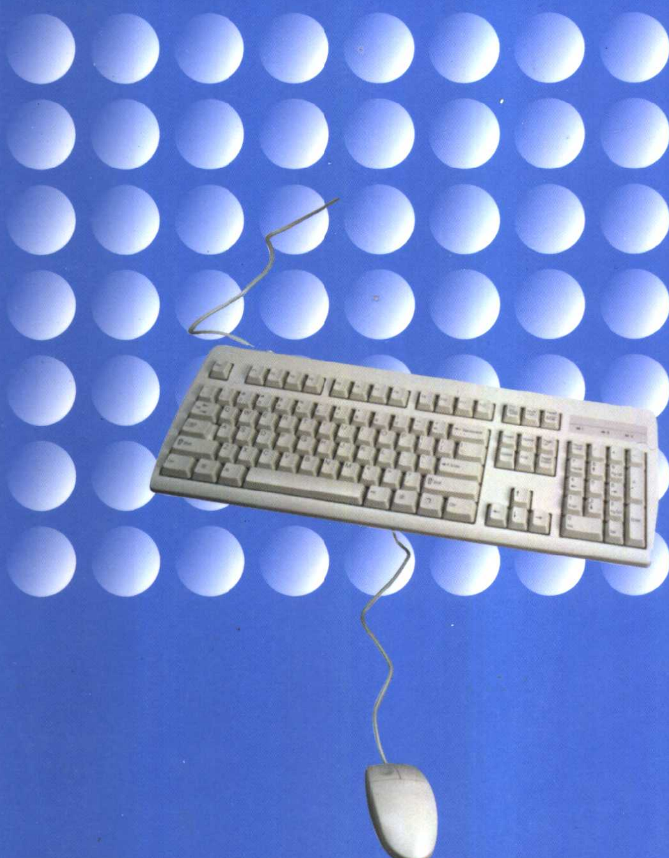
计算机与应用专业自学考试

离散数学复习与应试指导

2

屈婉玲 耿素云 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

计算机与应用专业自学考试

离散数学复习与应试指导

屈婉玲　耿素云　编著

北京大学出版社
北　　京

内 容 简 介

本书是根据全国高等教育自学考试指导委员会审定的"离散数学考试大纲"编写的自学指导用书，主要内容包含命题逻辑、谓词逻辑、集合与函数、代数结构、图论五章。本书针对考试要求按章系统总结了主要的概念、定理、公式，针对不同的知识点明确列出了解题要求，并通过大量的典型例题及其求解过程分析了解题的方法、步骤以及书写规范。为了帮助读者进一步掌握离散数学的概念和解题技巧，本书在每章的后面给出了大量的练习并在第六章提供了6套综合练习。这些练习包含了自学考试离散数学的主要题型，全部练习都附有答案或解答，以供读者在总复习时进行模拟测试。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学复习与应试指导/屈婉玲，耿素云编著. - 北京:北京大学出版社，2001.11
(计算机与应用专业自学考试丛书)
ISBN 7-301-05144-1

Ⅰ.离… Ⅱ.①屈…②耿… Ⅲ.离散数学-高等教育-自学考试-自学参考资料 Ⅳ.0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 052895 号

书　　名：离散数学复习与应试指导
著作责任者：屈婉玲　耿素云编著
责 任 编 辑：沈承凤
标 准 书 号：ISBN 7-301-05144-1/TP·0575
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑部 62752038
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者：兴盛达打字服务社　62549189
印　刷　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787 毫米×1092 毫米　16 开本　11.75 印张　290 千字
2001 年 11 月第 1 版　2001 年 11 月第 1 次印刷
定　　价：16.00 元

前　言

二十多年高等教育自学考试事业的蓬勃发展已经证明，自学考试是继续教育的一种重要形式，它为我国社会主义建设事业培养了大量的有用人才。特别是近年来各行各业对于计算机专业人才的大量需求使得普通高校计算机专业的毕业生供不应求。因此，高教自考的“计算机与应用”专业受到了广大考生的热烈欢迎。但是对于自学考生来说，这个专业的学习并不是一件轻松的事情。它要求考生必须熟练掌握所学课程的基本概念、基本理论以及基本的解题方法和技巧。

北京大学计算机科学技术系多年来一直承担着北京市“计算机软件与应用”专业（自2001年按照全国统考的新计划，改为“计算机与应用”专业）的主考任务，许多教师直接参与了大量的命题、阅卷等项工作。他们不仅有着丰富的教学经验，同时在多年的主考工作中积累了大量的试题资料。他们对于自考的特点和自学考生在学习中的困难有着比较深入的了解和切身的体会。为了帮助自学考生切实掌握“计算机与应用专业”考试课程的重点和难点，北京大学出版社组织计算机系的教师编写了这套专业课程的辅导丛书。它按照考试计划所规定的课程来组织，每本辅导书都包含下述主要内容：

1. 以每门课程的考试大纲为基础，按照章节进行总结，提纲挈领，将零散的知识点串起来，为每个考生列出了包含课程主要知识点的系统的复习提纲。

2. 在每一章后面都通过大量的例题讲解各种试题的题型、相关的解题方法和规范，并根据历年阅卷的经验，进一步说明考生在解题中容易发生的错误和应该注意的问题。

3. 针对每一章的要求，为考生提供大量的练习题和答案，以方便考生循序渐进地巩固所学的知识，掌握解题的技巧。

4. 为了进一步培养比较灵活的分析问题和解决问题的能力，在全书的后面附有综合练习。在系统复习了全部内容后，考生可以用它进行自我测试和考前的模拟冲刺。

这套丛书配合考试用书，既可以在日常自学中作为辅导书，也可以用于考前的总复习，同时也为其他在校学生和科技人员学习相关课程提供指导和帮助。

我们期望这套丛书能够成为广大考生的良师益友，我们更诚挚地期待着读者的批评和指正。

北京大学计算机科学技术系

副系主任　屈婉玲

2001年7月5日

编者的话

本书是以全国高等教育自学考试指导委员会审定的“离散数学”考试大纲为依据，参考全国高等教育自学考试指导委员会组编的考试指定教材（《离散数学》，左孝凌，经济科学出版社，2000 年 9 月）编写的，本书行文中出现的“指定教材”均指这本书。

和经典的高等数学不同，离散数学的内容比较分散。一般的离散数学教材都由若干个相对独立的部分构成，主要有数理逻辑、集合论、代数结构与图论。它的特点就是概念、定义、定理多，全部内容缺乏一个完整的体系，复习时不知如何下手。此外，离散数学的题型比较丰富，解题方法比较灵活，这些对于初次接触离散数学的考生而言确实有较大的难度。很多考生反映教材看得懂，就是不知道题目怎么做，做了也不知道对不对。为此，我们根据多年来参加北京市自学考试离散数学命题及阅卷的经验和从事离散数学教学所积累的大量习题资料编写了这本复习和应试指南。本书不是一本系统讲授离散数学概念和理论的书籍，它可以作为指定教材的配套辅导书。写作本书的目的就是为了对所有自学离散数学的人在复习和解题方面提供细致深入的帮助。全书总计提供了 300 多道例题和习题，包含了离散数学的主要题型。本书的特点是：

1. 根据考试要求按章系统地列出了应该掌握的主要知识点（定义、定理、公式等）并进一步解释了它们之间的区别和联系，系统总结了所有的重要公式和结论。

2. 按章将考试大纲细化，列出了对考生的具体解题要求，包括：基本概念、基本计算、基本的证明方法，基本的应用，等等。

3. 根据解题要求和离散数学考试的常见题型按章给出了大量的典型例题、答案和解题过程；并根据不同的题型，进一步分类说明了解题中常见的错误或应该注意的问题。同时通过系列习题的分析，总结了常用的解题方法、步骤和书写规范。

4. 在每章后面提供了大量的配套练习和解答，以帮助考生作阶段复习，巩固和练习通过例题所学到的基本解题方法。

5. 全书最后给出了 6 套综合练习和解答，以供考生在总复习时进行模拟测试。

本书包含五章，即命题演算、谓词演算、集合与函数、代数结构和图论。其中第一、二、五章由耿素云完成，第三、四章由屈婉玲完成，第六章的综合练习由两人合作完成。书中选题主要取自书后的参考书。考虑到指定教材中的部分内容和习题，特别是证明题，难度超出了自学考试的基本要求，我们在相应的部分加了 * 号，对其中的难点和容易混淆的概念进一步做了阐述，并对习题做出了详细的解答。

出版这本书仅仅是期望能够对自学离散数学的考生有所帮助。我们诚恳地欢迎读者提出宝贵意见！

作　者

2001 年 10 月于北京大学

目　录

第一章　命题逻辑

1.1　内容提要

1. 命题符号化及联结词

命题与真值　称能判断真假，但不能既能真又能假的陈述句为命题．命题表示的判断的结果称为命题的真值，真值只能取真、假两个值．真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题为假命题．

原子命题　由简单陈述句构成的命题称为原子命题或简单命题．

命题符号化　将简单命题用符号表示，称为命题符号化．

复合命题　由原子命题用联结词联结而成的命题称为复合命题．

联结词主要有以下5种．

否定式　设 p 为一命题，复合命题"非 p"（或"p 的否定"）称为 p 的否定式，记作 $\neg p$，$\neg$ 为否定联结词的符号化表示．$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假．

合取式　设 p,q 为两个命题，复合命题"p 并且 q"（或"p 和 q"、"p 与 q"等）称为 p 与 q 的合取式，记作 $p\wedge q$，$\wedge$ 为合取联结词的符号化表示．$p\wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真．

析取式　设 p,q 为两个命题，复合命题"p 或 q"称为 p 与 q 的析取式，记作 $p\vee q$，$\vee$ 为析取联结词的符号化表示．$p\vee q$ 为真当且仅当 p 与 q 中至少一个为真．

蕴含式　设 p,q 为两个命题，复合命题"如果 p，则 q"称为 p 与 q 的蕴含式（"指定教材"中称作 p 与 q 的条件式），记作 $p\rightarrow q$，称 p 为蕴含式的前件，q 为蕴含式的后件，$\rightarrow$ 为蕴含联结词的符号化表示．$p\rightarrow q$ 为真当且仅当 p 为假或 q 为真（也即，$p\rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真而 q 为假）．

等价式　设 p,q 为两个命题，复合命题"p 当且仅当 q"称为 p 与 q 的等价式（"指定教材"中称为双条件式），记作 $p\leftrightarrow q$（"指定教材"中记作 $p\leftrightarrows q$），$\leftrightarrow$ 为当且仅当联结词的符号化表示．$p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 的真值相同．

2. 命题公式及分类

元语言与对象语言　所谓元语言是用来说明对象语言的语言，而对象语言是用来描述所研究对象的语言．在学习英语时，英语为对象语言，而汉语为元语言，在学习数理逻辑时，在1中引入的符号均为对象语言符号．

命题常元及命题变元　若用 $p,q,r,\cdots$ 表示确定的简单命题，则称 $p,q,r,\cdots$ 为命题常元（或常项）；若用 $p,q,r,\cdots$ 泛指简单的陈述句，则称它们为命题变元（或变项），它们的真值为变量，取值为0或1．

合式公式　(1) 单个的命题变元或常元（含1和0）是合式公式；

(2) 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式；

(3) 若 A,B 是合式公式，则 $(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$，$(A\leftrightarrow B)$ 也均为合式公式；

(4) 只有有限次地应用(1)～(3)形成的符号串才是合式公式．

合式公式也称为命题公式，又简称为合式或公式.

在合式公式定义中应注意以下两点：

1° 在定义中出现的大写英文字母 A, B, C 是指任意的合式公式，因而它们是元语言符号.

2° 最外层括号有时可以省去.

公式的层次 (1) 若 A 是单个的命题常元或变元，则称 A 为 0 层公式.

(2) 称 A 是 $n+1(n\geqslant 0)$ 层公式，是指下面诸情况之一：

① $A=\neg B$，B 为 n 层公式；

② $A=B\wedge C$，其中 B, C 分别是 i 层和 j 层公式，且 $n=\max(i,j)$；

③ $A=B\vee C$，其中 B, C 的层次同②；

④ $A=B\rightarrow C$，其中 B, C 的层次同②；

⑤ $A=B\leftrightarrow C$，其中 B, C 的层次同②.

(3) 若 A 的层次为 k，则称 A 是 k 层公式.

在以上定义中，要注意以下两点：

1° 其中的大写英文字母 A, B, C 仍为元语言符号，在下文中不再声明.

2° 所用“=”为通常意义下的等于，是元语言符号，与联结词“$\leftrightarrow$”不同.

赋值 设 A 为一命题公式，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是出现在 A 中的全部的命题变元，给 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 各指定一个真值(0 或 1)，称为对 A 的一个赋值.若赋值 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n(\alpha_i=0$ 或 $1, i=1,2,\cdots n)$ 使 A 的真值为真，则称 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为 A 的成真赋值；若 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 使 A 的真值为假，则称 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为 A 的成假赋值.

下面有几点说明：

1° 在“指定教材”中，在定义时，称这里的赋值为指派，但有时也称指派为赋值，因而这里统一为赋值.

2° 赋值 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是长度为 n 的由 0 和 1 组成的符号串，仅含 n 个命题变元的公式 A 共有 2^n 个赋值.

3° “指定教材”中，有时用 T, F 分别表示真和假，有时用 1, 0 表示真和假，因而赋值(指派)有时为 T, F 组成的符号串，有时又是 0, 1 组成的符号串.

4° 本书中，赋值均用 0, 1 组成的符号串表示，$n=3$ 时，8 个赋值分别为 000, 001, $\cdots$, 111，它们正好是二进制数 $0, 1, \cdots, 7$.

5° 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是公式 A 中出现的全部变元，赋值 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 表明 α_1 是 p_1 的赋值，α_2 是 p_2 的赋值，$\cdots\alpha_n$ 是 p_n 的赋值.当变元无下角标时，则按英文字母顺序赋值.例如，010 是公式 $(q\rightarrow p)\wedge r$ 的一个赋值，并且 p 的赋值为 0，q 的赋值为 1，r 的赋值为 0，而不能按 p, q, r 在公式中顺序赋值.

真值表 设公式 A 中含 $n(n\geqslant 1)$ 个命题变元，将 A 在 2^n 个赋值下的取值情况列成表，称为 A 的真值表.

公式的分类 设 A 为一个公式.

(1) 若 A 无成假赋值，则称 A 为重言式或永真式；

(2) 若 A 无成真赋值，则称 A 为矛盾式或永假式；

(3) 若 A 至少有一个成真赋值，则称 A 为可满足式；

(4) 若 A 既有成真赋值，又有成假赋值，则称 A 为非重言式的可满足式.

几点说明：

1° 在以上定义中，重言式是可满足式，当然反之不真.

2° 求公式 A 的真值表时，先写出公式的 2^n 个赋值，然后由低到高写出 A 的各层次，并计算出各层次的真值，真值表的最后一列为 A 的取值情况.

3° 真值表给出公式 A 的全部成真赋值和成假赋值，并能判别公式 A 的类型.

3. 等值演算

等值式 若等价式 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B 等值，并记为 $A\Leftrightarrow B$，而称 $A\Leftrightarrow B$ 为等值式.

几点说明：

1° 定义中的“$\Leftrightarrow$”不是联结词等号，是元语言符号，用来说明 A 与 B 构成的等价式是重言式.

2° 在“指定教材”中，将 A 与 B 等值称为 A 与 B 等价，有时称 $A\Leftrightarrow B$ 是等价式，又有时称 $A\Leftrightarrow B$ 是等值式. 注意无论说的是等值式还是等价式都是本书中的等值式.

基本等值式

(1) $A\Leftrightarrow\neg\neg A$ 双重否定律

(2) $A\Leftrightarrow A\vee A$

(3) $A\Leftrightarrow A\wedge A$ 幂等律

(4) $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$

(5) $A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$ 交换律

(6) $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$

(7) $(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$ 结合律

(8) $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

(9) $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ 分配律

(10) $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$

(11) $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$ 德·摩根律

(12) $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$

(13) $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$ 吸收律

(14) $A\vee 1\Leftrightarrow 1$

(15) $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$ 零律

(16) $A\vee 0\Leftrightarrow A$

(17) $A\wedge 1\Leftrightarrow A$ 同一律

(18) $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$ 排中律

(19) $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$ 矛盾律

(20) $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$ 蕴含等值式

(21) $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$ 等价等值式

(22) $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$ 假言易位

(23) $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$ 等价否定等值式

说明：在“指定教材”中，将排中律和矛盾律统称为否定律.

等值演算 由已知的等值式推演出新的等值式的过程称为等值演算.

注意：牢记基本等值式是正确地进行等值演算的基础.

子公式 设 A 为一个合式公式，即 A 是按合式公式形成规则形成的符号串，B 为 A 的一个子串，若 B 也是合式公式，则称 B 为 A 的子公式.

置换规则 设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 做为子公式的公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 取代了 $\Phi(A)$ 中的 A 之后所得公式，若 $B \Leftrightarrow A$，则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$.

联结词的优先顺序 在等值演算中，$\neg$ 最优先，其次为 $\wedge$ 与 $\vee$（也即 $\wedge$，$\vee$ 为同级)，再其次为 $\rightarrow$ 与 $\leftrightarrow$（$\rightarrow$ 与 $\leftrightarrow$ 同级)，同级的联结词按从左到右的次序演算. 若有括号(均为圆括号)，则括号最优先.

4. 联结词完备集

设 S 为一个联结词集合，若对于任意公式 A，都可以经过等值演算使其与仅用 S 中联结词联结的公式 B 等值，即 $A \Leftrightarrow B$，则称 S 为联结词完备集，可以证明 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，$\{\neg, \wedge, \vee\}$，$\{\neg, \wedge\}$，$\{\neg, \vee\}$，$\{\neg, \rightarrow\}$ 等都是联结词完备集. 人们又常称后三个为极小联结词完备集.

几点说明：

1° “指定教材”中所谓“最小联结词组”即为本书中的“极小联结词完备集”.

2° 本书使用的最大联结词集为 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，当然它是联结词完备集.

5. 范式

文字 命题变元及其否定统称为文字.

简单合取式 由有限个文字组成的合取式称为简单合取式.

简单析取式 由有限个文字组成的析取式称为简单析取式.

析取范式 仅由有限个简单合取式组成的析取式称为析取范式.

合取范式 仅由有限个简单析取式组成的合取式称为合取范式.

极小项 在含 n 个命题变元 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的简单合取式中，若每个命题变元以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第 i 个命题变元以文字的形式出现在左起的第 i 位上，则称该简单合取式为极小项(在“指定教材”中称为小项). n 个命题变元 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 共可产生 2^n 个真值各异的极小项，分别记为 $m_0, m_1, \cdots, m_{2^n-1}$，其中角标 $i(0 \leqslant i \leqslant 2^n-1)$ 的二进制表示即为 m_i 的成真赋值(每个极小项有并且只有一个成真赋值).

极大项 在含 n 个命题变元 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的简单析取式中，若每个命题变元以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第 i 个命题变元以文字的形式出现在左起的第 i 位上，则称该简单析取式为极大项(在“指定教材”中称为大项). n 个命题变元 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 共可产生 2^n 个真值各异的极大项，分别记为 $M_0, M_1, \cdots, M_{2^n-1}$，其中角标 $i(0 \leqslant i \leqslant 2^{n-1})$ 的二进制表示即为 M_i 的成假赋值(每个极大项有且仅有一个成假赋值).

主析取范式 由有限个极小项组成的析取式称为主析取范式(即由极小项组成的析取范式称为主析取范式).

主合取范式 由有限个极大项组成的合取式称为主合取范式(即由极大项组成的合取范式称为主合取范式).

主要定理：

定理 任意命题公式都存在着与之等值的析取范式和合取范式.

定理 任意命题公式都存在并且是惟一的与之等值的主析取范式与主合取范式.

求主析取范式的方法

方法一 等值演算法

求公式 A 的主析取范式(A 中含 n 个命题变元):

(1) 利用置换规则消去 A 中的联结词→,↔(若它们存在);

(2) 利用德·摩根律和双重否定律将否定号$\neg$(若存在)内移(利用$\neg B \wedge \neg C$ 置换$\neg(B \vee C)$或利用$\neg B \vee \neg C$ 置换$\neg(B \wedge C)$)或消去(利用 B 置换$\neg\neg B$);

(3) 利用$\wedge$对$\vee$的分配律,使 A 化成等值的如下形式(即析取范式)

$$A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k$$

其中 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$为简单合取式;

(4) 将 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中不是极小项的,利用排中律与分配律化成与之等值的若干个极小项之析取式,使 A 化成等值的主析取范式

$$A \Leftrightarrow m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_s} \quad (0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant 2^n - 1)$$

A 的主析取范式又可以简记为

$$A \Leftrightarrow \sum(i_1, i_2, \cdots, i_s)$$

方法二 真值表法

(1) 写出 A 的真值表;

(2) 求出 A 的全部的成真赋值;

(3) 写出每个成真赋值对应的十进制数,做为极小项的下角标,然后将这些极小项按角标从小到大的顺序析取起来,即得 A 的主析取范式,即

$$A \Leftrightarrow m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_s} \quad (0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant 2^n - 1)$$

求公式 A 的主合取范式的方法

方法一 等值演算法

(1) 同求主析取范式;

(2) 同求主析取范式;

(3) 利用$\vee$对$\wedge$的分配律,使 A 化成等值的如下形式(即合取范式)

$$A \Leftrightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_k$$

其中 $B_i(i=1,2,\cdots,k)$为简单析取式;

(4) 将 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 中不是极大项的,利用矛盾律与分配律化成等值的若干个极大项之合取式,使 A 化成等值的主合取范式

$$A \Leftrightarrow M_{i_1} \wedge M_{i_2} \wedge \cdots \wedge M_{i_s} \quad (0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant 2^n - 1)$$

A 的主合取范式又可以简记为

$$A \Leftrightarrow \prod(i_1, i_2, \cdots, i_s)$$

方法二 真值表法

(1) 写出 A 的真值表;

(2) 求出 A 的全部成假赋值;

(3) 写出每个成假赋值对应的十进制数,做为极大项的下角标,然后将这些极大项按角标

从小到大的顺序合取起来,即得 A 的主合取范式

$$A \Leftrightarrow M_{i_1} \wedge M_{i_2} \wedge \cdots \wedge M_{i_s} \qquad (0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant 2^n - 1)$$

方法三　利用主析取范式求主合取范式

(1) 已知 A 的主析取范式为

$$A \Leftrightarrow m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_s} \qquad (0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant 2^n - 1)$$

即主析取范式中含 $s(0 \leqslant s \leqslant 2^n - 1)$个极小项.

(2) 设 0 到 $2^n - 1$ 个十进制数中,除(1)中 s 个数外的 $2^n - s$ 个整数分别为 $j_1, j_2, \cdots, j_{2^n - s}$,则它们做极大项角标的全体极大项的合取式,即为 A 的主合取范式,即

$$A \Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \cdots \wedge M_{j_{2^n - s}} \qquad (0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant 2^n - 1)$$

几点说明:

1° 公式 A 的主析取范式与主合取范式可以互相惟一确定.人们常准确地掌握主析取范式的求法,由主析取范式求主合取范式.

2° 规定矛盾式的主析取范式为 0,重言式的主合取范式为 1,这样规定后任何公式的主析取范式与主合取范式都存在并且是惟一的.

3° 主析取范式(或主合取范式)能求公式的成真(或成假)赋值,判断公式的类型,并能判断两个公式是否等值.

6. 命题逻辑推理理论

重言蕴含式　设 A, B 为任意的两个命题公式,若蕴含式(在"指定教材"中称为条件式) $A \to B$为重言式,则记为 $A \Rightarrow B$,并称 $A \Rightarrow B$ 为重言蕴含式(而在"指定教材"中,称 $A \Rightarrow B$ 为蕴含式).

推理定律　称重要的重言蕴含式为推理定律.重要的推理定律有:

(1) $A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
(2) $(A \wedge B) \Rightarrow A$	化简律
(3) $((A \to B) \wedge A) \Rightarrow B$	假言推理
(4) $((A \to B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$	拒取式
(5) $((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$	析取三段论
(6) $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$	假言三段论
(7) $((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
(8) $((A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C)) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难
⋮	

推理的形式结构　设 $A_1, A_2, \cdots, A_k, B$ 为命题公式,称

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \to B$$

为推理的形式结构,$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为推理的前提,B 为推理的结论.若推理的形式结构为重言式则称推理正确,正确推理中的结论 B 称为逻辑结论或有效结论,并将正确的推理用重言蕴含式表示法表示,即

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow B$$

请注意:

在"指定教材"中,有时用

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$$

表示推理的形式结构,有时也用

$$A_1, A_2, \cdots, A_k \vdash B$$

表示推理的形式结构.

判断推理是否正确的方法

判断推理是否正确的方法,也就是判断推理的形式结构是否为重言式的方法,若不存在使前提的合取式($A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k$)为真,而使结论 B 为假的赋值,则推理的形式结构为重言式,因而推理正确,其方法主要有以下四种:

(1) 真值表法;

(2) 等值演算法;

(3) 主析取范式法;

(4) 简单的讨论法:看是否出现使前提合取式为真,结论为假的赋值.

说明:在推理的形式结构中,若出现的命题变项较多,以上四种方法,特别是前三种,演算量较大,而对于正确的推理可以按给定的推理规则构造证明,这就是构造证明法.本书给出的主要推理规则如下:

推理规则

(1) 前提引入规则:在证明的任何步上,都可以引入前提.将此规则简记为 P.

(2) 结论引入规则:在任何步上,所得出的结论都可以做为后继证明的前提.将此规则简记为 T.

(3) 置换规则:在证明的任何步上,命题公式的子公式都可以用与之等值的公式置换,所得公式与原公式等值,将此规则简记为 E.

以下推理规则用图式形式给出,横线上面的为前提(或中间结论),横线下面的为中间结论(或结论).使用以下规则均可以简记为 I.

(4) 附加规则:

$$\frac{A}{\therefore\ A \vee B}$$

(5) 化简规则:

$$\frac{A \wedge B}{\therefore\ A} \quad \text{或} \quad \frac{A \wedge B}{\therefore\ B}$$

(6) 假言推理规则:

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \underline{A} \\ \therefore\ B \end{array}$$

(7) 拒取式规则:

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \underline{\neg B} \\ \therefore\ \neg A \end{array}$$

(8) 假言三段论规则:

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \underline{B \rightarrow C} \\ \therefore\ A \rightarrow C \end{array}$$

(9) 析取三段论规则：

$$\begin{array}{l} A\vee B \\ \neg A \\ \hline \therefore\ B \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{l} A\vee B \\ \neg B \\ \hline \therefore\ A \end{array}$$

(10) 合取引入规则：

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ \hline \therefore\ A\wedge B \end{array}$$

(11) 构造性二难推理规则：

$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ C\rightarrow D \\ A\vee C \\ \hline \therefore\ B\vee D \end{array}$$

说明

1° 在使用构造证明法证明推理时，往往将推理的形式结构 $(A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k)\rightarrow B$ 分开写成如下形式：

前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k$

结论：B

2° 证明是从前提出发严格按推理规则构造命题公式序列，序列的最后一行应为结论 B.

附加前提证明法

由于

$$(A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k)\rightarrow(C\rightarrow B)$$
$$\Leftrightarrow(A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k\wedge C)\rightarrow B$$

故在证明推理

(1) 前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k$

结论：$C\rightarrow B$

时，可等价地证明推理

(2) 前提：$A_1, A_2, \cdots, A_k, C$

结论：B

(1) 的结论中的前件在(2)中作为前提，称为附加前提，并称使用此方法的证明为附加前提证明法，简记为 CP 规则.

相容与不相容

设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是任意的命题公式，若 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k$ 是可满足的，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是相容的，否则(即 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k$ 是矛盾式)，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是不相容的.

归谬法

由于 $(A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k)\rightarrow B$ 为重言式当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \neg B$ 是不相容的，因而在证明推理

$$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k\rightarrow B$$

时，将 $\neg B$ 也做为前提，若推出矛盾，比如出现 $(A\wedge\neg A)$ 等，则原推理正确.

说明

1° $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B$ 为重言式当且仅当它的否定$\neg((A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \rightarrow B)$ $\neg(\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k) \vee B) \Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B$ 为矛盾式，也即 $A_1, A_2, \cdots, A_k$，$\neg B$不相容.

2° 在"指定教材"中，将归谬法也称为附加前提证明法，当引入结论的否定$\neg B$ 时，加注附加前提证明法.

1.2 题例分析

一、主要解题要求

1. 命题及联结词部分

(1) 基本概念的要求

① 分清给定的简单陈述句是否为命题；

② 分清给定的命题是原子命题还是复合命题；

③ 分清 5 种联结词及它们所联结的复合命题.

(2) 综合应用

① 正确地将给定原子命题符号化；

② 准确地使用联结词将给定的复合命题符号化.

2. 命题公式及分类部分

(1) 基本概念的要求

① 分清命题常元和变元；

② 理解合式公式的定义；

③ 理解赋值的定义；

④ 理解公式真值表的定义；

⑤ 深刻理解命题公式的 3 种类型.

(2) 综合应用

① 会判断给定符号串是否为合式公式；

② 会判断公式的赋值是成真赋值还是成假赋值；

③ 准确地求出给定公式的真值表；

④ 会用真值表求公式的成真赋值和成假赋值；

⑤ 熟练掌握用真值表判断公式类型的方法.

3. 等值演算部分

(1) 基本概念的要求

① 理解公式 A 与 B 等值及等值式的概念；

② 牢记基本的等值式；

③ 知道等值演算的概念；

④ 知道子公式的概念；

⑤ 理解置换规则；

⑥ 知道联结词的优先顺序.

(2) 综合应用

① 熟练地应用等值演算法判断两个公式等值；

② 熟练地掌握应用等值演算法证明某公式是重言式或矛盾式的方法.

4. 联结词完备集部分

(1) 基本概念的要求

① 理解联结词完备集的概念；

② 知道极小联结词完备集的概念.

(2) 综合应用

能熟练地将某公式 A 等值地化成只含某联结词集 S 中联结词的公式 B.

5. 范式部分

(1) 基本概念的要求

① 理解简单合取式、简单析取式、析取范式、合取范式的定义；

② 深刻理解极小项、极大项的定义及性质；

③ 深刻理解主析取范式、主合取范式的定义.

(2) 主要定理的要求

① 要知道并理解任何公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式；

② 要知道并深刻理解任何公式都惟一存在与之等值的主析取范式和主合取范式.

(3) 综合应用

① 熟练掌握求公式的主析取范式的主要方法：等值演算法、真值表法；

② 熟练掌握由公式的主析取范式求主合取范式的方法；掌握用等值演算法、真值表法求公式的主合取范式的方法；

③ 会用公式的主析取范式(主合取范式)判断公式的类型；

④ 会用公式的主析取范式(主合取范式)求公式的成真赋值与成假赋值；

⑤ 会用公式的主析取范式(主合取范式)判断两个公式是否等值.

6. 命题逻辑推理理论部分

(1) 基本概念的要求

① 理解蕴含式与重言蕴含式的关系；

② 记住主要的推理定律；

③ 严格区分推理的形式结构与正确推理的描述形式；

④ 理解并牢记十几条推理规则；

⑤ 理解并会判断公式之间的相容与不相容性.

(2) 综合应用

① 会用真值表法、等值演算法、主析取范式法等方法判断简单推理是否正确；

② 熟悉掌握推理的构造证明法；

③ 会用附加前提证明法证明推理的结论部分是蕴含式的推理；

④ 会用归谬法证明推理.

二、题例分析

【例 1】 将下列命题符号化(注意区分简单命题(即原子命题)和复合命题)：

(1) 集合论与图论都是离散数学的组成部分；

(2) 蓝色和黄色可以调配成绿色；

(3) 数学不是枯燥无味的；

(4) 王英和李秀是同乡；

(5) 王英和李秀是大学生.

解 (1) 本命题对应的陈述句虽然很长，但它是以"集合论与图论"为主语的简单陈述句，因而它是原子命题，符号化为

p：集合论与图论都是离散数学的组成部分.

(2) 本命题是以"蓝色和黄色"为主语的简单陈述句，故本命题为原子命题，符号化为

p：蓝色和黄色可以调配成绿色.

(3) 本命题对应的陈述句中使用了否定联结词，故它是复合命题.令

p：数学是枯燥无味的，则本命题的符号化形式为$\neg P$.

(4) 本命题是以"王英和李秀"为主语的简单陈述句，因而是原子命题，符号化为

p：王英和李秀是同乡.

(5) 根据题意可知，"王英和李秀是大学生"是"王英是大学生并且李秀也是大学生"的简单描述法，它使用了联结词"并且"，因而是复合命题.应该符号化为 $p \wedge q$.其中

p：王英是大学生，q：李秀是大学生.

说明：本题之目的是让读者根据题意分清原子命题与复合命题.

【例 2】 将下列命题符号化：

(1) 王燕学过英语和法语；

(2) 王燕一边看电视一边吃饭；

(3) 王燕虽然聪明，但是她不用功；

(4) 王燕不仅会唱歌，而且会跳舞；

(5) 王燕是名大学生，并且当过工人.

解 本例中各命题都是用联结词$\wedge$联结起来的复合命题，用来说明使用$\wedge$的多样性和灵活性.

(1) 令 p：王燕学过英语，q：王燕学过法语.命题符号化为 $p \wedge q$.

(2) 令 p：王燕看电视，q：王燕吃饭.命题符号化为 $p \wedge q$.

(3) 令 p：王燕聪明，q：王燕用功.命题符号化为 $p \wedge \neg q$.

(4) 令 p：王燕会唱歌，q：王燕会跳舞.命题符号化为 $p \wedge q$.

(6) 令 p：王燕是大学生，q：王燕当过工人.命题符号化为 $p \wedge q$.

分析：本题中 5 个命题都是用合取联结词联结起来的复合命题.符号化时都使用了联结词$\wedge$，可见合取联结词有多种表现形式.例如在"…与…"；"…和…"；"…并且…"；"一边…，一边…"；"虽然…，但是…"；"不仅…，而且…"等句型中，符号化时，根据题意均使用$\wedge$联结.

【例 3】 将下列命题符号化：

(1) 只要他用功，他就能取得好成绩；

(2) 只有他用功，他才能取得好成绩；

(3) 除非他用功，否则他不能取得好成绩.

解 令 p：他用功，q：他取得好成绩，题中 3 个命题分别符号化为：

(1) $p \rightarrow q$；