高等学校统编教材

《航海学》附篇及附录

郭　禹　主编

杨守仁　主审

大连海事大学出版社

目 录

附篇　球面三角与船位误差理论基础

本篇介绍了在航海专业课和航海实际工作中经常涉及到的球面三角、内插法和船位误差的基础知识。

第一章　球面三角

球面三角，主要研究球面上由三个大圆弧相交所围成的球面三角形及其性质、解算等问题，为学习航海专业课程提供必要的数学基础。

第一节　球面几何

一、球、球面

在空间与一定点等距离的点的轨迹称为球面(spherical surface)。包围在球面中的实体称为球(sphere)，这一定点称为球心。球心和球面上任意一点间的连线称为球半径 R。过球心与球面相交的直线段称为球直径。同球的半径或直径都相等。同理，半径或直径相等的球全等。所以，球面又可定义为半圆周绕它的直径旋转一周的旋转面。

二、球面上的圆

任意一平面和球面相截的截痕是圆。

如图 1-1-1，平面 π 与球面相截。由球心 O 向截面 π 作垂线 OO'，A 是截痕上任意点，连线 OA 和 $O'A$ 构成直角三角形 OAO'，$\angle OO'A=90°$，则：

$$O'A=\sqrt{OA^2-OO'^2}$$

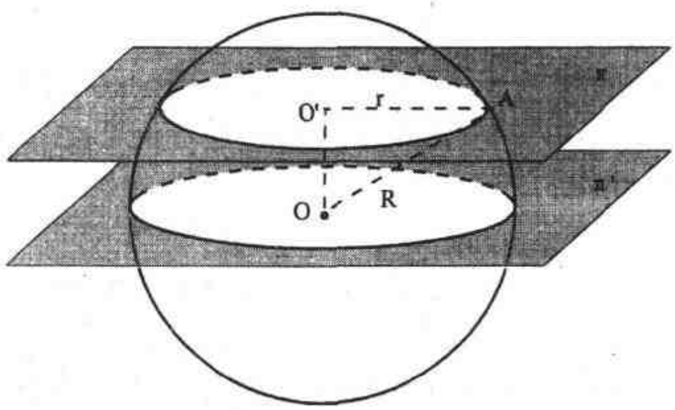


图 1-1-1

当平面 π 的位置不变，则 OO' 是定长，又因 OA 是球的半径 R，A 在截痕上任意移动时，OA 总是定值，因而 $O'A$ 也是定值。由此可知，π 平面与球面的截痕是一个以 O' 为圆心，$O'A$ 为半径 r 的圆。从而可以推广到任一平面与球面的截痕均为圆。

当 $O'O=0$，平面 π' 通过球心时，所截成的圆称为大圆(great circle)，它的一段圆周叫大圆弧。截面不通过球心的圆称为小圆(small circle)，它的一段圆周叫小圆弧。

三、大圆的性质

1. 大圆的圆心与球心重合。
2. 大圆的直径等于球直径，半径等于球半径。
3. 同球或等球上的大圆的大小相等。

4. 大圆等分球面和球体。

5. 同球上的两个大圆平面一定相交,交线是它们的直径,并且两大圆互相平分。

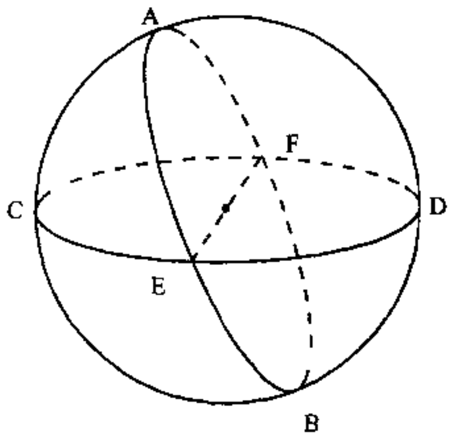


图 1-1-2

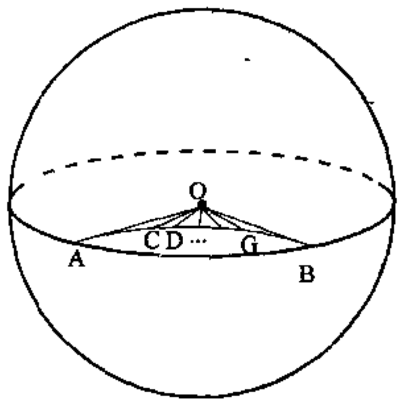


图 1-1-3

如图 1-1-2,*ABEF* 和 *CDEF* 是任意两个大圆。因为球心同时在这两个大圆面上,所以必在这两个大圆面的交线上,因此这个交线是这两个圆的公共直径。而圆的直径必平分该圆,所以这两个大圆互相平分。

6. 过球面上不在同一直径两端上的两个点,能作且仅能作一个大圆,却能作无数个小圆。若在同一直径两端上的两个点,则能作无数个大圆而不能作小圆。

7. 小于 180°的大圆弧(劣弧)是球面上两点间的最短球面距离。

如图 1-1-3,过球面上两点 A,B 作一大圆弧。过 A 和 B 取任意曲线 $\overset{\frown}{ACD\cdots GB}$,分成无穷小段的弧 $\overset{\frown}{AC}$,$\overset{\frown}{CD}\cdots\overset{\frown}{GB}$。因为这些弧是无穷小,都可以认为是大圆弧。连结 OA,OC,$OD\cdots OG$,OB,得一多面角 $O-ACD\cdots GB$。由立体几何知,多面角中,任一面角小于其它面角之和,则:

$$\angle AOB < \angle AOC + \angle COD + \cdots + \angle GOB$$

即
$$\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} + \cdots + \overset{\frown}{GB}$$

所以
$$\overset{\frown}{AB} < \text{球面曲线 } ACD\cdots GB$$

这就证明了小于 180°的大圆弧是球面上两点间的最短球面距离,因此,两点间的球面距离应用大圆弧度量(即两点间的球面距离以大圆距离为最短)。航海上,沿 AB 所走的最短航线叫大圆航线。

四、轴、极、极距、极线

垂直于任意圆面的球直径称为该圆(大圆或小圆)的轴(axis)。轴的两个端点称为极(pole),故每个圆均有两个极。垂直于同一轴可有无数个平行圆,其中只有一个通过球心的是大圆,其余的都是小圆。从极到圆(大圆或小圆)弧上任一点沿大圆弧的球面距离叫极距(polar distance),又叫球面半径。同一个圆的极距或球面半径都相等,如图 1-1-4,$\overset{\frown}{pa}=\overset{\frown}{pb}=\overset{\frown}{pc}=\overset{\frown}{pd}$。极距为 90°的大圆弧又称为该极的极线(equator)。如图 1-1-4,$\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{PB}=\overset{\frown}{PC}=\overset{\frown}{PD}$

$=90°$，$\overparen{ABCD}$为P或P'的极线。所以大圆弧是它的极的极线。反之，极线必定是大圆弧。

显然，如果球面上一点到某一大圆弧上任意两点间的球面距离都是90°，则这一点就是该大圆的极，而这个大圆则是该点的极线。

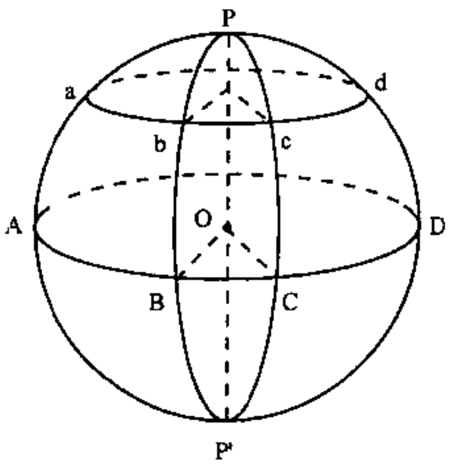


图 1-1-4

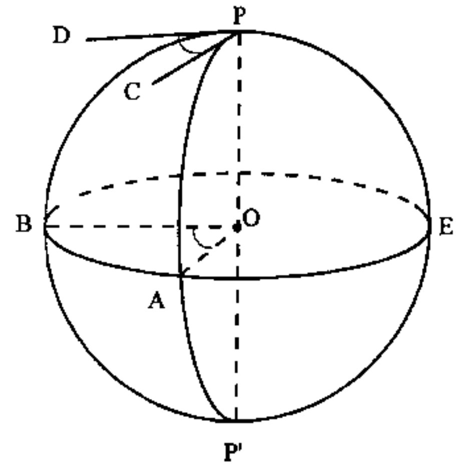


图 1-1-5

五、球面角及其度量

球面上两大圆弧相交构成的角称为球面角(spherical angle)，其交点叫球面角的顶点，两大圆弧称为球面角的边。如图1-1-5，大圆弧$\overparen{PA}$，$\overparen{PB}$相交于P点，构成球面角$\angle APB$，可简写为$\angle P$或P。其中P为顶点，$\overparen{PA}$，$\overparen{PB}$为其两边。$\overparen{EAB}$以球面角顶点P为极的极线。过P点作$\overparen{PA}$，$\overparen{PB}$的切线PC和PD，$\angle CPD$是两大圆弧平面相交构成的二面角，它等于球面角的大小。

如上所述，可得球面角的三种度量方法：

1. 切于顶点大圆弧的切线夹角$\angle CPD$；

2. 顶点的极线被其两边大圆弧所截的弧长$\overparen{AB}$；

3. 大圆弧$\overparen{AB}$所对的球心角$\angle AOB$。

六、圆心角相等的小圆弧与大圆弧之比

如图1-1-6，大圆弧$\overparen{AB}$与小圆弧$\overparen{ab}$的圆面互相平行，PP'为它们的轴。显然：

$$\text{圆心角}\angle AOB=\angle ao'b=\frac{\overparen{ab}}{ao'}=\frac{\overparen{AB}}{AO}=\text{圆心角(弧度)}$$

$$\frac{\overparen{ab}}{\overparen{AB}}=\frac{ao'}{AO}=\frac{ao'}{ao}=\sin\angle aoo'=\sin\overparen{pa}=\cos(90°-\overparen{pa})$$

所以
$$\overparen{ab}(\text{长度})=\overparen{AB}(\text{长度})\times\sin(\text{小圆极距})$$

即小圆弧长等于圆心角相等的大圆弧长乘以小圆极距的正弦函数。

如果大圆弧与小圆弧的圆面互相不平行，只要圆心角相等，上述关系式同样成立。

七、两大圆极之间的大圆弧所对的球心角等于该两大圆面的二面角

如图1-1-7，两大圆弧CD和CE相交于C点，构成球面角$\angle DCE$，A和B点分别是两大

圆面的极。由两大圆极之间的球心角$\angle AOB$和二面角$\angle DOE$，均等于$90° - \angle BOD$，所以$\angle AOB = \angle DOE = \angle DCE$。

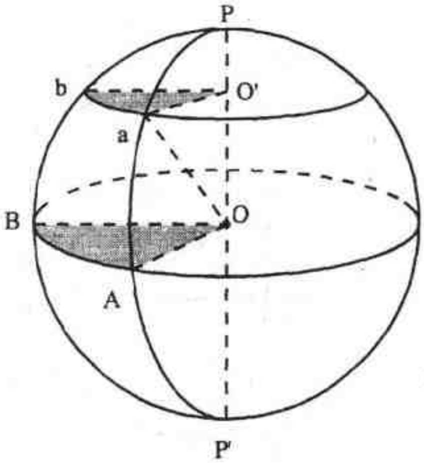


图 1-1-6

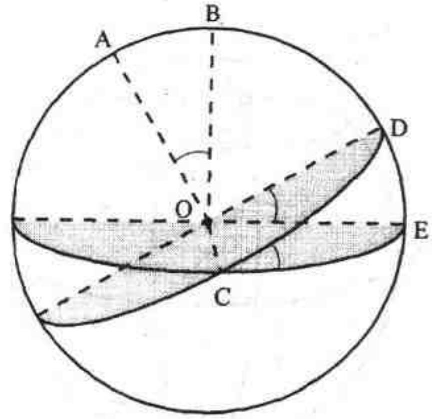


图 1-1-7

第二节 球面三角形

一、球面三角形的定义

在球面上由三个大圆弧所围成的三角形称为球面三角形(spherical triangle)。围成三角形的大圆弧称为球面三角形的边。由大圆弧相交所成的球面角称为球面三角形的角。如图 1-2-1。大圆弧$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$和$\overset{\frown}{CA}$围成一个球面三角形ABC。常用A,B,C表示球面三角形的三个角，三角的对边则相应地用a,b,c表示。这三个角A,B,C和三个边a,b,c合称为球面三角形的六要素。航海上讨论的球面三角形的六要素均大于0°，而小于180°，又称其为欧拉球面三角形。

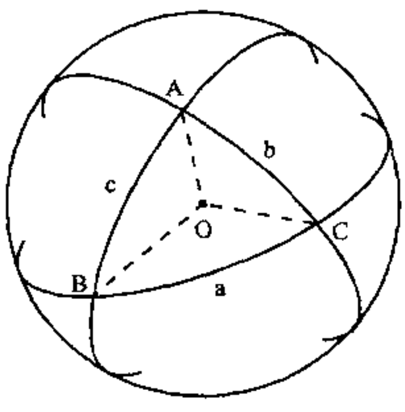


图 1-2-1

二、球面三角形分类

球面三角形分为直角、直边、等腰、等边、初等和任意三角形。

1. 球面直角三角形和球面直边三角形

至少有一个角为90°的三角形称为球面直角三角形。

至少有一个边为90°的三角形称为球面直边三角形。

2. 球面等腰三角形和球面等边三角形

球面三角形中，有两边或两角相等的三角形称为球面等腰三角形。三边或三角都相等的三角形称为球面等边三角形。

3. 球面初等三角形

三个边相对其球半径甚小的三角形称为球面小三角形。一边与其球半径相比甚小的三角形称为球面窄三角形。两者统称为球面初等三角形(primary triangle)。

4.球面任意三角形

凡不具备上述特殊条件的球面三角形称为球面任意三角形。

三、球面极线三角形

球面三角形 ABC 三个顶点的极线所构成的球面三角形 $A'B'C'$ 称为原球面三角形 ABC 的球面极线三角形(polar triangle)。

如图 1-2-2,以原球面三角形的三个顶点 A,B,C 为极,作极距等于 90°的三个极线 $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$,它们相交于三点,构成球面极线三角形 $A'B'C'$。若原球面三角形各边均小于 90°,则其极线三角形在原三角形之外,如图 1-2-2 所示。若原球面三角形各边均大于 90°,则其极线三角形在原三角形之内,如图 1-2-3 所示。若原球面三角形的一边或两边小于 90°,其余的边大于 90°,则其极线三角形与原三角形相交,如图 1-2-4 所示。

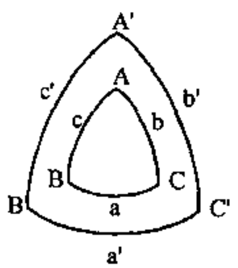


图 1-2-2

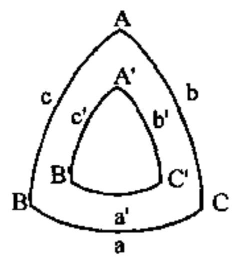


图 1-2-3

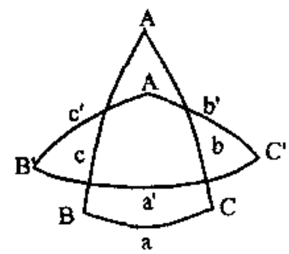


图 1-2-4

1.原三角形与其极线三角形是互为极线三角形

原球面三角形 ABC 的三个边,也就是其球面极线三角形 $A'B'C'$ 三个顶点的极线。换句话说,画极线三角形 $A'B'C'$ 的极线三角形,则所得到的就是原球面三角形 ABC。所以,它们之间的关系是相互的。

2.原球面三角形的边与其极线三角形对应角互补

原球面三角形的角与其极线三角形对应边互补,

即:

$$a + A' = 180^\circ \qquad b + B' = 180^\circ \qquad c + C' = 180^\circ$$

$$A + a' = 180^\circ \qquad B + b' = 180^\circ \qquad C + c' = 180^\circ$$

如图 1-2-5,$A'B'C'$ 是球面三角形 ABC 的极线三角形。将原三角形 BC 边向两侧延长,与其极线球面三角形的两边相交得大圆弧 ED,则 $A' = \overset{\frown}{ED}$。因为:

$$a + A' = a + \overset{\frown}{ED} = a + \overset{\frown}{EB} + a + \overset{\frown}{CD}$$

C 是 c' 的极　　$a + \overset{\frown}{EB} = 90^\circ$

B 是 b' 的极　　$a + \overset{\frown}{CD} = 90^\circ$

所以　　$a + A' = 180^\circ$

同理可证其它。

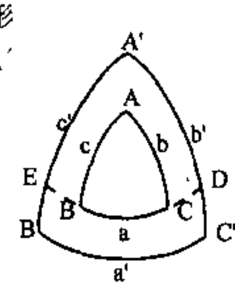


图 1-2-5

第三节 球面三角形的边角函数关系

一、球面任意三角形

1. 余弦公式

(1) 边的余弦公式

记忆口诀：**一边的余弦等于其它两边余弦的乘积，加上这两边正弦及其夹角余弦的乘积。**

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

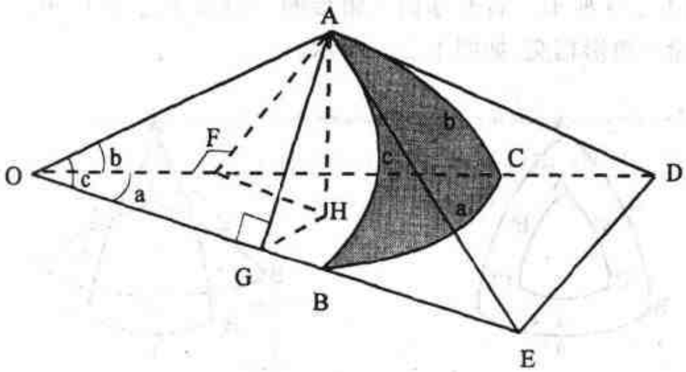


图 1-3-1

如图 1-3-1，从球面三角形 ABC 的顶点 A 作 b，c 两边的切线，并与 OC，OB 的延长线相交于 D，E 两点，构成了四个平面三角形。DA，EA 垂直于 OA，$\angle EAD = \angle A$。

在平面三角形 OED 中，由平面余弦公式得：

$$DE^2 = OE^2 + OD^2 - 2\ OE \cdot OD \cos a \tag{1-3-1}$$

同理，在平面三角形 AED 中有：

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2\ AE \cdot AD \cos A \tag{1-3-2}$$

在平面直角三角形 AOE 和 AOD 中：

$$OA^2 = OE^2 - AE^2 = OD^2 - AD^2 \tag{1-3-3}$$

用式(1-3-1)减式(1-3-2)并参看式(1-3-3)得：

$$0 = OA^2 + OA^2 - 2\ OE \cdot OD \cos a + 2\ AE \cdot AD \cos A$$
$$= OA^2 - OE \cdot OD \cos a + AE \cdot AD \cos A$$

整理得
$$\cos a = \frac{OA \cdot OA}{OD \cdot OE} + \frac{AD \cdot AE}{OD \cdot OE} \cos A$$

在平面直角三角形 AOE 和 AOD 中：

$$\cos b = \frac{OA}{OD} \qquad \cos c = \frac{OA}{OE}$$

$$\sin b = \frac{AD}{OD} \qquad \sin c = \frac{AE}{OE}$$

所以
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

边的余弦公式应用：已知两边及其夹角求对边；已知三边求三角。

(2)角的余弦公式

记忆口诀：**一角的余弦等于其它两角余弦的乘积冠以负号加上这两角正弦及其夹边余弦的乘积。**

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

角的余弦公式可由边的余弦公式和极线球面三角形的关系来证明。

角的余弦公式应用:已知两角及其夹边求对角;已知三角求三边。

2. 正弦公式

记忆口诀:**边的正弦与其对角的正弦成比例。**

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

如图 1-3-1,过球面三角形 ABC 的顶点 A 作 AH 垂直平面 BOC。再由 H 作 HG 垂直 OB,HF 垂直 OC,连结 AE 和 AF,可知 AG 垂直 OB,AF 垂直 OC。于是得到四个平面直角三角形 OAG,OAF,AHG,AHF。

因为
$$\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\dfrac{AF}{AO}}{\dfrac{AH}{AG}}=\frac{AG\cdot AF}{AH\cdot AO}\qquad \frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\dfrac{AG}{AO}}{\dfrac{AH}{AF}}=\frac{AG\cdot AF}{AO\cdot AH}$$

所以
$$\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

同理可证
$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}$$

因此
$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

正弦公式(sine formula)应用:已知两角及其一对边,求另一边;已知两边及其一对角,求另一角。

3. 边角正余弦公式(五联公式)

记忆口诀:**相邻边角正余弦乘积等于邻边第三边正余弦乘积减去邻边第三边余正弦及其夹角余弦之积。**

边角正余弦公式(sine - cosine formula)是由相连的三边两角共五个要素组成的,又称五联(five parts formula)公式,其记忆口诀可以通过图 1-3-2 和图 1-3-3 所示,写出相应的公式:

$$\sin a\cos C=\sin b\cos c-\cos b\sin c\cos A\qquad \sin a\cos B=\sin c\cos b-\cos c\sin b\cos A$$

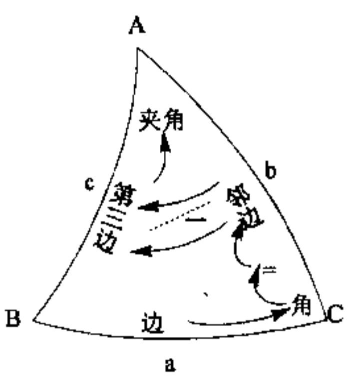


图 1-3-2

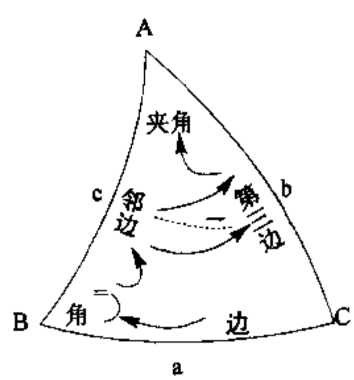


图 1-3-3

4. 余切公式(四联公式)

记忆口诀:**外边余切内边正弦乘积等于外角余切内角正弦乘积加上内边内角余弦之积。**

余切公式(cotangent formula)是由相连的两边两角共四个要素组成的,又称四联(four parts formula)公式,其记忆口诀可以通过图 1-3-4 和图 1-3-5 所示,写出相应的公式:

$$\mathrm{ctg}\,a\sin b=\mathrm{ctg}\,A\sin C+\cos b\cos C\qquad \mathrm{ctg}\,a\sin c=\mathrm{ctg}\,A\sin B+\cos c\cos B$$

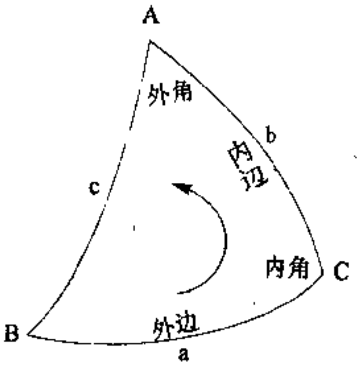


图 1-3-4

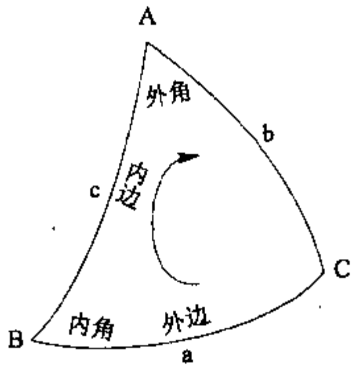


图 1-3-5

其证明如下:

由边角正余弦公式有 $\sin c\cos A = \sin b\cos a - \cos b\sin a\cos C$

或 $\cos a\sin b = \cos A\sin c + \sin a\cos b\cos C$

两边同除 $\sin a$ $\dfrac{\sin b\cos a}{\sin a} = \dfrac{\cos A\sin c}{\sin a} = \dfrac{\sin a\cos b\cos C}{\sin a}$

由正弦公式有 $\dfrac{\sin c}{\sin a} = \dfrac{\sin C}{\sin A}$

所以 $\mathrm{ctg}\,a\sin b = \mathrm{ctg}A\sin C + \cos b\cos C$

同理可证其它各式。

余切公式用于:在球面三角形中,已知相连的四个要素中的三个,求另一个要素。即已知两边及夹角求相连的角或已知两角及夹边求相连的边。

5.求解球面任意三角形

根据球面三角形已知要素求解其余要素的方法称为解球面三角形。解球面任意三角形必须知其三个要素,然后应用球面三角公式,求其余要素的值,见表 1-3-1。

解球面任意三角形 表 1-3-1

已　知	求	应用公式	说 明
两边夹角 a,b,C	第三边及其它两角 c,A,B	边的余弦公式求 c 四联公式求 A,B	有一确定解
两角夹边 A,B,c	第三角及其它两边 C,a,b	角的余弦公式求 C 四联公式求 a,b	
三边 a,b,c	三角 A,B,C	边的余弦公式	
三角 A,B,C	三边 a,b,c	角的余弦公式	
两边及其一边对角 a,b,A	求另一边和其它两角 c,B,C	正弦公式求 B 四联公式求 C,c	一解 两解 或 无解
两角及其一角对边 A,B,a	求另一角和其它两边 C,b,c	正弦公式求 b 四联公式求 c,C	

注:用正弦函数求值,在确定的 0°~180°范围内均为正值,必有两个解。这就需要判定符合条件的解,可能是一个也可能是两个,或者无解,而正弦函数本身是无法判定的。所以,尽量不用正弦函数来解算球面三角

形。

(1)使用计算器解算球面三角形时注意事项

①一般在处理角度问题时，计算器有三种角度单位供选择，即：度 DEG，弧度 RAD，公制度 GRAD。多数计算器开机后即处在 DEG 状态。

②球面三角形中，角或边都是以六十进制的度、分及分的小数给出的。利用计算器计算，在 DEG 状态下，一定要将角或边转换成以十进制的度为单位输入，SHARP 型用 $\boxed{\text{DEG}}$ 键，CASIO 型用 $\boxed{\circ,,,}$ 键完成上述转换，练习见表 1-3-2。仔细观察下例 1-3-1 中角度数值输入前的变化，弄懂操作中各键的作用。

转换练习　　表 1-3-2

例	SHARP(EL)型操作	CASIO(fx)型操作	显示
40°05′06″	40.0506 $\boxed{\text{DEG}}$	40 $\boxed{\circ,,,}$ 5 $\boxed{\circ,,,}$ 6 $\boxed{\circ,,,}$	40°.0850
30°00′45″	30.0045 $\boxed{\text{DEG}}$	30 $\boxed{\circ,,,}$ 0 $\boxed{\circ,,,}$ 45 $\boxed{\circ,,,}$	30°.0125
52°30′.3	52.3018 $\boxed{\text{DEG}}$	52 $\boxed{\circ,,,}$ 30.3 $\boxed{\circ,,,}$	52°.5050
35°30′	35.3 $\boxed{\text{DEG}}$	35 $\boxed{\circ,,,}$ 30 $\boxed{\circ,,,}$	35°.5000
14′.4	.1424 $\boxed{\text{DEG}}$	0 $\boxed{\circ,,,}$ 14.4 $\boxed{\circ,,,}$	0°.2400
14″.4	.00144 $\boxed{\text{DEG}}$	0 $\boxed{\circ,,,}$ 0 $\boxed{\circ,,,}$ 14.4 $\boxed{\circ,,,}$	0°.0040

③$\boxed{\text{X}\rightarrow\text{M}}$ 或 $\boxed{\text{Min}}$ 键是用来临时贮存数据的，然后分别用 $\boxed{\text{RM}}$ 和 $\boxed{\text{MR}}$ 键提取数据进行计算。

④用反函数求出的角度值，如下例 1-3-1 中显示的 115.4714249(或 115.47143)，仍是十进制的度，需要还原成六十进制的度、分、秒形式。SHARP 型按 $\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\text{DMS}}$ 键，CASIO 型按 $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\circ,,,}$ 键来完成上述操作。

⑤为使计算结果精确，计算中途不要随意四舍五入舍取小数点位数，尽量一次性按键完成计算。

(2)已知两边一夹角解球面三角形

已知球面三角形中的两边及其夹角，则该球面三角形可以完全确定，各要素只有一个解。这个问题在航海上经常遇到。

例 1-3-1：在球面三角形中，已知 $a=118°31'.1$，$b=50°20'.6$，$C=100°40'.8$，求 c，A。

解：根据已知条件写出边的余弦公式，利用计算器解算：

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

SHARP(EL)型操作： 118.3106 $\boxed{\text{DEG}}$ $\boxed{\text{x}\rightarrow\text{M}}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{\times}$ 50.2036 $\boxed{\text{DEG}}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{RM}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{\times}$ 50.2036 $\boxed{\text{DEG}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{\times}$ 100.4048 $\boxed{\text{DEG}}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ 显示 115.4714249 $\boxed{\text{2ndf}}$ $\boxed{\rightarrow\text{DMS}}$ 显示 115.2817129 (115°28′17″)所以 $c=115°28'.3$

CASIO(fx)型操作： 118 $\boxed{\circ,,,}$ 31.1 $\boxed{\circ,,,}$ $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{\times}$ 50 $\boxed{\circ,,,}$ 20.6 $\boxed{\circ,,,}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{\times}$ 50 $\boxed{\circ,,,}$ 20.6 $\boxed{\circ,,,}$ $\boxed{\sin}$ $\boxed{\times}$ 100 $\boxed{\circ,,,}$ 40.8 $\boxed{\circ,,,}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ 显示 115.47143 $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\circ,,,}$ 显示 115°28′17″ 所以 $c=115°28'.3$

根据四联公式

$$\text{ctg}\,a\sin b=\text{ctg}\,A\sin C+\cos b\cos C$$

所以 $\text{ctg}A = \text{ctg}a\sin b\csc C - \cos b\,\text{ctg}C$

SHARP 型操作：118.3106 DEG tan 1/x × 50.2036 DEG sin ÷ 100.4048 DEG x→M sin − 50.2036 DEG cos ÷ RM tan = 1/x 2ndF $\tan^{-1}$（显示 −73.01996985 这里应加 180）+ 180 = 2ndF DMS 显示 106.5848108 所以 $A = 106°58'48'' = 116°58'.8$

CASIO 型操作：118 °,,, 31.1 °,,, tan 1/x × 50 °,,, 20.6 °,,, sin ÷ 100 °,,, 40.8 °,,, Min sin − 50 °,,, 20.6 °,,, cos ÷ MR tan = 1/x INV $\tan^{-1}$ + 180 = INV °,,, 显示 106°58′48″ 所以 $A = 116°58'.8$

二、球面直角和直边三角形

1.球面直角三角形公式

有一个或一个以上的角为直角的球面三角形称为球面直角三角形（right-angled triangle）。下面只需讨论一个角为直角的球面直角三角形的边角函数关系。

设球面直角三角形 ABC 中，$C = 90°$。因为 $\sin 90° = 1$，$\cos 90° = 0$，可由球面任意三角形的基本公式，导出相应的球面直角三角形十个公式如下：

$$\sin a = \sin A\sin c \qquad \cos c = \text{ctg}A\,\text{ctg}B$$
$$\sin a = \text{ctg}B\,\text{tg}b \qquad \cos A = \sin B\cos a$$
$$\sin b = \sin B\sin c \qquad \cos A = \text{ctg}c\,\text{tg}b$$
$$\sin b = \text{ctg}A\,\text{tg}a \qquad \cos B = \sin A\cos b$$
$$\cos c = \cos a\cos b \qquad \cos B = \text{ctg}c\,\text{tg}a$$

如果不是 C 角而是 A 或 B 为直角，只需把公式中的字母适当改一下就行了。

（1）球面直角三角形公式的纳比尔记忆法则（大字法）

由于球面直角三角形公式较多，记忆困难，所以纳比尔设计出一图形及一套记忆法则。如图 1-3-6，在球面三角形 ABC 中，$C = 90°$。先画“大”字图形，大字上部竖线代表直角 C，相邻两侧为夹直角的两边 a 和 b，大字下面三个空格依次填入相对应元素边或角的余数（a 边对 $90° - A$，b 边对 $90° - B$，C 角对 $90° - c$）。

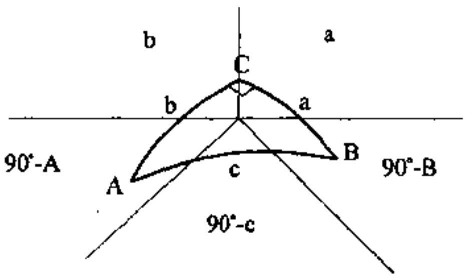


图 1-3-6

然后，按纳比尔记忆法则：**任一要素的正弦等于相邻两要素正切乘积或相对两要素余弦乘积**，就能直接写出球面直角三角形的有关公式。

例如：$(90° - c)$ 相邻两要素为 $(90° - A)$ 和 $(90° - B)$，相对两要素为 a 和 b，由记忆法则分别可写出两式：

$$\sin(90° - c) = \text{tg}(90° - A)\,\text{tg}(90° - B)$$
$$\sin(90° - c) = \cos a\cos b$$

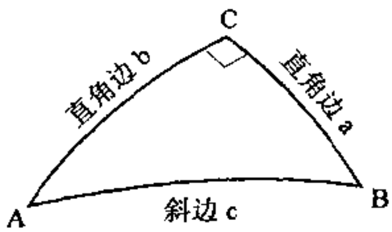
整理后两式为：$\cos c = \text{ctg}A\,\text{ctg}B \qquad \cos c = \cos a\cos b$

根据纳比尔法则还可以写出大字图中，其余四个要素的八个公式。

(2)球面直角三角形解法

球面直角三角形边角同样具有球面三角形的性质,任一要素取值应是 0°~180°范围内,即在 0°~90°象限或在 90°~180°象限内。若两要素在同一象限内,则表示这两要素同时小于 90°(Ⅰ象限)或同时大于 90°(Ⅱ象限),如表 1-3-3 所示,得出球面直角三角形的边角关系。

球面直角三角形边角关系　　表 1-3-3



边角性质	证明公式
若两直角边(a,b)在同一象限则斜边(c)小于 90°,若两直角边不在同一象限则斜边大于 90°	$\cos c = \cos a \cos b$
若斜边两邻角(A,B)在同一象限则斜边(c)小于 90°,若斜边两邻角不在同一象限则斜边大于 90°	$\cos c = \mathrm{ctg}A\,\mathrm{ctg}B$
直角边与其对角(a 和 A 或 b 和 B)在同一象限	$\cos A = \sin B \cos a$ $\cos B = \sin A \cos b$

例 1-3-2:球面三角形 ABC 中,已知 $C = 90°$,$a = 122°30'.4$,$A = 120°20'.3$,求 c,b,B。

解:根据已知要素和纳比尔法则,见图 1-3-7,注意一定要用已知要素 a,A 来求解其它各要素,以防出错。因此写出公式(等式右边均为 a 和 A)如下:

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$$

$$\sin b = \frac{\mathrm{tg}a}{\mathrm{tg}A}$$

$$\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$$

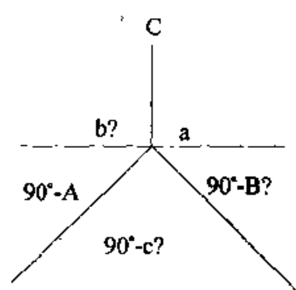


图 1-3-7

本题的未知要素都是用正弦函数求解,所以每个公式有两组解需判别(如果用余弦或正、余切公式,在 0°~180°内只有一个确定的解),经计算结果如下:

$c_1 = 77°43'.5$　　$c_2 = 102°16'.5$

$b_1 = 66°41'.8$　　$b_2 = 113°18'.2$

$B_1 = 70°02'.2$　　$B_2 = 109°57'.8$

已知 $A > C$,则 $a > c$,c 的两个解都成立。已知 $a > 90°$,$A > 90°$,即直角边与其对角同象限,则 b 与 B 必在同一象限,取 b 与 B 均小于 90°的值。这时因 $a > 90°$,$b < 90°$两直角边不在同一象限,则 $c > 90°$,所以:

$c = 102°16'.5$; $b = 66°41'.8$; $B = 70°02'.2$ 为一组解。

同理,若 $a > 90°$,$b > 90°$两直角边在同一象限则 $c < 90°$,所以:

$c = 77°43'.5$; $b = 113°18'.2$; $B = 109°57'.8$ 为另一组解。

2.球面直边三角形公式

有一个或一个以上的边为 90°的球面三角形称为球面直边三角形(quadrantal triangle)。

这里只需讨论只有一边为 90°的直边三角形边角函数关系。将直边代入球面三角形的基本公式,同样可推导出相应的十个球面直边三角形公式。

$\sin A = \sin a \sin C$　　$\cos C = -\cos A \cos B$

$\sin A = \mathrm{ctg}\, b\, \mathrm{tg} B$　　$\cos a = \sin b \cos A$

$\sin B = \sin b \sin C$　　$\cos a = -\mathrm{tg} B\, \mathrm{ctg} C$

$\sin B = \mathrm{ctg}\, a\, \mathrm{tg} A$　　$\cos b = \sin a \cos B$

$\cos C = -\mathrm{ctg}\, a\, \mathrm{ctg}\, b$　　$\cos b = -\mathrm{tg} A\, \mathrm{ctg} C$

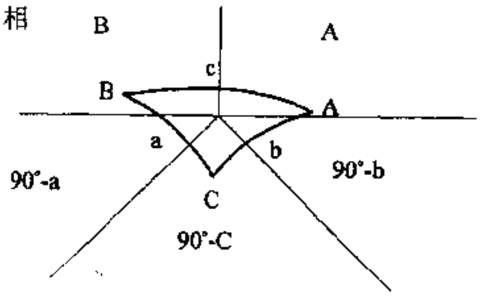


图 1-3-8

如果不是 c 边而是 a 或 b 为直边,只需把公式中的字母适当改一下就行了。

(1)纳比尔法则

球面直边三角形仍可采用纳比尔法则记忆。只是和球面直角三角形的法则略有区别。如图 1-3-8,画好"大"字图形,大字上部竖线代表直边 c,相邻两侧为夹直边的两角 B 和 A,大字下面三个空格同样依次填入相对应元素边或角的余数。

然后,按纳比尔记忆法则:**任一要素的正弦等于相邻两要素正切乘积或相对两要素余弦乘积,若等式右边为相同要素(均为边或均为角)时冠以负号。**

例如:$(90°-C)$相邻两要素为$(90°-a)$和$(90°-b)$,相对两要素为 B 和 A,由记忆法则可分别写出两式:

$$\sin(90°-C) = -\mathrm{tg}(90°-a)\mathrm{tg}(90°-b)$$
$$\sin(90°-C) = -\cos A \cos B$$

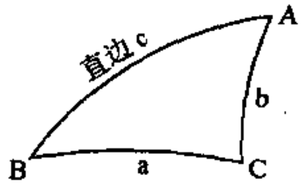
整理后得:　$\cos C = -\mathrm{ctg}\, a\, \mathrm{ctg}\, b$　　$\cos C = -\cos A \cos B$

根据该法则还可以写出大字图中其余四个要素的八个公式。

(2)球面直边三角形解法

球面直边三角形的公式、解算和判别与直角三角形非常相似。有关解法问题不详细阐述。对于球面直边三角形解的判别,同样要掌握其边角关系。表 1-3-4 所示为球面直边三角形的边角关系。

球面直边三角形边角关系　　表 1-3-4

	边角性质	证明公式
	若直边的两个邻角(A 和 B)在同一象限,则直边的对角(C)大于 90°,若直边的两个邻角不在同一象限则直边的对角小于 90°	$\cos C = \quad \cos A \cos B$
	若其它两边(a,b)在同一象限,则直边对角(C)大于 90°,若其它两边不在同一象限,则直边的对角小于 90°	$\cos C = -\mathrm{ctg}\, a\, \mathrm{ctg}\, b$
	直边的邻角(A 或 B)与它的对边(a 或 b)必在同一象限	$\cos a = \sin b \cos A$ $\cos b = \sin a \cos B$

例 1-3-3:在球面三角形 ABC 中,$c = 90°$,$A = 105°53'.2$,$a = 104°54'.7$,求 b,B 和 C。

解:根据已知要素和纳比尔法则,如图 1-3-9,写出公式

$$\sin b=\frac{\cos a}{\cos A}$$

$$\sin B=\frac{\mathrm{tg}A}{\mathrm{tg}a}$$

$$\sin C=\frac{\sin A}{\sin a}$$

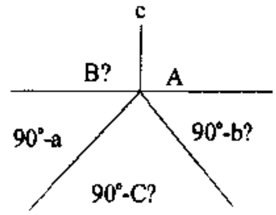


图 1-3-9

利用计算器解算两组解：

$b_1=70°03'.8$　　$b_2=109°56'.2$

$B_1=69°20'.2$　　$B_2=110°39'.8$

$C_1=84°27'.4$　　$C_2=95°32'.6$

根据直边三角形边角关系，从已知 $a>90°$，$A>90°$，即直边的邻角与它的对边必在同一象限，取 $b<90°$，$B<90°$，因直边的两邻角不在同一象限（$A>90°$，$B<90°$），则直边对角 $C<90°$，所以：

$C=84°27'.4$；$b-70°03'.8$；$B=69°20'.2$ 为一组解。

$C=95°32'.6$；$b=109°56'.2$；$B=110°39'.8$ 为另一组解。

三、球面初等三角形

1.球面小三角形

三边与其球半径相比均甚小的球面三角形称球面小三角形。其特性是：

(1)三边相对球半径甚小；

(2)三角不会很小；

(3)三角和接近 180°；

(4)其面积接近平面面积。

所以，一般可将球面小三角形视为平面三角形进行近似计算。航海上在视野范围内观测陆标定位，可以将球面三角形视为平面三角形来求解，计算结果也是相当精确的。

2.球面窄三角形

一边与其球半径相比甚小的球面三角形称为球面窄三角形。如图 1-3-10，ABC 为球面窄三角形，其特性是：

(1)一边 a 相对球半径甚小；

(2)小边的对角 A 也很小；

(3)另外两边的差很小（两边近似相等 $b\approx c$）；

(4)小边的邻角等于另一邻角的外角，$B\approx C_{外}$。

球面窄三角形在航海天文学中多处用到，经常遇到的是已知小边 a 与其邻角 B 及边 c，而需要求角 A 及边 b。

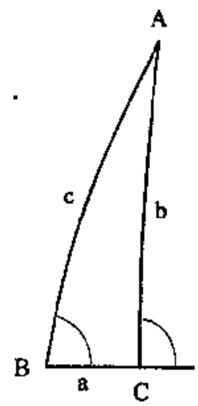


图 1-3-10

(1)求 b 边的第一近似公式和第二近似公式：

$(c-b)_1=a\cos B$　　其中脚注 1 表示第一近似值，下同。

$$(c-b)_2=a\cos B-2\cos c\sin b\left(\frac{a\sin B}{2\sin c}\right)^2=(c-b)_1-\frac{a^2}{2}\sin^2 B\,\mathrm{ctg}c$$

(2)求角 A 第一近似值和第二近似值公式

$$A_1=\frac{a\sin B}{\sin c}$$

在第一近似值不能满足高精度要求时，可求第二近似值。

$$A_2=\frac{a\sin B}{\sin c}+\frac{a\sin B}{\sin c}a\cos B\mathrm{ctg}c = A_1+\frac{a^2}{2}\sin 2B\mathrm{ctg}c\cos c$$

3. 度与弧度的换算

在航海专业课中经常用到度和弧度的换算，必须很好地掌握，其关系如下：

$$360^\circ=2\pi$$

$$1^\circ=\frac{2\pi}{360^\circ}=0.017453\text{ 弧度}$$

$$1\text{ 弧度}=\frac{360^\circ}{2\pi}\approx 57^\circ.3\approx 3\,438'$$

某一角，其值用度或分制单位表示为 x° 或 x'，用弧度制单位计量，则它们之间的关系为：

$$x\text{ 弧度}=\frac{x^\circ}{57^\circ.3}=\frac{x'}{3\,438'}$$

令

$$\mathrm{arc}1^\circ=(1^\circ\text{的弧度值})=\frac{1}{57^\circ.3}=0.01745\text{ 弧度}$$

$$\mathrm{arc}1'=(1'\text{的弧度值})=\frac{1}{3\,438}=0.00029\text{ 弧度}$$

上式则可写成：

$$x\text{ 弧度}=x^\circ\mathrm{arc}1^\circ=x'\mathrm{arc}1'$$

第二章　内插法

在航海数值计算中，经常要用到一些专用表册，这些表册都是按一定的函数关系编排的，如：$y=f(x)$。根据已知的 x 值，查表可求得 y 值。但是表内不可能一一列出全部 y 值，也就是说，所求的函数值 y 正好在两表列数值之间，这时利用表列数据间的引数求 y 值的方法称为内插法。已知引数求函数称为正内插，反之，已知函数求引数称为反内插法。按引数的个数可分为：单内插、双内插等等。从函数的性质看，又可分为线性内插、变率内插、高次内插等等。下面仅介绍在航海实际工作中比较常用的比例内插和变率内插。

第一节　比例内插（线性内插）

一、比例内插

1．比例单内插（一元函数）

$y=f(x)$

表 2-1-1

引数	函数值
x_0	y_0
x	y
x_1	y_1
…	…

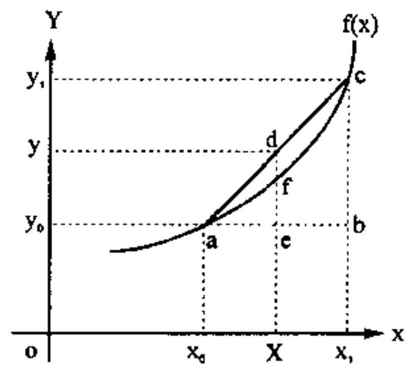


图 2-1-1

如表 2-1-1，现在要用比例内插（interpolation by proportional parts）求位于表列数值 x_0 和 x_1 间的引数 x 的函数值 y。

若把函数 $f(x)$ 在 (x_0,x_1) 看成线性函数进行内插。由图 2-1-1 可见，两三角形 abc 和 aed 相似，则对应边成比例，即：

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}(y_1-y_0)$$

$$=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

上式即是比例单内插（single proportional interpolation）计算公式。

比例单内插的几何意义：它是用表列引数两点的直线代替曲线进行内插，即以弦代替曲线进行内插。

由图 2-1-1 可看出，$f(x)$ 为线性函数（图形为直线），求得的 y 值没有误差；$f(x)$ 为非线性函数（曲线）时，求得的 y 值有 df 误差。因此：

（1）只要在误差允许的范围内，均可采用线性内插。