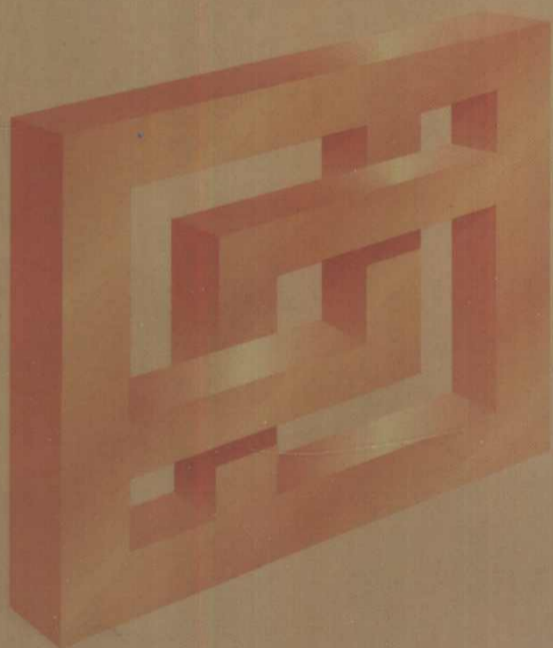




面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

材料力学



赵志岗 叶金铎 王燕群 亢一澜 编著



天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS



面向 21 世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

材 料 力 学

赵志岗 叶金铎 编著
王燕群 亢一澜



A1011859

天 津 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书是国家教育部立项的“面向 21 世纪力学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”课题成果之一。

本书力求在传授知识的同时注重科学素质与创新能力的培养，在阐述本学科知识的同时注重与相关学科的贯通、渗透与融合，重组课程体系，妥善处理本学科经典内容与现代科技成果的关系，注意启发式教学。

全书 3 篇 18 章，其中“基础篇”10 章，“扩展篇”5 章，“接口篇”3 章。“基础篇”是材料力学的基本内容；“扩展篇”在强度问题与能量原理等方面进行了扩展；“接口篇”注重反映科学技术新成果，为学习相关学科知识发挥接口作用。不同层次的内容适当组合，可满足工科院校各专业的教学要求。

本书可作为高等院校各专业的材料力学课程教材。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学/赵志岗等编著. —天津:天津大学出版社,
2001.8

面向 21 世纪课程教材

ISBN 7-5618-1480-1

I. 材… II. 赵… III. 材料力学—高等学校—教材
IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 049314 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印 刷 天津市宝坻县第二印刷厂
经 销 全国各地新华书店
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 27.75
字 数 693 千
版 次 2001 年 8 月第 1 版
印 次 2001 年 8 月第 1 次
印 数 1—3 000
定 价 34.50 元

前 言

本书是教育部立项的“面向 21 世纪力学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”课题的研究成果之一，是面向 21 世纪的基础力学系列课程教材。

材料力学是研究工程材料力学行为及构件强度、刚度、稳定性计算理论的科学，是工科专业本科教育中重要的技术基础课。本课程的知识既可直接应用于工程计算，又可为后继课程的学习奠定必要的理论基础，在对 学生进行工程意识与工程能力、科学素质及创新能力培养中具有极其重要的作用。因而，本课程的改革工作受到教育部及各院校领导的高度重视，“面向 21 世纪力学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”成为教育部首批立项课题之一。

研究课题的指导思想是：精简课程内容，重组课程体系，根据 21 世纪对高等工科人才素质的需求以及科学发展趋势，构筑适应我国科学技术及工业发展需要的力学知识构架，使受教育者具备比较宽厚的力学知识及较强的独立处理工程问题的能力，从而具备良好的科学素质与创新能力。课题的总体目标是：学时要少，内容要新，水平要高，效果要好。此外，要充分重视学生在学习过程中的主体地位，积极采用启发式教学。

基于以上的指导思想和总体目标，在改革实践的基础上，形成本书的特点。

①本书相对于原属于理论力学的课程模块工程静力学和工程动力学而言，是独立的课程模块，但也体现了相互贯通、融合与渗透的特点。将杆件的内力分析移入工程静力学，提高了课程内容起点（首讲剪力、弯矩图），将简单内容（轴力、扭矩图）列入自学内容，加强对 学生自学的指导，以培养学生的自学能力。

此外，本教材删掉了与工程动力学中相近和相似的内容，如稳态振动的动应力问题、惯性动应力问题等，同时，也删掉了属于后继课程的内容，如密封圈螺纹弹簧等，以符合对基本内容的教学要求。

②本教材打破了原课程体系按基本变形（拉、压、剪、扭、弯）小循环编排课程内容的方式，突出本课程的任务——研究工程材料的力学行为及构件强度、刚度、稳定性的计算理论，形成新的课程体系。

③本教材将选入的内容区分为三个二级模块——“基础篇”、“扩展篇”、“接口篇”。其中，“基础篇”是课程的基本内容，能适应中、少学时类型专业的教学基本要求。“扩展篇”深入研究薄壁杆件的切应力、构件及简单结构的塑性分析、疲劳强度等专题。为提高 学生解题能力与适应学习数值方法的要求，本篇还深入研究了能量原理及其应用，提出虚功恒等式的概念，揭示了能量原理

的数学实质。“接口篇”引入属于本课程范畴的、反映科技新成果的内容，如新型工程材料及其力学性能、回转体热应力、断裂力学及现代设计准则等。期望通过这些内容的学习，在某些方面突破材料力学的经典内容（如均匀、连续、各向同性材料模型、安全系数设计法等），能对继续学习有关知识、培养跳越式思维方式等方面起到接口作用。为尝试研究型的学习方法，本篇不再安排习题，建议以读书报告的形式进行考查。

④本教材注意启发式教学，重要之处标注启发式教学要点。同时，适当提高了例题的难度，以便于教师组织启发式教学。

⑤本书力求将基本概念阐述得科学、准确，将基本理论阐述得系统、全面，将基本方法阐述得通俗、易懂、易于学习。与此同时，书中注意加强解决综合问题能力的训练，力求使学习者的科学素质和创新能力能潜移默化地得到锻炼与提高。

本教材第3、6、7章由王燕群编写，第4、5、10章由叶金铎编写，第17、18章由亢一澜编写（其中第18章第8、9节由赵志岗编写），其余各章由赵志岗编写。

本教材承蒙天津大学杨海元教授、华中科技大学梁枢平教授审阅，提出了很多精辟而中肯的意见。在编写过程中，还得到天津大学教务处领导及机械工程学院、力学系领导及材料力学教研室的许多教师的帮助与支持，在此谨向他们致以衷心的感谢。书中的例题、习题广泛地选自各种版本的书籍与教材，恕不一一列出。谨此向参考文献中及被选例题与习题原书的全体作者表示衷心的感谢。

限于作者水平，书中难免有错误、不妥之处，希望广大同仁及读者不吝赐教。

编者

2000年6月于天津大学

目 录

基础篇

第 1 章 绪论与预备知识	(1)
1.1 材料力学的任务	(1)
1.2 工程材料模型公设	(2)
1.3 构件分类及研究对象	(3)
1.4 内力和应力	(4)
1.5 位移、变形和应变	(7)
1.6 胡克定律	(7)
习题.....	(8)
第 2 章 工程材料的基本力学行为	(10)
2.1 概述	(10)
2.2 低碳钢拉伸时的力学行为	(10)
2.3 铸铁与其他材料的拉伸力学行为	(13)
2.4 低碳钢和铸铁压缩时的力学行为	(14)
2.5 极限应力和许可应力	(15)
2.6 金属材料高温力学行为简介	(16)
2.7 加载速率对材料力学行为的影响	(18)
习题.....	(19)
第 3 章 截面设计的几何学基础	(20)
3.1 形心和截面一次轴矩	(20)
3.2 截面二次矩和惯性半径	(23)
3.3 组合截面二次轴矩	(26)
3.4 主惯轴系	(28)
习题.....	(33)
第 4 章 杆件基本变形的应力计算及强度设计	(37)
4.1 概述	(37)
4.2 轴向拉伸 (或压缩) 法应力	(39)
4.3 圣维南 (Saint-Venant) 原理和应力集中.....	(41)
4.4 圆轴扭转切应力	(43)
4.5 圆轴扭转的强度计算	(45)
4.6 矩形截面轴的扭转	(47)
4.7 平面弯曲横截面上的法应力	(48)
4.8 弯曲法应力强度设计	(51)
4.9 矩形截面梁的弯曲切应力及层间法应力	(53)

4.10	双材料叠层梁	(57)
4.11	连接构件与连接处的强度设计	(61)
4.12	基本变形的应力与强度 (讨论与再认识)	(64)
	习题	(65)
第 5 章	杆件基本变形的计算与刚度设计	(75)
5.1	概述	(75)
5.2	轴向拉伸 (或压缩) 的变形	(76)
5.3	静定桁架结点位移计算	(77)
5.4	圆轴扭转角及刚度设计	(79)
5.5	梁的变形及挠曲线近似微分方程	(81)
5.6	积分法计算梁的位移	(82)
5.7	叠加法计算梁的位移	(84)
5.8	广义固定端法计算梁的位移	(90)
5.9	梁的刚度设计	(91)
5.10	构件及其工作环境的合理设计	(93)
	习题	(96)
第 6 章	应力状态理论及强度理论	(101)
6.1	概述	(101)
6.2	两向应力状态的数学解析法	(101)
6.3	两向应力状态的图形解析法	(106)
6.4	三向应力状态简介	(110)
6.5	两向应力状态的电测试验应力分析	(113)
6.6	四个基本的强度理论	(115)
6.7	强度理论的应用	(118)
6.8	莫尔强度理论	(122)
	习题	(124)
第 7 章	组合变形的强度问题	(131)
7.1	组合变形与力的独立作用原理	(131)
7.2	斜弯曲	(132)
7.3	拉伸 (或压缩) 与弯曲的组合	(135)
7.4	弯扭组合变形	(138)
	习题	(144)
第 8 章	压杆及杆系结构的稳定问题	(151)
8.1	概述	(151)
8.2	细长压杆的临界力	(152)
8.3	临界应力及临界应力总图	(155)
8.4	压杆及杆系结构的稳定计算	(158)
8.5	关于压杆稳定问题的再认识	(164)
8.6	压杆稳定性的合理设计	(165)

8.7 纵横弯曲	(166)
习题	(167)
第9章 超静定问题的直接解法	(171)
9.1 概述	(171)
9.2 方法	(171)
9.3 关于变形谐调条件	(175)
9.4 变形比较法	(177)
9.5 位移法	(180)
9.6 装配应力和温度应力	(183)
9.7 联合超静定问题	(185)
习题	(187)
第10章 疲劳强度设计 (I)	(193)
10.1 交变应力与疲劳破坏	(193)
10.2 交变应力要素	(195)
10.3 材料的疲劳极限	(196)
10.4 构件的疲劳极限	(197)
10.5 对称循环疲劳强度设计	(201)
10.6 提高构件疲劳强度的措施	(203)
习题	(204)

扩展篇

第11章 薄壁杆件的切应力	(205)
11.1 概述	(205)
11.2 薄壁杆件的自由扭转	(206)
11.3 开口薄壁杆件的弯曲切应力	(210)
11.4 弯曲中心	(215)
11.5 闭口薄壁截面杆件的弯曲切应力	(217)
习题	(219)
第12章 构件与简单结构的塑性分析	(224)
12.1 工程材料的塑性简化模型	(224)
12.2 圆轴的弹塑性扭转	(225)
12.3 梁的弹塑性弯曲	(230)
12.4 塑性铰与极限载荷	(233)
12.5 超静定杆系结构的极限载荷	(238)
12.6 塑性极限设计	(243)
习题	(246)
第13章 疲劳强度设计 (II)	(250)
13.1 疲劳极限图	(250)
13.2 非对称循环疲劳强度设计	(251)

13.3	弯扭组合变形的疲劳强度设计	(254)
13.4	非稳定交变应力累积损伤理论简介	(258)
	习题	(259)
第 14 章	能量原理	(263)
14.1	应变能与余应变能	(263)
14.2	杆件的应变能	(265)
14.3	克拉贝隆定理	(267)
14.4	互等定理	(268)
14.5	卡氏定理和克劳迪—恩格塞定理	(270)
14.6	单位载荷法	(275)
14.7	图形互乘法	(279)
14.8	虚功恒等式	(284)
14.9	虚位移原理	(286)
14.10	虚力原理	(288)
14.11	最小势能原理	(291)
	习题	(294)
第 15 章	能量原理的应用	(302)
15.1	变形比较法的能量原理描述	(302)
15.2	力法正则方程	(303)
15.3	结构对称性的力学特征	(306)
15.4	超静定结构的最小功原理	(310)
15.5	能量守恒原理求解冲击问题	(313)
15.6	压杆稳定问题的能量原理解法	(319)
	习题	(321)

接口篇

第 16 章	回转体构件的热应力	(328)
16.1	概述	(328)
16.2	薄圆盘热应力问题的基本方程	(329)
16.3	厚壁圆筒热应力问题的基本方程	(330)
16.4	位移解法	(331)
16.5	两类平面热应力问题的解答	(332)
16.6	热应力问题的实例	(334)
16.7	球对称热应力问题的基本方程及解答	(337)
16.8	球体的热应力	(339)
16.9	空心球体热应力的实例	(340)
16.10	实心球体非定常热应力	(342)
第 17 章	新型工程材料力学性能简介	(344)
17.1	高分子材料	(344)

17.2	高分子材料的力学性能实验	(349)
17.3	复合材料	(354)
17.4	功能材料简介	(363)
第 18 章	断裂力学及现代设计准则简介	(366)
18.1	断裂力学概述	(366)
18.2	裂纹尖端附近的应力和位移及应力强度因子	(367)
18.3	能量释放率与 $G-K$ 关系式	(371)
18.4	小范围屈服及准脆性断裂	(372)
18.5	断裂韧度测量简介	(375)
18.6	断裂力学在疲劳裂纹扩展问题中的应用	(377)
18.7	脆性及准脆性断裂力学的应用和抗断设计的概念	(380)
18.8	可靠性设计简介	(381)
18.9	优化设计简介	(384)
附录 A	杆件的内力及内力图	(388)
附录 B	材料力学发展大事记	(405)
附录 C	型钢规格表	(407)
	习题答案	(417)
	参考文献	(431)

基础篇

第1章 绪论与预备知识

1.1 材料力学的任务

材料力学是研究工程材料的力学行为及构件安全工作设计理论的学说。工程材料的力学行为通常理解为材料在受载时所表现出来的有关破坏、变形的行为。

机械、土木以及其他工程结构都是由零、部件通过一定的连接方式组装而成的。这些零、部件统称为构件。结构工作时，任一构件通常都会受到载荷的作用。如机床加工零件时，主轴受到齿轮啮合力和切削力的作用；建筑物的梁和柱要承担建筑物及相关物体传递给它们的各种载荷的作用等。为保证这些结构能正常工作，就要求每一个构件均能正常工作。因此，在设计这些构件时，必须使其具有必要的承载能力，才能满足使用的要求。这种承载能力通常表现为如下三个方面。

1.1.1 具有必要的强度

为了保证构件的正常工作，首先必须保证在工况载荷作用下不发生破坏。此处所说的破坏，通常是指断裂或产生过大的永久变形而失效。如机床主轴在工作时不应断裂；高压容器在内部压力的作用下不能破裂；螺栓也不能产生过大的永久变形而失去连接作用等。构件抵抗破坏的能力称为强度。构件只有具备必要的强度才能保证正常工作，由于不满足强度要求而发生的失效，通常称为强度失效。

1.1.2 具有必要的刚度

构件受载时通常会产生变形。当载荷完全除去后，可完全消失的变形称为可恢复变形或弹性变形，反之称为永久变形或塑性变形。这里所说的刚度，是构件抵抗弹性变形的能力。构件受载后，如产生过大的弹性变形必然会影响结构的正常工作。如机床的主轴变形过大会影响齿轮的正常啮合或会引起轴承的非正常磨损，同时还会降低零件的加工精度等。建筑物的构件变形过大，有时会引起建筑物不必要的振动，或其他各种不良的影响等。这些情况在工程中都是不允许的，因而在设计构件时，应使其具有必要的抵抗弹性变形的能力，此种抵抗弹性变形的能力称为刚度。要使构件能安全工作，应使其具有必要的刚度。构件因不满足刚度条件而不能正常工作，称为刚度失效。

1.1.3 具有必要的稳定性

除上面所讲到的强度和刚度外，对于一些受压缩载荷作用的柔韧构件，还会遇到如下的问题：一个细长的杆件，受到沿其轴向压缩载荷的作用，当该载荷超过某个数值之后，若受

到微小扰动，杆件会突然侧弯偏离原有的平衡构形，工程中将构件保持原有平衡构形的能力，称为稳定性。杆件受轴向压缩突然侧弯偏离原有的平衡构形称为丧失稳定，或称为稳定失效。其他形状的柔韧构件也有类似的失效行为。历史上曾发生多起因构件失稳引起的灾难性事故，因而这是一种非常危险的失效行为，是工程中不允许出现的。因此在设计此类构件时，应使其具有必要的稳定性。

强度、刚度和稳定性是构件设计时必须考虑的三个问题，但对于不同的构件及不同的工况，又会有所侧重和区别，今后在课程内容中将会详细介绍。对于上述三个因素，我们使用了“必要的”，以区别于通常使用的“足够的强度、刚度和稳定性”，目的在于警示读者。安全性的要求和经济性的要求是一对矛盾，在满足“必要强度、刚度和稳定性的要求”的前提下，应尽可能降低构件的造价，也是构件设计必须遵从的原则之一。

所有的构件都是由某种工程材料制成的，为使构件具有“必要的强度、刚度和稳定性”，除应研究有关的计算理论外，还应研究工程材料的有关力学行为，以指导构件设计时正确地选择材料。

综上所述，材料力学课程的任务是学习和研究工程材料的力学行为及构件强度、刚度和稳定性的计算理论，从而为构件选用适宜的材料，设计科学、合理的截面形状和尺寸，使设计达到既安全又经济的要求。

1.2 工程材料模型公设

材料是人类生产和生活等一切活动的物质基础。人类文明史证明，生产中所使用的材料直接反映了社会生产力发展的水平和人类社会的文明程度。众所周知，人类历史上曾有石器时代、青铜器时代、铁器时代等。当前，工程材料已经进入一个五彩缤纷的时代，无机非金属材料、黑色及有色金属材料、各种复合及人工合成材料等均得到非常广泛的应用。

材料力学既不研究材料的物质结构及制备方法，也不研究其物理、化学性能及工艺性能等。本课程研究材料的力学行为，亦即材料在载荷作用下所表现的有关变形和破坏的行为，构件在本课程中通常被如实地视为可变形固体。

根据本课程的任务，在建立材料的计算模型时，须抓住与被研究问题有关的主要因素，舍弃一些对问题本质和研究结果影响不大的次要因素，对可变形固体的材料性质作某些公设——公认正确的假设，将其抽象为理想化的模型。本课程在多数情况下，对此模型有如下公设。

(1) 连续性公设

此公设认为组成可变形固体的材料毫无空隙地充满它所占据的空间。从物质的微观结构讲，组成可变形固体的粒子之间并不连续，但它们之间的空隙与构件的尺寸相比极其微小，将其忽略不计，不会影响问题的本质及研究结果。

(2) 均匀性公设

此公设认为组成可变形固体的同一种材料在其体积内各处的力学性能相同。对工程中使用最多的金属材料而言，其各个晶粒以及晶粒间界的力学性能并不完全相同，但在构件或其被研究部分的体积中，由于晶粒体积很小，晶粒数目极其巨大且排列杂乱，材料所表现出来的实际上是无数晶粒性能的统计平均值。将材料的力学性能看做是均匀的，所得的各种研究结果可以满足工程的需要。

(3) 各向同性公设

此公设认为材料的力学性能并不具有方向性，亦即在各个方向上具有同样的力学性能。具备此种性能的材料多为金属材料，若说到金属的单一晶粒，其力学行为肯定是具有方向性的，大量杂乱无章排列的晶粒所表现出来的宏观性能，其方向性应可忽略。

进入 20 世纪以来，随着科学技术的飞速发展，各种新材料相继出现，并得到日益广泛的应用，如各种高分子材料、复合材料、功能材料等。这些材料在某些方面表现出与上述公设并不相同的力学行为，如非均匀性、各向异性等。即使各向同性材料，也发现它存在各种宏观缺陷，并不完全满足连续性公设。尽管如此，符合上述三公设各向同性体材料的力学行为知识仍是研究这些新材料的力学行为知识的基础。作为面向 21 世纪的教学改革教材，本书将在“接口篇”中用适当的篇幅对这些材料进行简单的介绍，以期对读者今后深入学习有关的内容打下必要的基础。

(4) 小变形公设

可变形固体在外力作用下要产生变形，对各种不同情况，变形可能很小，也可能相当大。在材料的力学行为研究中因为要研究材料的失效条件，可能会涉及到较大变形。但本课程对于一般的计算方法和理论限于研究小变形。所谓小变形是指变形数值远远小于构件尺寸，因变形很小，可作如下简化：

①材料的力学性能是弹性的，全部变形都是可恢复的。个别章节讲到永久变形问题时，将事先说明。

②在讨论结构（材料力学中会涉及到简单结构的计算问题）、构件或材料微体平衡问题时，忽略变形对平衡方程的影响。也可以这样说，在本课程中大多数情况下，凡涉及到平衡问题，仍采用刚体模型。对于需要修正此种说法的问题，在研究该问题时给予专门说明。

在本课程所研究的同一个问题中，多数都既有平衡问题，又有变形问题，两者是同一个问题的两个不同侧面。针对不同的研究内容采用了不同的材料模型——刚体和可变形固体，这是一种辩证的统一。因而不能将两种材料模型对立起来，它们是同一个物体在不同研究内容中的简化模型，当然这种简化应以不影响问题的本质和所得到的研究结果能符合工程要求为原则。

③杆件的变形可能是很复杂的，但可分解为若干基本变形的叠加。个别不能分解为基本变形叠加的问题，也将在研究该问题时予以说明。

本课程由于采用了上述四个公设，从而抓住了待研究问题的本质，摒弃了一些次要的影响因素，建立了相对较为简单的数学模型，便于研究、便于求解。读者目前对此可能不会有深刻的理解，今后将在课程学习过程中深入介绍上述公设对建立求解模型的作用。

1.3 构件分类及研究对象

为了满足不同使用功能的需要，构件的形状是多种多样的。鉴于研究的需要，对构件的形状也应抓住其主要特征，使之模型化。通常为可归纳为如下三类。

1) 杆 凡是一个方向（通常称为长度）的尺寸远大于其他两个方向尺寸，且另两个方向尺寸相近的构件称为杆，如图 1-1(a)。垂直于杆件长度方向的截面叫做横截面，横截面形心的连线称为杆的轴线，轴线是直线的杆件叫做直杆，否则叫做曲杆。各横截面形状和尺寸不改变的杆件叫等截面杆，否则叫变截面杆。

2) 板和壳 如果构件的一个方向尺寸远小于其他两个方向的尺寸，且其他两个方向尺

寸相近的构件称为板或壳，如图 1-1 (b)。较小的尺寸叫做厚度，平分厚度的面称为中面，中面为平面的构件叫做板，中面为曲面的构件叫做壳。研究板、壳构件的强度、刚度与稳定性计算理论的学说称为板壳理论。

3) 块体 三个方向尺寸没有显著区别的构件称为块体，如图 1-1 (c)。研究块体构件计算理论的学说称为弹塑性理论。

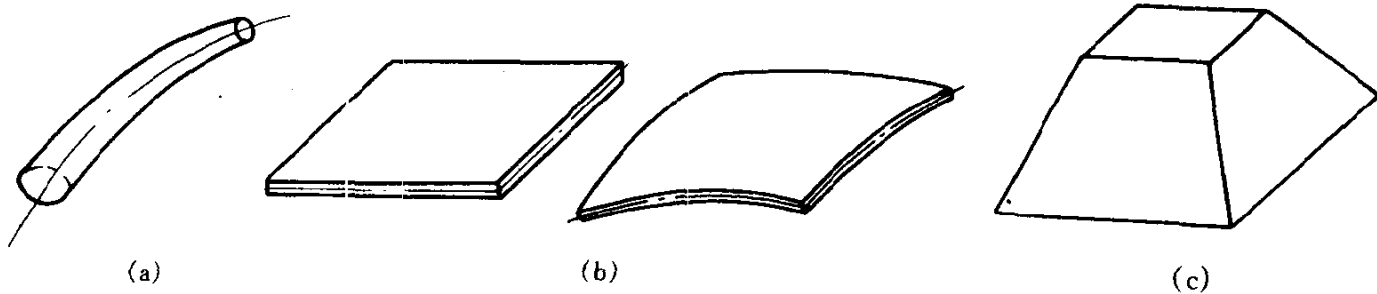


图 1-1

上述三类不同的构件及相应的计算理论既有联系也有很大的差别。板、壳及块体构件均不是本课程的研究对象，只有杆件是本课程的研究对象。杆件的强度、刚度和稳定性计算理论是本课程的研究内容，并以研究等直（轴线为直线的等截面）杆件的计算理论为主。“接口篇”将介绍非杆件的若干简单问题，目的在于为自学这些问题奠定必要的基础。

工程中杆件的变形可能是很复杂的，由于小变形公设，大多数情况下可将复杂的变形分解为若干种简单的基本变形的叠加。构件的基本变形有：①轴向拉伸或压缩；②扭转；③弯曲；④剪切。以扭转变形为主的构件又可称为轴，以弯曲变形为主的构件则称为梁，受压的杆件通常又可称为柱。在第 4 章中将讲述杆件基本变形的科学定义。

1.4 内力和应力

1.4.1 内力、应力

固体具有保持其形状的性能，因而在固体材料的各部分之间必然存在保持其形状必需的亲和力。一般当物体受到载荷作用时形状要发生改变，各质点的位置也要发生相应的变化，材料各部分之间的互相作用也会发生变化，这种变化的作用趋势是使各质点回到初始位置，使物体恢复原有的形状。除了加载之外，其他原因也会引起材料各部分之间互相作用的改变，如物体感受温度变化且变形受阻时等。此种由于外部原因，引起物体内部各部分之间互相作用力的改变量，称为内力。

物体两部分之间相互作用的内力总是成对存在的，要揭示和计算此种内力，必须假想在待计算内力处用截面将物体分开，使互相作用力暴露出来。当取某一部分为研究对象时，可以用静力学平衡方程将内力计算出来。此种只用静力学平衡方程即可解决的问题称为静定问题，否则称为超静定问题。

如图 1-2 (a) 所示，物体在多个力 $\{F_n\}$ 和 $\{F'_n\}$ 的共同作用下，处于平衡状态。若求任一截面 $m-m$ 上的内力，可以假想地用 $m-m$ 截面将该物体分为 A、B 两部分（如图 1-2 (b)）。此时 A 部分的 $m-m$ 截面上作用有 B 部分对它的作用力，此种作用力按某种方式分布在 $m-m$ 截面上。与此同时，在 B 部分的 $m-m$ 截面上也以同样的方式作用着 A 部分对它的作用。以上两截面上的分布力互为作用与反作用力。将这些分布着的内力向截面内某

点(如形心 C)简化, 并将简化结果沿图示坐标系 C_{xyz} 分解, 可有 N (法向力), Q_y 、 Q_z (切向力), M_x 、 M_y 、 M_z (力偶), 考虑 A 部分平衡, 可计算出 N 、 Q_y 、 Q_z 、 M_x 、 M_y 、 M_z , 如图 1-2 (c) 所示。关于杆件的内力计算, 已在工程静力学中讲述, 此处不再赘述。选择 B 部分为研究对象时, 也会有类似的叙述。

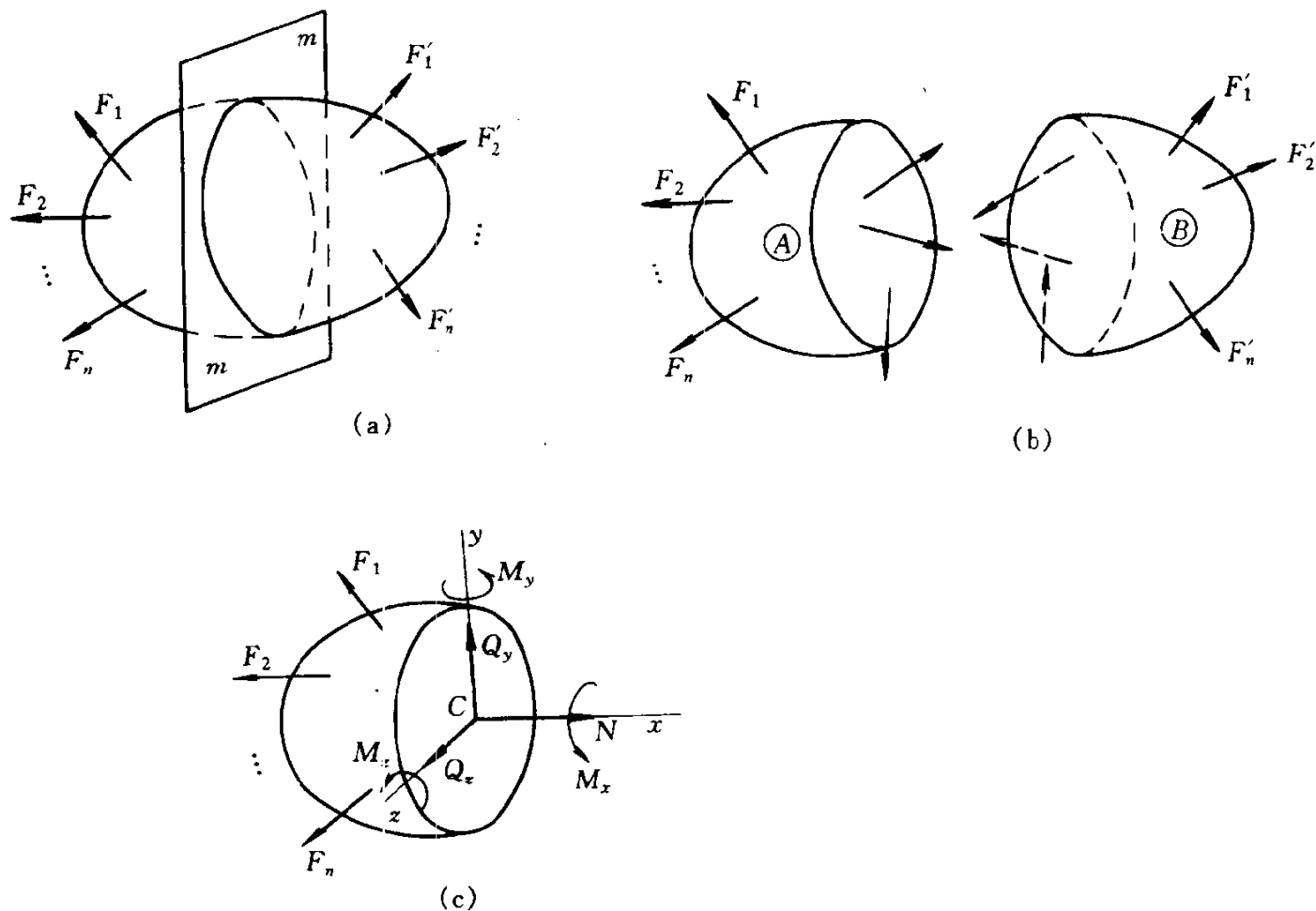


图 1-2

根据连续性公设, 内力以某种方式连续地分布在截面上, 只使用静力学平衡方程, 不可能得到内力的分布规律, 因而, 求解内力分布规律的问题是超静定问题。通常, 同一个截面上的分布内力既是截面方向的函数, 也是面内位置的函数。如图 1-3 (a) 所示, 在截面内 a 点周围的微面积 ΔA 上所作用的内力合力为 ΔP , 由下式定义的、表示内力分布集度的物理量 S 称为 a 处的全应力

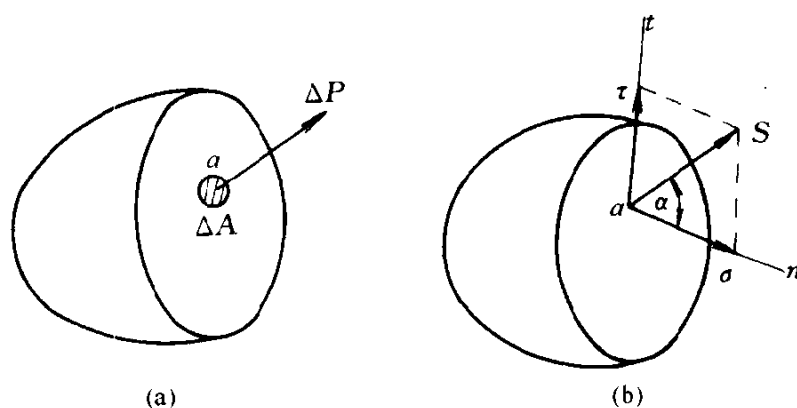


图 1-3

$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (a)$$

将全应力 S 沿截面在 a 处的法线 n 和切线 t 分解, 可以得到两个应力分量(如图 1-3 (b))

$$\sigma = S \cos \alpha \quad \tau = S \sin \alpha \quad (b)$$

式中，法向应力 σ 简称为法应力或正应力，切向应力 τ 简称为切应力或剪应力。应力的国际单位为帕斯卡，简称“帕”，符号为 Pa， $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ 。由于此单位较小，材料力学中常用的单位是“兆帕” (MPa) 和“吉帕” (GPa)， $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2$ ， $1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^3 \text{ MPa}$ 。

1.4.2 应力的表示方法

为表达构件内部一点处的应力状况，通常取包围该点的边长分别为 dx 、 dy 、 dz 的六面体，将各界面上的应力按坐标轴方向分解，得到相应的应力分量，并在图上表示出来，得到图1-4(a)所示的单元体。

图中法应力由 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 表示，其中下标表示应力作用面的法线方向，并且规定拉应力为正，压应力为负。切应力由 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 、 τ_{yx} 、 τ_{zy} 、 τ_{xz} 表示，第一个下标表示作用面的法线方向，第二个下标表示应力分量的指向。关于切应力的符号规定将在应用时再予讲授。

需要说明的是，对于图1-4(a)中法线方向为 x 和 $-x$ 的一对界面，表示同一点处垂直于 x 轴截面的两个侧面，因而应具有相同的应力。其他成对界面也是这样。

在材料力学中，多研究 $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$ 的情形，亦即平面问题，此时非零的应力分量为 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 、 τ_{yx} ，典型单元体如图1-4(b)所示。

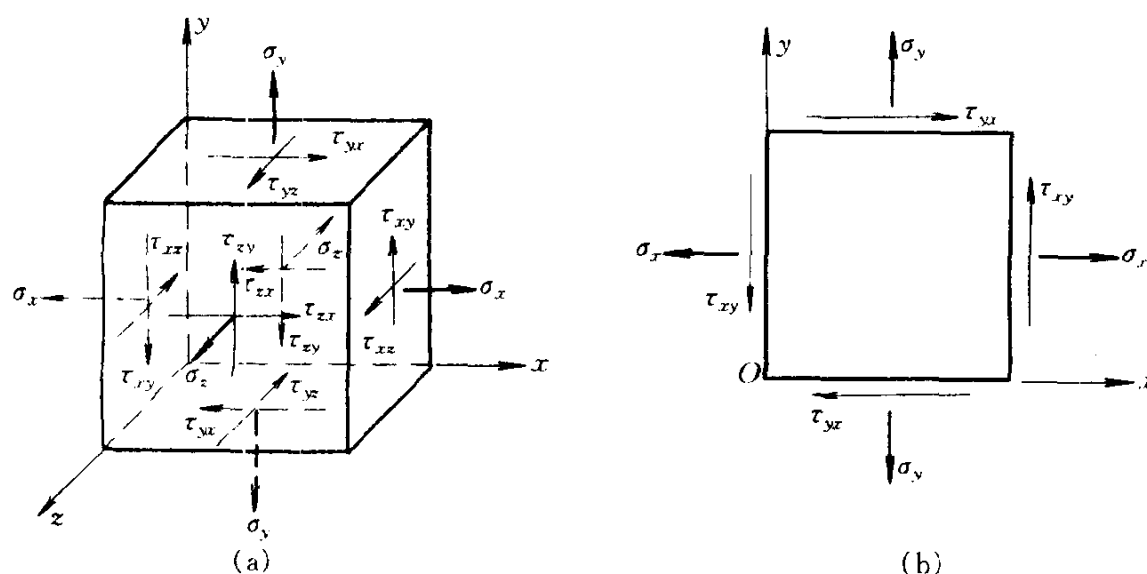


图 1-4

1.4.3 切应力互等定理

图1-4(b)所示为平面问题的典型单元，由于取自受力平衡的物体，因而也应是平衡的。显而易见，平衡方程 $\sum X = 0$ 、 $\sum Y = 0$ 是自动满足的，第三个平衡方程给出

$$\sum m_O(F_i) = 0, (\tau_{xy} \cdot dy \cdot t)dx/2 - (\tau_{yx} \cdot dx \cdot t)dy/2 = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (c)$$

式中： O 为单元体的左下角点； t 为单元厚度。式(c)是切应力互等定理的数学表达式。

切应力互等定理：在受力平衡物体内部没有集中力偶作用的点处，互相垂直的界面上切应力数值相等，或指向界面的公共棱边，或背离该棱边。根据此定理，对于图1-4(a)单元体，应有

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (d)$$

1.5 位移、变形和应变

前面述及，物体受力后各质点的位置要发生相应的变化，亦即产生位移，同时还要引起物体原始构形的改变，亦即变形。为研究物体变形情况，通常在某点处取材料单元体，以该材料单元体的变形情况代表构件在该点处的变形情况。以平面问题为例，自被考察的物体内部选取典型的原始材料单元体 $abcd$ ，该单元体变形后移动到新的位置 $a'b'c'd'$ ，如图1-5 (a)所示。

由图1-5 (a) 可以看出，单元体 $abcd$ 由原始构形变化至 $a'b'c'd'$ ，可通过刚体平动、刚体转动及变形实现。消除刚体平动及转动后，得到图1-5 (b)。单元体的变形包括如下两个方面：

- ①单元体边长的改变；
- ②单元体各边之间夹角的改变。

定义 x 方向的 \overline{ab} 边的变形为

$$\Delta l_x = \overline{a'b'} - \overline{ab} \quad (a)$$

而

$$\epsilon_x = \lim_{\overline{ab} \rightarrow 0} \frac{\overline{a'b'} - \overline{ab}}{\overline{ab}} \quad (b)$$

称为 a 点处沿 x 方向的线应变，又可称为法应变或正应变。同理，可以定义 a 点处沿 y 方向线段 \overline{ad} 的变形 Δl_y 和线应变 ϵ_y ，亦即 $\Delta l_y = \overline{a'd'} - \overline{ad}$ ， $\epsilon_y = \lim_{\overline{ad} \rightarrow 0} [(\overline{a'd'} - \overline{ad}) / \overline{ad}]$ 。

x 及 y 方向微线段 \overline{ab} 和 \overline{ad} 的夹角变为 $\angle b'a'd'$ ，减少了 $(\angle d'ad + \angle b'ab)$ ，可定义 a 点处的切应变

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{\overline{ab} \rightarrow 0 \\ \overline{ad} \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \angle b'a'd' \right) = \lim_{\substack{\overline{ab} \rightarrow 0 \\ \overline{ad} \rightarrow 0}} (\angle d'ad + \angle b'ab) \quad (c)$$

当 x 及 y 方向微线段之间的夹角减小时，相应的切应变为正，反之为负。线应变 ϵ 和切应变 γ 是度量变形物体一点处变形程度的基本物理量。由 (b) 式、(c) 式可知，它们都是无量纲量。

单元体 $abcd$ 的刚体平动和转动，是周围材料变形积累的结果，与本单元体变形与否没有关系，称为单元体的位移。因而可知：材料单元体的位移可分为平动位移和转动位移。

1.6 胡克定律

首先考察如图1-6(a)所示的、承受单向拉伸应力 σ_x 作用的单元体 $abcd$ ，变形前 $\overline{ab} = dx$ ， $\overline{ad} = dy$ ，变形后 $\overline{a'b'} = (1 + \epsilon_x)dx$ ， $\overline{a'd'} = (1 + \epsilon_y)dy$ 。实验研究表明：当应力 σ_x 不超过某一数值时，有如下关系：

- ①横向应变 ϵ_y 和纵向应变 ϵ_x 之比为常数，亦即

$$\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\mu \quad (a)$$