大 學 數 學 教 本

大學微積分

編 著 者

李 定 文　　曹 建 國

興業圖書股份有限公司印行

大學數學教本

大學微積分

編著者

李定文

（國立成功大學數學系教授）

曹建國

（國立成功大學數學系教授）

興業圖書股份有限公司印行

中華民國 六十八年七月一日新版

大 學 微 積 分

基本定價六元五角

編 著 者：李 定 文・曹 建 國

發 行 人：王 志 康

出版登記證局版台業字第〇四一〇號

出 版 者：興業圖書股份有限公司

印 刷 者：廣 益 印 書 局

臺中市中正路九十七號

發 行 所：興業圖書股份有限公司

臺南市勝利路一一八號

自　序

大學微積分之原文書籍頗多，而完善之中文課本則甚缺乏，初讀者或不免因英文程度稍差研讀時感覺困難，爲彌補此一缺點，乃有編撰本書之動機。

本書編者對微積分已有廿年以上之教學經驗，于本課程有關重要理論之闡釋，力求詳備，務使讀者獲得充份之了解，似尙不失爲本書特色之一。

下册係參照國內外各大學課程標準教材編輯之，且與高等數學有呼應之效，藉便適合於各大學及獨立學院之採用，但以倉卒付梓，仍多疏漏之處，當於講授時另加補充，並於再版時修正之，尙希學者專家不吝指正。

編　者　識

目　　次

頁數

第一章

集合論 (Set Theory)

§1-1. 集合及部分集合 (Sets and subsets)

(i) 集合 (Sets)

集合的觀念,可應用到數學的每個部門內。集合,在表面上看來,爲一表列,分類,及組合。無論是有形的或者是無形的東西,均可用集合的觀念,加以整理,劃分,藉此作爲研究科學的主要工具。

今舉十個例子來確立集合的基本觀念:

(1)數字 1,3,7 及 10。

(2)方程式 $x^2-3x-2=0$ 之解答。

(3)英文之母音字母 a,e,i,o,u。

(4)地球上之人類。

(5)學生王志中、劉國鼎、及張建華。

(6)某校的逃課學生。

(7)英國、法國、及比利時。

(8)歐洲的主要都市。

(9)數字 2,4,6,8……。

(10)美國的所有河流。

上面(1)(3)(5)(7)(9)之例子,其集合之元素很容易確定,但(2)(4)(6)(8)(10)之例子,其元素不易確定。

(ii) **集合表示法 (Notion of Set)**

通常用英文之大寫字母來表示集合如

$$A, B, X, Y\cdots\cdots$$

但集合內的元素通常用小寫字母來表示如

$$a, b, x, y\cdots\cdots$$

今若集合 A 內有 4 個元素即 1，3，7，10，則可表示如下：

$A=\{1,3,7,10\}$

但若一集合內之元素，不易確定，僅敍述該元素之性質，如

$B=\{x \mid x$ 爲偶數$\}$

玆將前述之十個例子，用集合 A_1，A_2，……A_{10} 分別來表示之即

$A_1=\{1,3,7,10\}$

$A_2=\{x \mid x^2-3x-2=0\}$

$A_3=\{a,e,i,o,u\}$

$A_4=\{x \mid x$ 爲生存在地球上之人$\}$

$A_5=\{$王志中，劉國鼎，張建華$\}$

$A_6=\{x \mid x$ 爲逃課的學生$\}$

$A_7=\{$英國，法國，比利時$\}$

$A_8=\{x \mid x$ 爲歐洲之主要都市$\}$

$A_9=\{2,4,6,8\cdots\cdots\}$

$A_{10}=\{x \mid x$ 爲美國之一河流$\}$

若一元素 x 屬於集合 A，則記爲，

$$x\in A$$

但若一元素 x 不屬於集合 A 則記爲

$$x\notin A$$

例如，$A=\{a,e,i,o,u\}$ 則 $a\in A, b\notin A, e\in A, f\notin A$

$B=\{x|x$ 爲偶數$\}$則 $3\notin B, 6\in B, 11\notin B, 14\in B$

(iii) 有限集合及無限集合 (Finite and Infinite sets)

集合可分爲有限集合與無限集合，由直覺的觀念，顯然，凡一集合內包含有限個數的元素稱有限集合，凡一集合包含無限個數的元素即稱無限集合， 但對此二種集合之嚴正的定義， 以後當再加以論述之。

例 1. 設M爲一週內能包含的日數集合；此集合爲有限集合。

例 2. 設 $N=\{2,4,6,8\cdots\cdots\}$ 則N爲無限集合。

例 3. 設 $P=\{x|x$ 爲地球上之河流$\}$，雖然，地球上之大小河流很多，難以統計，但仍爲有限集合。

(iv) 集合之相等 (Equality of Sets)

A集合與B集合相等則A及B均含相同之元素。換言之，凡是屬於A之各元素均也屬於B，且記作

$$A=B$$

例 1. 若 $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{3,1,2,4\}$ 則 $A=B$。

例 2. 若 $C=\{5,6,5,7\}$ $D=\{7,5,5,6\}$ 則 $C=D$。

例 3. 若 $E=\{x|x^2-3x=-2\}$，$F=\{2,1\}$，及 $G=\{1,2,2,1\}$ 則 $E=F=G$。

(v) 空集合 (Null Set)

凡一集合不包含任一元素者謂之空集合記爲ϕ

例 1. 若 A 爲世界上活到 200 歲以上的人所組成的集合，根據統計資料則知A爲空集合。

例 2. 若 $B=\{x|x^2=4$，x爲奇數$\}$ 則B爲空集合。

(vi) **部分集合 (Subsets)**

集合A之每一元素均屬於B，則A爲B之部分集合。

$$A\subset B$$

例 1. 集合 $C=\{1,3,5\}$ 爲集合 $D=\{5,4,3,2,1\}$ 之部分集合，因C之每一元素均屬於D。

例 2. 集合 $E=\{2,4,6\}$ 爲集合 $F=\{6,2,4\}$ 之部分集合但F亦稱爲E之部分集合，實際上，$E=F$，因此可知每一集合均包含其本身爲部分集合。

例 3. 若 $G=\{x|x$ 爲偶數$\}$ 即 $G=\{2,4,6\cdots\}$ 但若 $F=\{x|x$ 爲 2 之正整數冪次$\}$ 即 $F=\{2,4,8,16\cdots\}$ 則 $F\subset G$，即F包含於G。

由以上部分集合之定義，再論及二集合之相等

定義： 二集合A及B相等，即 $A=B$，因此 $A\subset B$，及 $B\subset A$

若A爲B之部分集合，則記作

$$B\supset A$$

讀作"B爲包含A"

重點：

(1)空集合ϕ爲任一集合之部分集合

(2)若A不爲B之部分集合，記作 $A\not\subset B$，則A及B之元素無一相同者

(vii) **專有部分集合 (Proper Subset)**

因每一集合均包含其本身爲部分集合，因此，B爲A之專有部分集合即 $B\subset A$ 及 $B\neq A$

在有些書內"B爲A之部分集合"記作 $B\subseteq A$

"B爲A之專有部分集合"記作 $B\subset A$

(viii) **集合之比較 (Comparability of Sets)**

二集合A及B相比較，則若 $A\subset B$ 或 $B\subset A$,

但若 $A\not\subset B$ 及 $B\not\subset A$，則A及B不可比較

例 1. 若 $A=\{a,b\}$ 及 $B=\{a,b,c\}$

則A及B可比較，因A爲B之部分集合。

例 2. 若 $R=\{a,b\}$ 及 $S=\{b,c,d\}$

則R及S爲不可比較，因$a\in R$，$a\notin S$，$c\in S$，$c\notin R$。

(ix) 集合內之集合 (Sets of sets)

吾人經常遇到一個集合內所包含之元素仍爲集合，即集合內之集合，通常稱此種集合爲集合族（Family of sets）且以 α, β,……表示之

例 1. 幾何學內之直線族及曲線族均可視爲點之集合但每一點均可視爲一集合。

例 2. 集合 $\{\{2,3\},\{2\},\{5,6\}\}$ 爲一集合族，該集合包含三個元素 $\{2,3\}$，$\{2\}$，$\{5,6\}$，每一元素均爲集合。

理論上，一個集合所包含之元素，有的是集合，有的可不爲集合，例如，

$$A=\{2,\{1,3\},4,\{2,5\}\}$$

但A不能稱爲集合族

事實上，此種集合不常遇到，且在實用上沒有什麼價值。

(x) 廣集合 (Universal set)

廣集合爲一特定集合，且此集合包含很多部分集合，通常以U表示之

例 1. 平面幾何內之平面爲廣集合，該平面包含所有平面內之各點。