩平面可允許相交於任意直線 DE〔圖 8〕，在這樣情形，必 $AB \parallel DE$ 及 $AC \parallel DE$（§ 11）。但在平面 P 內，過 A 點有兩直線 AB、AC，共平行於直線 DE，這是不可能的，因知 P 及 Q 面不能相交。

§ **16**. **定理** 若兩平行平面 P 及 Q〔圖 9〕為第三平面所截，則其交線 AB 及 CD 平行，實際上：第一，直線 AB 及 CD 在一個平面 R 中；第二，它們不可能相交，如果相交，則 P 及 Q 平面必相交，這是與所設相矛盾的。

§ **17**. **定理** 平行直線的線段 AC 及 BD〔圖 9〕截在兩平行平面 P 及 Q 間是相等的。



〔圖 9〕



〔圖 10〕

過平行直線 AB、CD 作平面 R，交平面 P 及 Q 於平行直線 AB 及 CD，於是 $ABCD$ 是平行四邊形，因而 $AC = BD$。

§ **18**. **定理** 兩角 $\angle ABC$ 及 $\angle A_1B_1C_1$〔圖 10〕的夾邊，對應平行，則兩角相等，且在兩平行平面中（P 及 Q）。

這 P 及 Q 平面平行，在前面已經證過（§ 15），現僅須證明角 A 及

A_1 相等卽可。

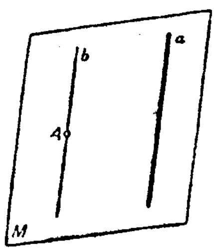
取夾邊平行的兩任意角，令線段 $AB = A_1B_1$；$AC = A_1C_1$，作直線 AA_1、BB_1、CC_1、BC 及 B_1C_1，這裏 AB 及 A_1B_1 相等且平行，當然，四邊形 ABB_1A_1 是平行四邊形，因而 AA_1、BB_1 相等且平行。同理，AA_1 及 CC_1 亦相等且平行，於是 $BB_1 \perp\!\!\!\perp CC_1$，所以 $BC = B_1C_1$，$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$（三邊相等），因知 $\angle A = \angle A_1$。

作圖題

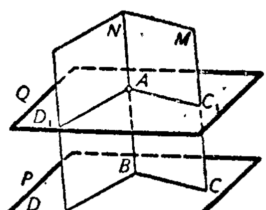
§ **19**. 過一點 A 作一直線〔圖 11〕，與點外一直線 a 平行。

作法 過直線 a 及 A 點作平面 M，在這平面內，過 A 點作直線 b 平行於直線 a。

這問題卽可明顯解答：就所作論，所求的直線應與直線 a 在一個平面上，且這平面包含 A 點，所作的直線又過 A 點。在同一平面 M 內，過 A 點僅可作一直線平行於直線 a，故 b 爲所求。



〔圖 11〕



〔圖 12〕

§ **20**. 過一點 A〔圖 12〕作一平面，平行於不含 A 點的平面 P。

作法 在平面 P 上任意取一點 B，過 B 作兩直線 BC 及 BD，再作兩補助平面 M——過 A 點及直線 BC，平面 N——過 A 點及直線 BD，所求平行於 P 的平面，應該交 M 於平行於 BC 的直線，交 N 於平行於 BD 的直線。因此，過 A 點在平面 M 內作直線 AC_1 平行於 BC，又於平面 N 內作直線 AD_1 平行於 BD，過直線 AC_1 及 AD_1 作平面 Q 卽爲所求。就所作論，角 D_1AC_1 在平面 Q 上，平行於 P 面上的角 DBC，因此 $P \parallel Q$。

這裏，在平面 M 中，過 A 點僅能作一直線平行於 BC，在 N 內僅

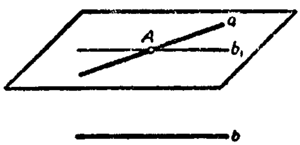
能作一直線平行於 BD，當然這問題的解答卽可確定，因此過 A 點僅可作一平面，平行於已知的平面。

§ **21**. 過直線 a〔圖 13〕作平面，平行於已知的直線 b。

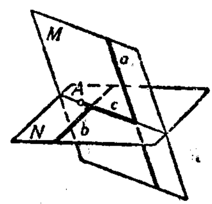
作法　情形(1)直線 a、b 不平行——過直線 a 上任一點 A 作直線 b_1 平行於 b，過直線 a 及 b_1 作平面，卽爲所求(§ 10)。

作法　情形(2)直線 a 及 b 互相平行——在這種情形的問題，成爲不定，因過直線 a 的一切平面，皆平行於 b。

§ **22**. **比較復雜的作圖題**　兩已知的交錯線 a、b〔圖 14〕，點 A 不在兩線上，求過 A 點作一直線與 a、b 兩定線相交。



〔圖 13〕



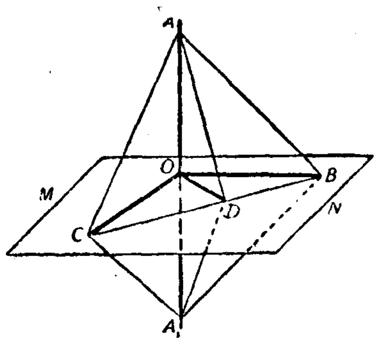
〔圖 14〕

作法　這裏所求的直線應該過 A 點，且交 a 線，當然在含 a 線及 A 點的平面上(有兩點應該在這個平面上，一爲 A 點，一爲與 a 線的交點)，又可同樣推斷，這所求的直線又必應在含 A 點及 b 線的平面內，因之，它應該在兩平面的交線上，由此得作法：過 A 點及直線 a 作平面 M；過 A 點及直線 b 作平面 N。得兩面 M、N 的交線 c，若 c 不與任一直線平行，當然必與每一已知直線相交(每一已知線分別與 c 在一平面內；a 與 c 在平面 M 內，b 與 c 在平面 N 內)。在這樣情形，直線 c 卽爲所求。但若 $a \parallel c$ 或 $b \parallel c$，這問題便不能解決，在 b 及 c 平行的可能，是在含 A 點與直線 a 的平面，平行於 b 時，同樣 $a \parallel c$ 在面 N，$\parallel a$ 時，也是很顯然的。

三、垂直及傾斜於平面的直線

決定直線垂直於平面問題的基本定理。

§ **23. 定理** 若直線 AA_1〔圖 15〕與平面的交點為 O，與這平面的過 O 點的兩線 OB 及 OC 成直角，則與平面內過 O 點的任意第三線 OD，也成直角。



〔圖 15〕

取直線 AA_1，令 OA 及 OA_1 相等，在平面內作任意直線，令與從 O 點引出的線相交於 C、D 及 B。將這三點與 A 及 A_1 相連接，可得數個三角形，詳述之如下：

首就三角形 ACB 及 A_1CB 說，是相等的，因 CB 是公用邊，$AC=A_1C$，這是在垂足 O 的垂直線 OC 上，向 AA_1 直線同樣傾斜的直線。同理，$AB=A_1B$，由相等三角形知 $\angle ABC=\angle A_1BC$。

次就三角形 ADB 及 A_1DB 說，也是相等的，這裏 DB 是公用邊，$AB=A_1B$ 及 $\angle ABD=\angle A_1BD$，從相等三角形可知 $AD=A_1D$。

再就三角形 AOD 及 A_1OD 說，也是相等的，因為對應三邊皆相等，可以推知 $\angle AOD=\angle A_1OD$，這兩角是相鄰的，當然 $AA_1\perp OD$。

§ **24 定義** 若直線與平面相交，在平面內過交點引任意直線皆與這直線相交成直角，則這直線是這平面的垂直線，也可以說，這平面垂直於直線。

由上述的定理（§ 23）知：過這直線與平面的交點，在平面任引兩直線皆與之垂直，則這直線垂直於平面。

直線交平面而不垂直，叫做平面的斜交線，垂直線或斜交線與平面的交點，叫做垂足及斜足。

§ **25. 斜交線與垂直線的長**〔註 1〕 從一點 A〔圖 16〕作垂直線 AB

〔註 1〕 為簡單計，有時垂直線及斜交線即表示由定點到垂足或斜足間的線段。

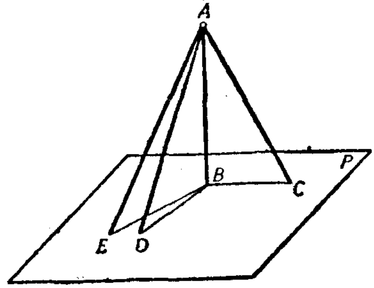
及斜交線 AC 交平面 P，連接垂足及斜足的直線爲 BC，這 BC 線又叫斜交線 AC 的正射影，同樣，BD 是斜交線 AD 的正射影，餘類推。

§26. **定理**　若從一點 A 作點外平面 P 的垂直線 AB 及斜交線 AC、AD、AE……〔圖 16〕，則

(1) 兩斜交線的射影相等，則其長相等；

(2) 斜交線長的，射影也長。

以直角三角形 ABC 及 ABD 環繞 AB 轉動，我們在 P 平面又可取一點 E 連接直角三角形 ABE，於是一切斜交線都可以與垂直線 AB 在一個平面內，一切射影都與 AB 垂直相交，可以由平面幾何定理，證明上面的定理。



〔圖 16〕

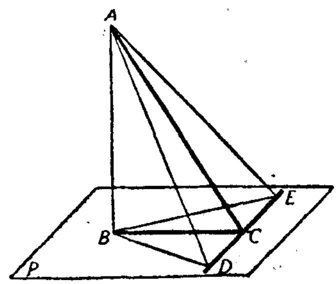
討論　這裏 AB 是直角三角形的對邊，每一斜交線 AC、AD、AE……是斜邊，當然，垂直線 AB 是諸線內一最短的，因知垂直線是由定點到平面上一切點所連的線段中最短的，所以用它來標定 A 點到平面 P 的距離。

§27. **逆定理**　若從一點，作點外平面的垂直線及任意斜交線，則

(1) 兩斜交線相等，則射影也相等；

(2) 射影大的，則對應的斜交線也大。

證法(與上相反)由學者自己證明，並可用以導出下列垂直線定理。



〔圖 17〕

§28. **定理**　直線 DE〔圖 17〕在平面 P 內，過斜交線 AC 斜足，垂直於 AC 射影 BC，則必垂直於斜交線 AC。

取任意相等的線段 CD 及 CE，由點 D、E 各連接垂直線上的 A 點及 B 點，可得 $BD=BE$。因直線 DE 垂直於 BC，故 C 點到 D、E 的距離相等，卽知 $AD=AE$（因斜交線 AD、AE 在 P 平面內，有相等的射線）。所以 ΔADE 是等腰三角形，當然，中線 $AC\perp DE$。

這定理又叫三垂直線的定理，實際說起來，係連接下列三垂直線：

(1) AB 到平面 P；　(2) BC 到 DE；　(3) AC 也到 DE。

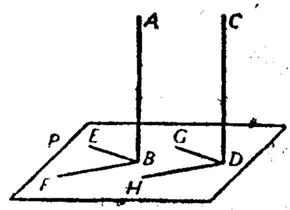
§ 29. 逆定理　直線 DE〔圖 17〕在平面 P 內，過斜交線 AC 的斜足，垂直於斜線 AC，則必垂直於 AC 的射影 BC。

與上面所證明的定理用同一的圖。在相等線段 CD 及 CE，連接 D、E 及直線段上 A、B 各點，則得 $AD=AE$（因斜交線 DE，由 C 點向兩邊的距離相等，且垂直於 AC），又因 AD、AE 兩斜交線相等則兩射影也相等，故 $BD=BE$。因此 ΔBDE 是等腰三角形，中線 BC 當然垂直於 DE。

四、平行線、垂直線與平面的關係

§ 30. 概說　平行直線，平行的平面與平面上的垂直線，在空間包含有某種關係，卽一組平行線，及平行的面垂直於另一組面線；相反的，有一組垂直的面線被另一組平行的面線所截，由這許多空間的垂直、平行的面線間的關係，可以得出下列定理：

§ 31. 定理　若平面 P〔圖 18〕垂直於平行線之一(AB)，亦必與另一平行線(CD)垂直。



〔圖 18〕

在平面 P 上，過 B 點作任意直線 BE、BF。又過 D 點作直線 DG、DH，順次與 BE、BF 平行，於是得 $\angle ABE=\angle CDG$ 及 $\angle ABF=\angle CDH$。因這些角的夾邊是平行的，但角 ABE 是直角，所以 $AB\perp P$，角 CDG 及 CDH 也是直角，當然 $CD\perp P$。