

大學數學教本

大學微積分

編著者

李定文 曹建國

興業圖書股份有限公司印行

大學數學教本

大學微積分

編著者

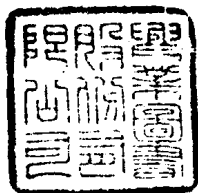
李定文

(國立成功大學數學系教授)

曹建國

(國立成功大學數學系教授)

興業圖書股份有限公司印行



版權所有・翻印必究

中華民國 六十八年七月一日新版

大學微積分

基本定價六元五角

編著者：李 定 文・曹 建 國

發行人：王 志 康

出版登記證局版台業字第〇四一〇號

出 版 者：興業圖書股份有限公司

印 刷 者：廣 益 印 書 局

臺中市中正路九十七號

發 行 所：興業圖書股份有限公司

臺南市勝利路一一八號

學校團體採用購買另有優待

自序

大學微積分之原文書籍頗多，而完善之中文課本則甚缺乏，初讀者或不免因英文程度稍差研讀時感覺困難，爲彌補此一缺點，乃有編撰本書之動機。

本書編者對微積分已有廿年以上之教學經驗，于本課程有關重要理論之闡釋，力求詳備，務使讀者獲得充份之了解，似尚不失爲本書特色之一。

下冊係參照國內外各大學課程標準教材編輯之，且與高等數學有呼應之效，藉便適合於各大學及獨立學院之採用，但以倉卒什梓，仍多疏漏之處，當於講授時另加補充，並於再版時修正之，尚希學者專家不吝指正。

編者識

目 次

頁數

第 一 章 集合論	1—39
§ 1-1 集合及部分集合	1
§ 1-2 集合之基本運算	13
§ 1-3 實數系	23
§ 1-4 集合理論	34
第 二 章 函數	40—62
§ 2-1 函數之定義	40
§ 2-2 鄰域及去心鄰域	44
§ 2-3 多變函數	45
§ 2-4 函數之類型	47
§ 2-5 函數之組合	48
§ 2-6 函數之平移及尺寸之變更	51
§ 2-7 函數動態	54
§ 2-8 曲線之斜率	58
第 三 章 極限	63—90
§ 3-1 一函數之極限定義	63
§ 3-2 極限定理	69
§ 3-3 連續性	81
§ 3-4 單邊極限	83

§ 3-5 無窮極限	85
------------	----

第四章 導數 91—132

§ 4-1 一個函數之導數	91
§ 4-2 速度及變率	94
§ 4-3 多項式函數及其導數	97
§ 4-4 有理函數之導數	105
§ 4-5 反函數之導數	110
§ 4-6 隱函數微分法	115
§ 4-7 一函數之增量	118
§ 4-8 複合函數	120
§ 4-9 複合函數之導數	122
§ 4-10 連續性	125
§ 4-11 微分 dx 及 dy	127

第五章 導數之應用 133—170

§ 5-1 切線及法線	133
§ 5-2 求方程式根之近似值	136
§ 5-3 增函數及減函數	139
§ 5-4 相對變率	143
§ 5-5 二階導數其符號之意義	146
§ 5-6 曲線之繪製	148
§ 5-7 函數之極值	155
§ 5-8 函數之相對極值	158
§ 5-9 極值之第二階導數檢驗法	160

§ 5-10 極值理論之應用.....	162
§ 5-11 洛爾定理.....	165
§ 5-12 均值定理.....	167
第 六 章 積分.....	171—198
§ 6-1 緒論.....	171
§ 6-2 不定積分.....	171
§ 6-3 不定積分之應用.....	176
§ 6-4 曲線下之面積.....	178
§ 6-5 利用積分求面積.....	183
§ 6-6 定積分及積分之基本定理.....	188
§ 6-7 黎曼和.....	194
§ 6-8 變數變換後其上下限隨之變換.....	197
第 七 章 三角函數及反三角函數.....	199—222
§ 7-1 正弦及餘餘之微分法.....	199
§ 7-2 正弦及餘餘之積分.....	204
§ 7-3 其他之三角函數.....	206
§ 7-4 反三角函數.....	212
§ 7-5 反三角函數之導數.....	218
第 八 章 積分之應用	223—240
§ 8-1 二曲線間之面積.....	223
§ 8-2 距離.....	227
§ 8-3 體積.....	228

§ 8-4	曲線之長度	232
§ 8-5	旋轉體之表面積	234
§ 8-6	功	236

第九章 指數及對數函數241—258

§ 9-1	自然對數	241
§ 9-2	$\ln x$ 之導數	242
§ 9-3	自然對數之性質	245
§ 9-4	$y = \ln x$ 之圖形	245
§ 9-5	指數函數	248
§ 9-6	a^x 及 $\log_a x$ 之函數	255
§ 9-7	對數微分法	256

第十章 雙曲線函數259—279

§ 10-1	緒論	259
§ 10-2	定義及恒等式	259
§ 10-3	雙曲線函數之導數及積分	205
§ 10-4	反雙曲線函數	271
§ 10-5	懸鏈	277

第十一章 積分方法 280—322

§ 1	基本積分公式	280
§ 2	分部積分法	285
§ 3	三角代換法	289
§ 4	有理函數積分	294

§ 5	$\sin x$ 及 $\cos x$ 之有理函數積分法及他種三角積分法	301
§ 6	根式函數積分法	304
§ 7	三角函數積分法	305
§ 8	變數分離微分方程式	310
§ 9	含有 ax^2+bx+C 之積分法	312

第十二章 連續之基本性質及可微分函數 323—343

§ 1	連續函數之界限	323
§ 2	高斯公式	325
§ 3	不定型	328
§ 4	假積分	337

第十三章 無窮級數 344—405

§ 1	無窮級數	344
§ 2	收斂及發散	350
§ 3	正項級數	344
§ 4	比較檢驗法	353
§ 5	P 級數	355
§ 6	積分檢驗法	357
§ 7	交錯級數	361
§ 8	絕對收斂	365
§ 9	比率檢驗法	367
§ 10	冪級數	372
§ 11	收斂半徑	377
§ 12	冪級數之導數與積分	379

§ 13	二項級數.....	383
§ 14	泰勒級數.....	387
§ 15	複數級數.....	394
§ 16	Fourier 級數.....	395

第十四章 平面曲線，向量及極坐標..... 406—431

§ 1	平面曲線.....	406
§ 2	曲線之連續性.....	410
§ 3	運動學內之參數方程式.....	421
§ 4	二維向量代數.....	416
§ 5	極坐標.....	421
§ 6	極坐標中之面積.....	425

第十五章 立體解析幾何..... 432—487

§ 1	點之三維空間.....	432
§ 2	三維向量空間.....	437
§ 3	空間中之線.....	444
§ 4	空間之平面.....	451
§ 5	三維空間之純量乘積及向量乘積.....	458
§ 6	柱體與旋轉面.....	464
§ 7	二次曲面.....	469
§ 8	向量函數之導數及空間曲線.....	473

第十六章 偏微分..... 488—521

§ 1	連續性	488
§ 2	方向導數	491
§ 3	高階偏導數	497
§ 4	偏導數之連鎖法則	501
§ 5	全微分	509
§ 6	切面及法線	511
§ 7	隱函數微分法	516
§ 8	二變數函數之極值	518
第十七章 多重積分		502—558
§ 1	重複積分	522
§ 2	二重積分	527
§ 3	利用二重積分求面積法	532
§ 4	極坐標	536
§ 5	三重積分	539
§ 6	重積分在物理上之應用	545
第十八章 線積分及曲面積分		559—582
§ 1	線積分之意義	559
§ 2	線積分運算	562
§ 3	線積分與功	566
§ 4	葛瑞定理	574
第十九章 線型代數		583—604

§ 1	n 維空間向量	583
§ 2	矩陣	588

第二十章 微分方程式 605—665

§ 1	緒論	605
§ 2	常微分方程式之形成	605
§ 3	曲線族	607
§ 4	邊界條件	609
§ 5	正合微分方程式	612
§ 6	微分符號	614
§ 7	齊次方程式	617
§ 8	第一階線性微分方程式	621
§ 9	應用	624
§ 10	第二階線性微分方程式	629
§ 11	非齊次線性微分方程式	634
§ 12	級數解	640
§ 13	偏微分方程式	644

第一章

集合論 (Set Theory)

§1-1. 集合及部分集合 (Sets and subsets)

(i) 集合 (Sets)

集合的觀念，可應用到數學的每個部門內。集合，在表面上看來，爲一表列，分類，及組合。無論是有形的或者是無形的東西，均可用集合的觀念，加以整理，劃分，藉此作爲研究科學的主要工具。

今舉十個例子來確立集合的基本觀念：

- (1) 數字 1, 3, 7 及 10。
- (2) 方程式 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 之解答。
- (3) 英文之母音字母 a, e, i, o, u 。
- (4) 地球上之人類。
- (5) 學生王志中、劉國鼎、及張建華。
- (6) 某校的逃課學生。
- (7) 英國、法國、及比利時。
- (8) 歐洲的主要都市。
- (9) 數字 2, 4, 6, 8 ……。
- (10) 美國的所有河流。

上面(1)(3)(5)(7)(9)之例子，其集合之元素很容易確定，但(2)(4)(6)(8)(10)之例子，其元素不易確定。

2 大學微積分

(ii) 集合表示法 (Notion of Set)

通常用英文之大寫字母來表示集合如

$$A, B, X, Y, \dots$$

但集合內的元素通常用小寫字母來表示如

$$a, b, x, y, \dots$$

今若集合 A 內有 4 個元素即 1, 3, 7, 10, 則可表示如下:

$$A = \{1, 3, 7, 10\}$$

但若一集合內之元素, 不易確定, 僅敘述該元素之性質, 如

$$B = \{x | x \text{ 爲偶數} \}$$

茲將前述之十個例子, 用集合 $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ 分別來表示之即

$$A_1 = \{1, 3, 7, 10\}$$

$$A_2 = \{x | x^2 - 3x - 2 = 0\}$$

$$A_3 = \{a, e, i, o, u\}$$

$$A_4 = \{x | x \text{ 爲生存在地球上之人} \}$$

$$A_5 = \{\text{王志中, 劉國鼎, 張建華} \}$$

$$A_6 = \{x | x \text{ 爲逃課的學生} \}$$

$$A_7 = \{\text{英國, 法國, 比利時} \}$$

$$A_8 = \{x | x \text{ 爲歐洲之主要都市} \}$$

$$A_9 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$A_{10} = \{x | x \text{ 爲美國之一河流} \}$$

若一元素 x 屬於集合 A , 則記爲,

$$x \in A$$

但若一元素 x 不屬於集合 A 則記爲

$$x \notin A$$

例如, $A = \{a, e, i, o, u\}$ 則 $a \in A, b \notin A, e \in A, f \notin A$

$$B = \{x | x \text{ 爲偶數}\} \text{ 則 } 3 \notin B, 6 \in B, 11 \notin B, 14 \in B$$

(iii) 有限集合及無限集合 (Finite and Infinite sets)

集合可分爲有限集合與無限集合，由直覺的觀念，顯然，凡一集合內包含有限個數的元素稱有限集合，凡一集合包含無限個數的元素即稱無限集合，但對此二種集合之嚴正的定義，以後當再加以論述之。

例 1. 設 M 爲一週內能包含的日數集合；此集合爲有限集合。

例 2. 設 $N = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ 則 N 爲無限集合。

例 3. 設 $P = \{x | x \text{ 爲地球上之河流}\}$ ，雖然，地球上之大小河流很多，難以統計，但仍爲有限集合。

(iv) 集合之相等 (Equality of Sets)

A 集合與 B 集合相等則 A 及 B 均含相同之元素。換言之，凡是屬於 A 之各元素均也屬於 B ，且記作

$$A = B$$

例 1. 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{3, 1, 2, 4\}$ 則 $A = B$ 。

例 2. 若 $C = \{5, 6, 5, 7\}$ $D = \{7, 5, 5, 6\}$ 則 $C = D$ 。

例 3. 若 $E = \{x | x^2 - 3x = -2\}$, $F = \{2, 1\}$, 及 $G = \{1, 2, 2, 1\}$ 則 $E = F = G$ 。

(v) 空集合 (Null Set)

凡一集合不包含任一元素者謂之空集合記爲 ϕ

例 1. 若 A 爲世界上活到 200 歲以上的人所組成的集合，根據統計資料則知 A 爲空集合。

例 2. 若 $B = \{x | x^2 = 4, x \text{ 爲奇數}\}$ 則 B 爲空集合。

4 大學微積分

(vi) 部分集合 (Subsets)

集合 A 之每一元素均屬於 B ，則 A 為 B 之部分集合。

$$A \subset B$$

例 1. 集合 $C = \{1, 3, 5\}$ 為集合 $D = \{5, 4, 3, 2, 1\}$ 之部分集合，因 C 之每一元素均屬於 D 。

例 2. 集合 $E = \{2, 4, 6\}$ 為集合 $F = \{6, 2, 4\}$ 之部分集合但 F 亦稱為 E 之部分集合，實際上， $E = F$ ，因此可知每一集合均包含其本身為部分集合。

例 3. 若 $G = \{x | x \text{ 為偶數}\}$ 即 $G = \{2, 4, 6, \dots\}$ 但若 $F = \{x | x \text{ 為 } 2 \text{ 之正整數冪次}\}$ 即 $F = \{2, 4, 8, 16, \dots\}$ 則 $F \subset G$ ，即 F 包含於 G 。

由以上部分集合之定義，再論及二集合之相等

定義：二集合 A 及 B 相等，即 $A = B$ ，因此 $A \subset B$ ，及 $B \subset A$

若 A 為 B 之部分集合，則記作

$$B \supset A$$

讀作“ B 為包含 A ”

重點：

(1) 空集合 ϕ 為任一集合之部分集合

(2) 若 A 不為 B 之部分集合，記作 $A \not\subset B$ ，則 A 及 B 之元素無一相同者

(vii) 專有部分集合 (Proper Subset)

因每一集合均包含其本身為部分集合，因此， B 為 A 之專有部分集合即 $B \subset A$ 及 $B \neq A$

在有些書內“ B 為 A 之部分集合”記作 $B \subseteq A$

“ B 為 A 之專有部分集合”記作 $B \subset A$

(viii) 集合之比較 (Comparability of Sets)

二集合 A 及 B 相比較，則若 $A \subset B$ 或 $B \subset A$ ，

但若 $A \not\subset B$ 及 $B \not\subset A$ ，則 A 及 B 不可比較

例 1. 若 $A = \{a, b\}$ 及 $B = \{a, b, c\}$

則 A 及 B 可比較，因 A 為 B 之部分集合。

例 2. 若 $R = \{a, b\}$ 及 $S = \{b, c, d\}$

則 R 及 S 為不可比較，因 $a \in R$, $a \notin S$, $c \in S$, $c \notin R$ 。

(ix) 集合內之集合 (Sets of sets)

吾人經常遇到一個集合內所包含之元素仍為集合，即集合內之集合，通常稱此種集合為集合族 (Family of sets) 且以 $\alpha, \beta, \dots$ 表示之

例 1. 幾何學內之直線族及曲線族均可視為點之集合但每一點均可視為一集合。

例 2. 集合 $\{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$ 為一集合族，該集合包含三個元素 $\{2, 3\}$, $\{2\}$, $\{5, 6\}$ ，每一元素均為集合。

理論上，一個集合所包含之元素，有的是集合，有的可不為集合，例如，

$$A = \{2, \{1, 3\}, 4, \{2, 5\}\}$$

但 A 不能稱為集合族

事實上，此種集合不常遇到，且在實用上沒有什麼價值。

(x) 廣集合 (Universal set)

廣集合為一特定集合，且此集合包含很多部分集合，通常以 U 表示之

例 1. 平面幾何內之平面為廣集合，該平面包含所有平面內之各點。