《高等数学》学习指导书

徐承煌 高国良 蒋红星 编

浙江大學出版社

《高等数学》学习指导书

徐承煌　高国良　蒋红星　编

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

《高等数学》学习指导书 / 徐承煌等编. —杭州：浙江大学出版社，2002.8
ISBN 7-308-03020-2

Ⅰ.高... Ⅱ.徐... Ⅲ.高等数学—高等教育—自学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 039926 号

责任编辑 邹小宁
出版发行 浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 金华科教彩印厂
开　　本 850mm×1168mm 1/32
印　　张 15.5
字　　数 389 千字
版　　次 2002 年 8 月第 1 版
印　　次 2002 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 0001—7000
书　　号 ISBN 7-308-03020-2/O・282
定　　价 20.00 元

内容简介

本书为高等专科学校、高等职业学校的学生学习高等数学或经济数学而写。书中内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数及其微分、重积分和线、面积分等十一章。每章由内容提要、例题、历年全国自学考试题选三部分组成。书末附有题选答案和 2000 年、2001 年成人高等学校专升本招生全国统一考试的“高等数学(一)试卷”及“高等数学(二)试卷”。

本书可作为高等专科学校、高等职业学校的学生学习高等数学或经济数学的辅导书，也可供参加全国自学考试或全国专升本考试的学生参考。

前　言

随着时代的发展，高等数学课程在高等教育中的地位越来越显得重要。针对目前高等专科学校、高等职业学校的高等数学和经济数学教学普遍存在着学时少、内容多的情况，不少学生在学习中感到一定的困难。为此我们编写了这本《高等数学》学习指导书，希望对高等专科学校和高等职业学校的学生在学习高等数学、经济数学时能提供有益的帮助，对参加自学考试或参加专升本考试的学生也可参考。

本书共有十一章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数及其微分、重积分和线面积分等。每章由内容提要、例题、历年全国自学考试题选三部分组成。编入历年全国自学考试题选的目的是使希望参加本科自学考试的学生对自学考试的内容及其深度有一个了解。另外本书附有 2000 年和 2001 年成人高等学校专升本招生全国统一考试的“高等数学(一)试卷”和“高等数学(二)试卷”，分别供工科类和经济类学生报考专升本时参考。

为了照顾不同层次学生的学习，书中一部分内容标有 * 号，这部分内容经济类专业的学生可不作要求。

在本书的编写过程中，我们采纳了浙江大学王兴华教授、上海交通大学胡毓达教授等提出的许多宝贵意见和建议，并得到了温州大学数学学院全体教师的大力支持和帮助，我们在此谨向他们

表示深深的谢意！

限于编者的水平，书中难免存在不当之处和错误，欢迎广大读者批评指正。

编　者

2002年7月于温州大学

目　录

第一章　函　　数

内容提要

1. 集合是数学中的一个重要概念. 我们把具有某种属性的一些对象的全体叫做集合,简称集. 集合一般用大写字母如 A,B,C 等来表示. 组成某集合的每个对象叫做集合的元素,集合的元素一般用小写字母如 a,b,c 等来表示. 元素与集合之间只存在属于或不属于两种关系,如果元素 a 属于集合 A,记作 $a \in A$;如果 a 不属于集合 A,记作 $a \notin A$. 包含或不包含是描述两个集之间的一种关系,如果 $a \in A$ 必有 $a \in B$,则称 B 包含 A,记作 $A \subset B$. 对于集合 A 和 B,如果 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$,称 A 与 B 相等,记作 $A = B$. 不含任何元素的集合,称为空集,记作 $\varnothing$.

常见的集合运算有:

集合 A 与 B 的并集

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

集合 A 与 B 的交集

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

集合 A 与 B 的差集

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\};$$

如果记 U 是全集,集合 A 的补集

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}.$$

具体见图 1.1.

2. 实数是数学中一个重要研究对象. 它可归纳为:

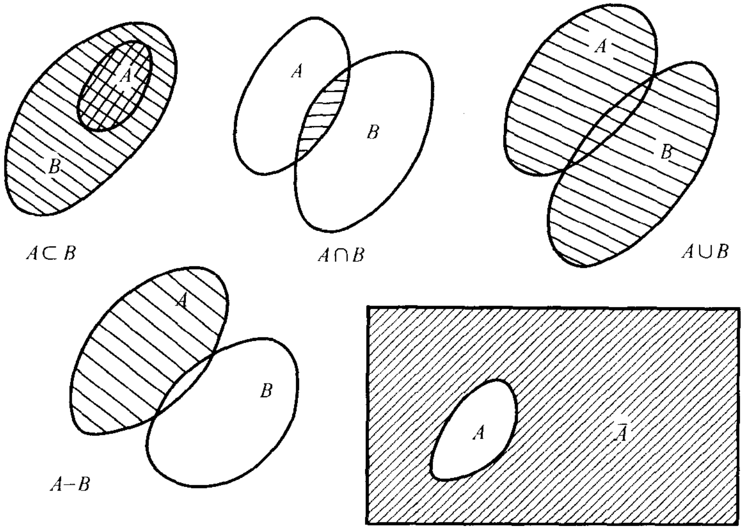

图 1.1

实数 $\begin{cases} 有理数 \begin{cases} 整数(即自然数、0\,和自然数的相反数) \\ 分数(即有限小数和无限循环小数) \end{cases} \\ 无理数:例如\,\sqrt{2},\sqrt{3},e,\pi,\cdots \end{cases}$

数轴上的一点表示一个实数,且点和实数是一一对应的,所以我们一般把点与数看成是等同的.

3.介于两个实数之间的全体实数称为区间,这两个实数称为区间的端点.开区间(a,b)表示满足不等式$a<x<b$的全体实数x的集合.

闭区间$[a,b]$表示满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的全体实数x的集合.

半开半闭区间$[a,b)$或$(a,b]$分别表示满足$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的全体实数x的集合.

无穷区间$(-\infty,+\infty)$表示全体实数的集合;而$(a,+\infty)$表

示大于 a 的全体实数的集合，同样可定义$(-\infty,b)$，$[a,+\infty)$ 及 $(-\infty,b]$.

如果 $\delta>0$，称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 是点 x_0 的 δ 邻域；而称 $(x_0-\delta,x_0)$ 与 $(x_0,x_0+\delta)$ 的并集 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 是 x_0 的去心 δ 邻域.

4. 一个实数 a 的绝对值

$$|a|=\begin{cases}-a, & a<0\\ a, & a\geqslant 0\end{cases}$$

即
$$|a|=\sqrt{a^2}$$

绝对值的常用性质主要有：

(1) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$；

(2) $|a|=|-a|\geqslant 0$；

(3) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

(4) $|a|-|b|\leqslant|a-b|$；

(5) $|ab|=|a|\cdot|b|$.

5. 若由条件 A 能推得 B，用 $A\Rightarrow B$ 表示，称 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件；若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，称 A 与 B 互为充分必要条件，或称 A 与 B 等价.

6. 函数的定义

如果当变量 x 在其变化范围内任取一个值时，变量 y 按某一定的规律总有确定的数值与它对应，就称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x) \text{ 或 } y=\varphi(x),y=F(x) \text{ 等.}$$

变量 x 的变化范围称为这个函数的定义域，一般记为 D. x 称为自变量，y 的取值范围称为函数的值域，y 称为 x 的函数，y 也称因变量，y 与 x 的关系称为函数关系.

所谓两个函数相同就是指它们的定义域相同并且对应的规律一样.

7. 函数的几种常见性态

(1) 设函数 $f(x)$ 对定义域 D 内任意 x 都有 $-x \in D$,若 $f(-x) = f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为偶函数;若 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的(见图 1.2);奇函数的图形是关于原点 O 对称的(见图 1.3).

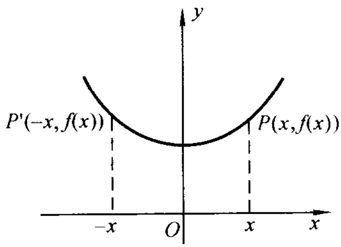

图 1.2

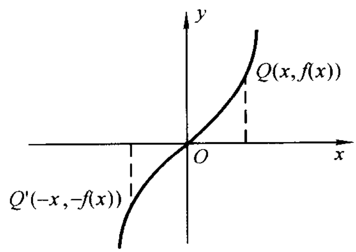

图 1.3

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,对 (a,b) 内任意两点 x_1, x_2,若 $x_1 < x_2$,有 $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加(单调减少)的函数(见图 1.4).

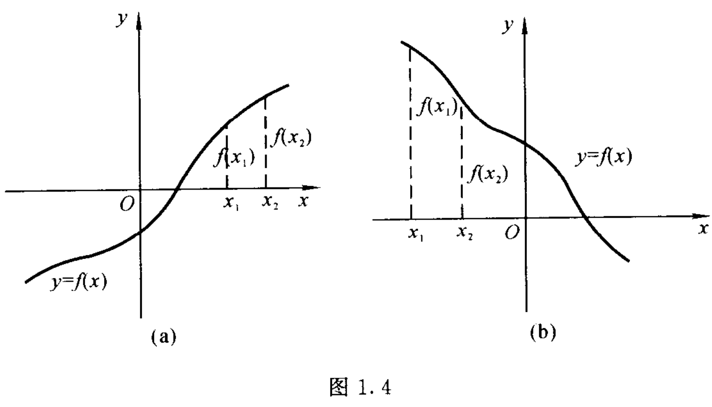

图 1.4

(3) 如果对于函数 $f(x)$,存在一个正数 T,使对定义域中的

任意 x，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 为函数的周期. 一般地，周期 T 是指具有这种性质的最小正数.

(4) 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得当 x 取 (a,b) 内任何一个值时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界. 反之，称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内无界.

8. 设有已给的 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，如果把 y 作为自变量，x 作为函数，所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $f(x)$ 的反函数. 一般地把函数 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=\varphi(x)$，或记为 $y=f^{-1}(x)$. 而称原来的函数 $y=f(x)$ 为直接函数. 直接函数 $y=f(x)$ 的图形和其反函数的图形是关于直线 $y=x$ 对称的(图 1.5).

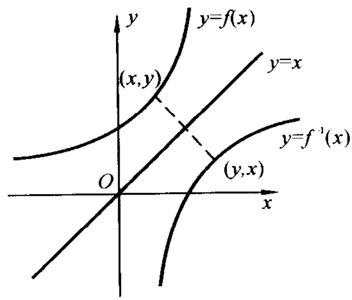

图 1.5

9. 对于反映函数与自变量关系的表达式，如果已经解出因变量为自变量的解析表达式，称为显函数；若未能解出因变量而只能由方程 $F(x,y)=0$ 来表示 x 和 y 之间的函数关系，这种形式确定的函数关系称为隐函数.

10. 基本初等函数包括：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

(1) 常数函数

$y=C$(C 是常数)，在 $(-\infty,+\infty)$ 上都有定义.

(2) 幂函数

形如 $y=x^{\nu}$(ν 是常数) 的函数称为幂函数. 它的定义域需根据 ν 的值而定，但不论 ν 取何值，在 $(0,+\infty)$ 上总有定义，且通过

点(1,1). 当$\nu>0$时,函数单调增加;当$\nu<0$时,函数单调减少(见图1.6).

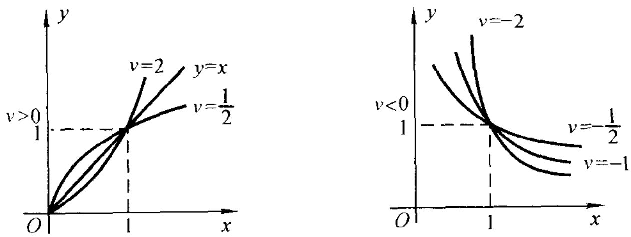

图1.6

(3) 指数函数

形如$y=a^x(a>0,a\neq 1)$的函数称为指数函数. 它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$(0,+\infty)$,其图形通过$(0,1)$. 当$a>1$时,函数单调增加;当$0<a<1$时,函数单调减少(见图1.7).

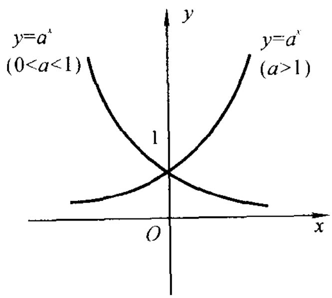

图1.7

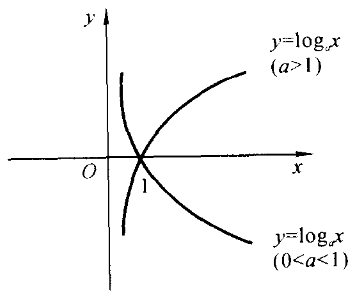

图1.8

(4) 对数函数

指数函数$y=a^x$的反函数,记作$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$,称为对数函数. 它的定义域是$(0,+\infty)$,值域是$(-\infty,+\infty)$,其图形通过点$(1,0)$. 当$a>1$时,函数单调增加;当$0<a<1$时,函数单调减少(见图1.8).

(5) 三角函数

① 正弦函数 $y=\sin x$ 定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $[-1,1]$. 它是周期为 2π 的有界奇函数(图 1.9).

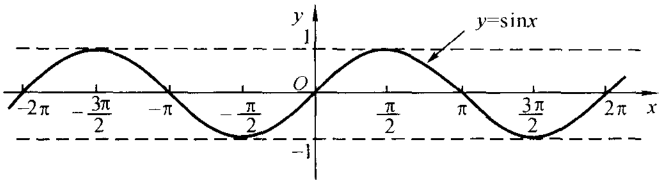

图 1.9

② 余弦函数 $y=\cos x$ 定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $[-1,1]$. 它是周期为 2π 的有界偶函数(图 1.10).

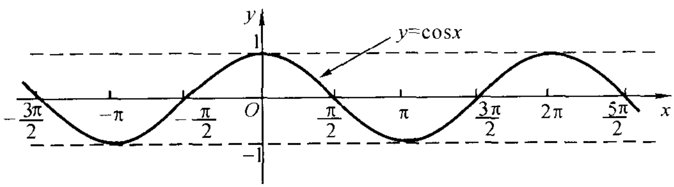

图 1.10

③ 正切函数 $y=\tan x$ 定义域是 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$. 它是周期为 π 的周期函数，是无界的奇函数(图 1.11).

④ 余切函数 $y=\cot x$ 定义域是 $(k\pi,(k+1)\pi)$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$. 它是周期为 π 的周期函数，是无界的奇函数(图 1.12).

(6) 反三角函数

① 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. 它是有界的单调增加的奇函数(图 1.13).

② 反余弦函数 $y=\arccos x$ 定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$.

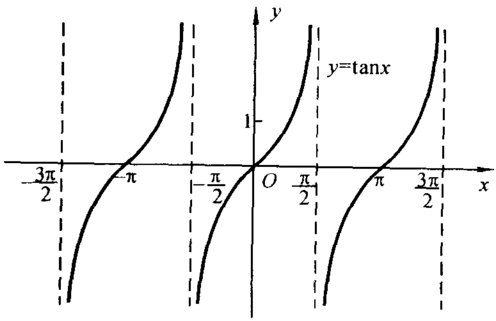

图 1.11

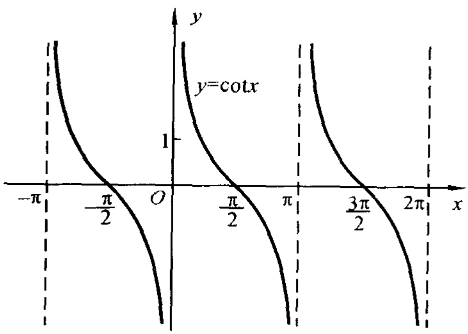

图 1.12

它是有界的单调减少函数(图 1.14).

③ 反正切函数 $y=\operatorname{arc}\tan x$ 定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. 它是有界的单调增加的奇函数(图 1.15).

④ 反余切函数 $y=\operatorname{arc}\cot x$ 定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$[0,\pi]$. 它是有界的单调减少函数(图 1.16).

11. 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,且 $\varphi(x)$ 的函数值域在函数 $f(u)$ 的定义域内,于是变量 y 通过 u 与变量 x 之间建立了对应关系,这种函数关系 $y=f[\varphi(x)]$ 称为函