优化原理、方法与工程应用

汪树玉 杨德铨
刘国华 张科锋 编著

YOUHUAYUANLI
FANGFA
JIGONGCHENG
YINGYONG

浙江大学出版社

优化原理、方法与工程应用

汪树玉　杨德铨
刘国华　张科锋　编著

浙江大学出版社

（浙）新登字10号

内容提要

本书系统地阐述了优化原理与方法，内容丰富，具有一定的深度。书中融汇了作者从事优化设计研究的心得体会，具有实用意义。全书共分十章；前三章讲述优化的基本概念与基本原理；后六章分述线性与非线性规划、动态规划、最优性准则法、多目标优化和几何规划等；第十章讨论了优化模型塑造与算法选择，并有实际应用示例。书末附有常用算法程序库，程序较成熟，为工程应用提供了有力的工具。

本书可供土木、力学、水利等理工科专业的本科生、研究生作优化课程的教材，也可供工程技术人员参考。

优化原理、方法与工程应用

*

汪树玉 杨德铨
刘国华 张科锋 编著

责任编辑 李桂云

浙江大学出版社出版
浙江省煤田地质勘探公司制图印刷厂印刷
浙江省新华书店经销

*

开本：850×1168 1/32 印张：23.25 字数：589千字
1991年10月第一版 1991年10月第一次印刷
印数0001—2000

ISBN 7－308－00666－2/TP·046 定价：7.35元

前　　言

本书是在作者多年来为水利、土木等工科专业以及力学等理科专业大学生、研究生讲授优化理论、方法及设计应用等课程的基础上撰写的。其内容广泛，包括线性规划、二次规划、非线性规划、动态规划、几何规划、结构优化设计的准则法，以及多目标优化、模糊优化设计和组合优化等的简要介绍。书中还融汇了作者从事优化设计研究工作的心得与体会。通过本书，读者可对“优化”这一现代设计与规划手段有较全面的了解。

作为教材，全书比较注意优化的基本概念与理论的阐述，对凸性分析、最优性条件、对偶理论等都有适度的介绍，但以讲清定理的意义、性质和相互关系为主，不作过多的论证。关于算法着重介绍方法的思路与主要步骤。书中列有较多的例题与习题，有助于学习巩固。

为了便于工程应用，书中用一定篇幅专门介绍了优化问题数学模型的塑造、算法的评价与选择和实际应用示例，如网架、钢筋混凝土梁与框架优化，实体结构（重力坝、拱坝）的优化，边坡稳定和水力设计的优化等。

书末附有常用优化算法程序库，程序均成熟。编制上既注意由简单到复杂，由浅入深的教学要求，又有考虑比较周密、适应较广、效率高的实用软件，为实际应用提供了有力工具。

本书第一、二、三、五（第七节除外），六（第六节除外）、七章、第九章第二、三、五节和第十章第七、八节由汪树玉执笔，第四章、第九章第一、四节、第十章第一节由杨德铨执笔，第五章第七节、第六章第六节和第十章第二、五、六节由刘国华执笔，第十章第三节由张科锋执笔，第八章由汪树玉、张科锋执笔，第十章第四节由杨德

铨、汪树玉执笔，程序库包括说明由刘国华、张科锋编写编制。全书由汪树玉统稿。

本书承浙江大学应用数学系姚恩瑜副教授仔细审校，提出了不少宝贵意见，作者表示衷心感谢。作者还感谢金志玉、齐长鑫同志在程序与习题方面所作的工作。

限于作者水平，书中难免有许多缺点乃至错误，恳请读者批评指正。

编者 1990.8

符号说明

min.	求极小
max.	求极大
s. t.	受约束于
$\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$	$\mathbf{x}$ 是由 n 个分量组成的 n 维向量，或是坐标值为 x_1 $\cdots x_n$ 的 n 维空间点
$\mathbf{x}^*$	最优点或称最优解
f^*	目标函数 f 的最优值
$A\subset B$	集合 A 被包含于集合 B 中
$A\supset B$	集合 A 包含集合 B
$x\in A$	x 属于集合 A，或 x 是集 A 的元素
$x\notin A$	x 不属于集合 A
$A\cup B$	集合 A 与 B 的和集(或并集)
$A\cap B$	集合 A 与 B 的交集
$\varnothing$	空集
R	实数域
E^n	n 维欧氏空间
$\exists$	存在
$\forall\ \mathbf{x}\in E^n$	对属于 E^n 的任意点 $\mathbf{x}$
$N_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$	$\mathbf{x}^0$ 的 ε 邻域
$\triangleq$	定义为(或记为)
(a,b)	ab 开区间
$[a,b]$	ab 闭区间
$f\in C^p$	f 具有 p 阶连续导数
$f:S\to R$	f 是定义在集 S 上的实值函数
$\mathbf{0}$	零向量(各分量值均为零)
$\mathbf{a},\mathbf{b}$	向量
$\{\mathbf{u}^j\}^T$	向量 $\mathbf{u}^j$ 转置
$\mathbf{A},\mathbf{B}$	矩阵

$[\mathbf{G}^k]^{-1}$	矩阵 $\mathbf{G}^k$ 的逆阵
$\mathbf{x}^k$	第 k 次迭代点(向量)
$\mathbf{d}^k$	第 k 次搜索方向
$\mathbf{e}^i$	第 i 个分量为 1,其余分量为零的单位向量
$\min\limits_{\mathbf{x}\in S\subset E^n} f(\mathbf{x})$	在 E^n 空间的集合 S 上求 $f(\mathbf{x})$ 的极小
$\min\limits_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})$	函数 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 对 $\mathbf{x}$ 求极小
$\max\limits_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})$	函数 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 对 $\mathbf{y}$ 求极大
$\sup\{f(x)\mid x\in S\}$	函数 $f(x)$ 在 S 上的上确界
$\inf\{f(x)\mid x\in S\}$	函数 $f(x)$ 在 S 上的下确界
$g_j(\mathbf{x})\geqslant 0$	第 j 个不等式约束条件
$h_r(\mathbf{x})=0$	第 r 个等式约束条件
$\Vert\mathbf{x}\Vert$	点 $\mathbf{x}$ 的欧氏范数,$\Vert\mathbf{x}\Vert=(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)^{1/2}$
$(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 或 $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$	点(或向量)$\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的内积
$\det(\mathbf{A})$ 或 $\vert\mathbf{A}\vert$	矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式
$r(\mathbf{A})$	矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩
$\nabla f(\mathbf{x})$	$f(\mathbf{x})$ 的梯度(向量)
$\mathbf{H}(\mathbf{x})$ 或 $\nabla^2 f(\mathbf{x})$	$f(\mathbf{x})$ 的 Hesse 矩阵
$\nabla_{\mathbf{x}}L(\mathbf{x},\mathbf{y})$	函数 $L(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 关于 $\mathbf{x}$ 的梯度
$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x},\mathbf{y})$	函数 $L(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 关于 $\mathbf{x}$ 的二阶导数矩阵
$I(\mathbf{x}^0)$	在点 $\mathbf{x}^0$ 处的作用约束指标集
$\mathbf{I}$	单位矩阵
$\{\mathbf{x}^k\}_{1:m}$	m 个迭代点列组成的集合
$\{\mathbf{d}^k\}_{1:m}$	m 个搜索方向组成的集合
$\underline{x}_i$, $\bar{x}_i$	设计变量 x_i 取值的下界、上界
$\{M_k\}$	数列
* *	为证题或例题结束标记

目　录

第一章 概述

当一个问题只有一个答案或只有一种处理方案时，无需进行优化，因解答是唯一的。如果有很多答案或很多种可能方案去实现，就有选择哪个方案最好的问题，即出现了优化的问题。从所有可能的解决方案中选择合适的一个，以使预先规定的目标达到最优，称为最优化问题，简称优化。最优目标可以是产品的成本最低、或性能最佳、或使用寿命最长、或利润最大等等，视问题不同而不同。所获得的具有最优目标的那一方案称为最优方案（数学上称最优解）。搜索或寻求最优方案的方法称最优化方法。这里要注意的是：最优方案应从可能的方案中挑选，不可能的方案不在考虑之列（所谓可能方案是指满足所规定的要求和条件，亦称可行方案）。

在日常生活中，人们亦经常遇到优化问题。例如买衣服，面对多种多样的服装，要从中挑选一件尺寸合身、色彩中意、比较耐穿、而价格便宜的。这就是个优化问题。这里可以将价格作为目标，而前三者可以看作要求满足的条件。对这类简单的问题，可根据经验，加上必要的调查，凭主观判断即可解决。但对社会经济、生产与管理领域中的问题，如运输中的最优调度、生产流程的最优编排、资源的最优分配、工程的最优设计以及国土的最优开发方案等等，由于有的问题很重要、影响深远，有的涉及因素多、规模大、难度高，光凭主观经验不能满意地解决，甚至无法解决。这就必须采用基于坚实理论的较可靠的方法和相应的计算手段与工具才能完成。优化理论与方法正是为适应这种社会需要而产生，并随着数学规划和电子计算机的进展而发展，目前已广泛应用于各个领域。

下面再具体看看工程设计的优化问题。传统的设计方式是先由工程人员根据经验与判断拟定一个方案，确定构筑物的布置、外

形尺寸，估算出各个组成构件的截面大小。接着进行结构分析，校核各种荷载作用下的结构性态响应（如应力、位移、自振频率、稳定性能等）是否满足规范和预先规定的要求。如果不满足，则调整有关尺寸，构成新的修正方案，重新分析，直至各方面的要求满足为止。如果有可能，拟定几个设计方案，都按上述步骤进行，然后对这几个方案作比较，选择其中最满意的一个。但方案数一般不可能太多，否则工作量太大以致无法完成，正因为如此，传统的设计方式仅限于“方案比较”。

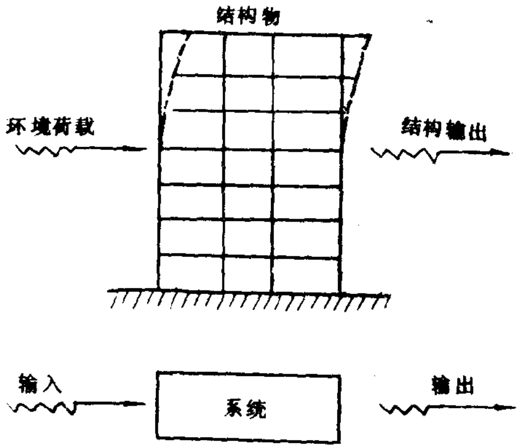

图 1-1

其实，一个构筑物相当于一个系统，所受的荷载、环境影响等可看作是输入，产生的应力、位移等性态响应是输出。在传统设计中方案是预先选定的，工作重点仅是“分析与校核”。即系统已组成，着重于研究系统输出、输入之间的关系或所谓“性态变换”。显然这不是设计的目的。设计是一种创新，世界上本没有这一构筑物或工程，人们要构想并制作它。因此从设计固有的含义与属性看，应着重探讨“系统”（或构筑物）的内部组成与结构，即在各种可能的环境、荷载作用下，探讨满足规定的输出要求应具有何种合理与经济的内部结构，包括由多少构件组成、如何布置、各个构件的形状与尺寸如何等等。设计的任务不能亦不应仅仅停留在“可行”的水平上，而应探讨技术和经济上都较优或最优的设计方案，这就需要采用优化方法。由此可见，工程设计与优化结合

是十分自然也是必然的途径。这说明，穷举的方案比较不能代替优化设计，这是因为如果供比较的方案中不包含最优方案，再比较亦得不到最优解。

第一节　优化问题的数学描述

一、示例

先看几个具体例子。

例 1-1　欲建造容积为 $V(\mathrm{m}^3)$ 的长方形蓄水池（无盖），问如何选择其长、宽、高，使表面积最小，从而使建筑用料最省？（为简单计，未考虑受力特征，未计入厚度对用料的影响）

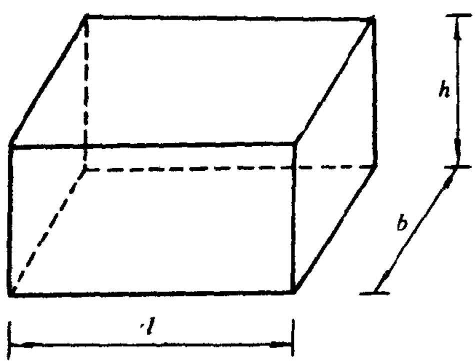

图　1-2

水池的体积为：　　$V = b \cdot h \cdot l,$

表面积为：　　$S = b \cdot l + 2b \cdot h + 2h \cdot l$

因此问题成为选择什么样的 b, h 与 l，在满足 $b \cdot h \cdot l = V$ 的条件下，使 S 最小。写成数学形式为：

寻求　　l, b, h

使　　　$S = b \cdot l + 2b \cdot h + 2h \cdot l$　趋极小

且满足　　$V = b \cdot h \cdot l$

这是高等数学中的条件极值问题，可利用熟知的拉格朗日(Lagrange)法则求解。其解为

$$b = l = \sqrt[3]{2V}, \quad h = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}。$$

例 1-2　空心轴的优化设计

设有一根承受纯扭荷载的空心轴，轴外径 D，内径 d，已知扭矩 M，寻求在满足强度和扭转稳定条件下用料最省的设计。因轴长一定，故问题可简化为寻求轴截面积最小。

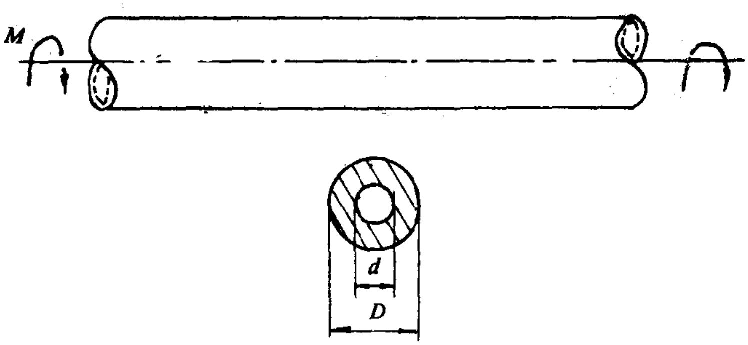

图 1-3

写成数学形式为：

寻求　D, d

使　　$\frac{1}{4}\pi(D^2 - d^2)$　趋极小

且满足　$d > 0, \quad D - d > 0$　（尺寸约束）

$$[\tau] - \frac{16MD}{\pi(D^4 - d^4)} \geqslant 0 \quad （强度条件）$$

$$0.7E[(D-d)/2D]^{3/2} - \frac{16MD}{\pi(D^4 - d^4)} \geqslant 0 \quad （稳定条件）$$

例 1-3　定位问题

某城市中要建造一个供应中心，向该市 m 个位置固定的用户提供服务。问如何确定这个中心最合理的位置？

设待求的服务中心位置（坐标）是 $(x_1、x_2)$，而第 i 个“用户”的位置已知为 $(a_i、b_i)(i=1,2,\cdots,m)$。如果服务的运输路线不受道路的影响（即考虑直线距离），则问题可表达为求 x_1、x_2 使总供应路线的距离最短，即

$$\sum_{i=1}^{m}\sqrt{(x_1-a_i)^2+(x_2-b_i)^2}\quad 趋极小$$

这是一个无约束条件的极小化问题。如果对某个用户（如第一个用户）要求距离不超过 l，则成为有约束的极小化问题。

即要求在满足

$$\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-b_1)^2}\leqslant l\quad 条件下使$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sqrt{(x_1-a_i)^2+(x_2-b_i)^2}\quad 趋极小$$

如果要考虑各个用户需要量的不同，

令　c_i 为中心到第 i 个用户的运输单价

　　w_i 为第 i 个用户的需要量

目标改为使总运费最小，那么问题成为寻求 x_1、x_2 使

$$\sum_{i=1}^{m}c_iw_i\sqrt{(x_1-a_i)^2+(x_2-b_i)^2}\quad 趋极小$$

例 1-4　生产安排问题

设某砖厂生产二种铺地砖。每种使用的材料（砂、砾石、水泥）量相等，但其中一种是彩色的，应添加颜料，且工艺稍复杂，当然利润高些。设有色砖每吨需耗费 2 个机时，3 个人工工时，2 升颜料，创利润 300 元；无色砖与上相应的数据为 1，3，0，200。而能利用的资源每日为 10 个机时，24 个工时，8 升颜料，问两种砖各日产多少吨，利润可最高？

设生产安排为有色砖 x_1 吨，无色砖 x_2 吨。显然可创利润（$300x_1$

$+200x_2$)。需占用的机时($2x_1+x_2$),其总量应不超过给定的 10 个机时,即 $2x_1+x_2\leqslant 10$。类似地工时约束为 $3x_1+3x_2\leqslant 24$,颜料的约束为 $2x_1\leqslant 8$。此外生产的每种砖数不可能为负,即 $x_1\geqslant 0$,$x_2\geqslant 0$(界限约束)。故问题为寻求 x_1、x_2,在满足条件

$$\begin{cases}2x_1+x_2\leqslant 10\\3x_1+3x_2\leqslant 24\\2x_1\leqslant 8\\x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

下使 $300x_1+200x_2$ 趋极大。

例 1-5 投资问题

设某建筑公司有资金 a 万元,可供选择购置的设备有 n 个。已知相应于第 i 种设备所需资金为 a_i 万元,可得收益为 c_i 万元。问如何安排投资才是最合理?

这类问题属投资决策问题。

令 $x_i=\begin{cases}1 & \text{表示决定购置第 } i \text{ 种设备}\\0 & \text{表示不购置第 } i \text{ 种设备}\end{cases}$

那么,问题成为选择一组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,它们应满足下列条件,即

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant a$$

$$x_i(x_i-1)=0\qquad i=1,2,\cdots,n$$

并使总收益 $\sum_{i=1}^{n}c_ix_i$ 趋极大

如果要求单位投资的收益率最高,则可表达为:

使 $(\sum_{i=1}^{n}c_ix_i)/(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)$ 趋极大

如果问题改提为:一个集装箱容积为 a,现有 n 件物品可装。已知相应于第 i 件物品占用的容积为 a_i,重量为 c_i。问应装哪几件物品使箱子的装载重量达到最大?(称背包问题)

可以看出,如仍用 x_i 表示第 i 物件被装入箱内($x_i=1$)或不装

入箱内($x_i=0$),那么背包问题的数学形式与上面投资问题完全一样。

二、优化问题的数学模型

上面这几个例子实质上都是在处理这样一类问题:"选择一组设计变量,在满足规定的要求下,使某种目标或指标最优(极大或极小)。"

通常待求的设计变量记为 x。如果设计变量有多个,例如 n 个,称多变量优化问题,此时可用向量表示,记为 $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$。衡量设计优劣或问题解决得好坏的指标称为目标函数,是设计变量的函数,常记 $f(\mathbf{x})$。规定要满足的条件称约束,也是设计变量 $\mathbf{x}$ 的函数。当有 l 个等式约束时,记 $h_r(\mathbf{x})=0, r=1,2,\cdots,l$;当有 m 个不等式约束时,记 $g_j(\mathbf{x})\geqslant 0, j=1,2,\cdots,m$。总之,一个优化问题可表示为如下数学形式(优化的数学模型),即

$$
\begin{array}{lll}
\text{寻求} & \mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T & \\
\left.\begin{array}{lll}
\text{min. 或 max.} & f(\mathbf{x}) & \\
\text{s. t.} & g_j(\mathbf{x})\geqslant 0 & j=1,2,\cdots,m \\
 & h_r(\mathbf{x})=0 & r=1,2,\cdots,l
\end{array}\right\} & & \qquad (1.1.1)
\end{array}
$$

式中 min(或 max)是 minimize(或 maximize)的缩写,表示极小化(或极大化)函数 $f(\mathbf{x})$ 的值,即求 $f(\mathbf{x})$ 的极小(或极大)。s. t. 是 subject to 的缩写,表示"约束为"或"受约束于"。

设计变量 $\mathbf{x}$、目标函数 $f(\mathbf{x})$ 和约束条件 $g_j(\mathbf{x})$ 与 $h_r(\mathbf{x})$ 是构造优化数学模型的三要素。设计变量是指在优化过程中所要选择的量,优化的目的就是要寻找这些变量的最优组合。它们可以是连续变化的,称连续型设计变量,亦可以是离散的,称离散型设计变量,例如只能取整数或只能取 0、1 二个数中的一个。连续变量在优化中比较容易处理。设计变量的数目越多,问题的规模就越大,求解就越困难,造成所谓"维数灾难"。因此不宜将优化问题中所有的待