初中数理化辅导丛书

代数式和整式

北京出版社

代数式和整式

蒋　声　　陈瑞琛

北京出版社

代数式和整式

蒋 声　陈瑞琛

*

北京出版社出版

（北京崇文门外东兴隆街51号）

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 3.75印张 73,000字

1982年8月第1版　1982年8月第1次印刷

印数 1—105,000

书号：7071·809　定价：0.30元

目　录

一、用字母表示数

在灯谜晚会上，有时会看到一个有趣的谜语：

算盘珠　　　　　　　　　　　（打一数学名词）

由于在珠算中，算盘珠是用来代表数目的，所以谜底显然是“代数”.

不过，在代数课中，真正用来代表数字的却不是算盘珠，而是字母. 要学好代数，必须明白为什么要用字母表示数，怎样表示，有哪些注意事项. 下面通过一些具体例子来说明这些问题.

（一）怎样用字母表示数

例 1　有两个数，已知其中第二个比第一个大 2. 如果用字母 a 表示第一个数，那么第二个数就是 $a+2$.

在这个例子里，并不知道第一个数究竟是多少，它可能等于 3，可能等于 0，也可能等于 $-\frac{1}{2}$ 或其它任何数值. 相应地，第二个数可能等于 5，或者等于 2，或者等于 $1\frac{1}{2}$ 或其它数值，但在任何可能的情形下总是等于第一个数加 2. 如果用字母 a 来简单地表示“第一个数”，那么 $a+2$ 就表示“第一个数加 2”.

例 2　已知小明比大刚小 4 岁. 用 n 表示小明的岁数，

那么大刚的岁数是 $n+4$.

在这个例子里，随着岁月的流逝，小明的岁数和大刚的岁数都在增长，但是大刚的岁数总是等于小明的岁数加 4. 因此，可以简单地用字母 n 和 $n+4$ 分别表示小明和大刚的岁数.

例 3 圆周率（圆周长与直径的比）是一个无限不循环小数：

$$3.1415926535\cdots\cdots,$$

习惯上用字母 π 表示.

在这个例子里，虽然圆周率是一个确定的数，但是因为它是无限不循环小数，不可能把这个数完全写出来，所以用一个字母 π 来简单地表示它. 在具体计算时，根据不同问题的需要，有时取 π 的近似值为 3.14，有时取 3.1416，也有些时候取近似值 $\frac{22}{7}$ 或 $\frac{355}{113}$.

一般地，有下面的法则：

法则 1 在问题中遇到某个数，如果一时不能说出它的确切数值，可以用一个字母来代表这个数。

下面再介绍几个进一步的法则.

法则 2 同一个问题中如果有几个不同的数都要用字母表示，那么不同的数必须采用不同的字母，以免混淆.

例 4 两数之和，用字母 a 表示第一个数，b 表示第二个数，那么它们的和是 $a+b$.

在这个例子里，如果两个数都用字母 a 表示，写成 $a+a$，别人就会认为这是数 a 与它自己的和；只有写 $a+b$ 才能

说明是一个数 a 与另一个数 b 的和.

例 5 分别用字母 a、b、c 表示三角形三边的长度，那么这个三角形的周长是 $a+b+c$.

这个例子谈的是一般三角形，三边的长度必须用三个不同的字母表示. 如果用字母 a、b、a 表示三边长度，就默认有两边具有同一长度 a，成为等腰三角形了.

法则 3 字母与字母相乘时，乘号可以省去. 如果需要写出乘号，也往往不写×，而是写成位于式子当中的一个圆点“·”.

例 6 两数之积. 用字母 a 表示第一个数，b 表示第二个数，它们的乘积可以写成 ab 或 $a\cdot b$.

例 7 圆面积等于半径的平方再乘以圆周率. 用字母 r 表示半径，π 表示圆周率，那么圆面积等于 πr^2.

法则 4 字母与数相乘时，乘号也可省去，但是要把数因子写在字母因子的前面，并且把带分数化成假分数.

例 8 圆周长等于半径的两倍再乘以圆周率. 用字母 r 表示半径，π 表示圆周率，那么圆周长等于 $2\pi r$.

在这个例子里，数因子 2 要写在所有字母因子的前面，而不能写成 $\pi 2 r$ 或 $\pi r 2$.

例 9 数 a 与 $-1\frac{1}{2}$ 的积可写成 $-\frac{3}{2}a$ 或 $-1.5a$.

法则 5 在用字母表示数时，除号常用分数线代替.

例 10 $m\div n$ 常写成 $\frac{m}{n}$.

例 11 两数的算术平均数. 用字母 a 表示第一个数，b

表示第二个数，那么它们的平均数等于两数之和的一半，可表示成$\frac{a+b}{2}$或$\frac{1}{2}(a+b)$.

法则 6 在应用题中，字母只代表数，单位需另外写明.

例 12 设正方形的边长为a厘米，那么它的周长为$4a$厘米.

例 13 李莉比吴芳大1岁．设吴芳的年龄是x岁，那么李莉的年龄是$(x+1)$岁.

注意，这里在$x+1$外边添了一个括弧，这意味着把数x与数1相加，所得的和是李莉的岁数．如果不加括弧，写成$x+1$岁，就变成数x与量“1岁”相加，这是说不通的.

练 习 一

用字母a表示“第一个数”，字母b表示“第二个数”，将下列各题中的运算用字母表示出来：

1．两数之积；

2．两数之和的二倍；

3．第一个数的平方减去第二个数.

(二) 注 意 事 项

学习用字母表示数，有些容易模糊的地方一定要搞清楚，如果不搞清楚就会直接影响到以后的数学课和其它有关课程的学习．现在列举一些必须注意的事项如下：

1．对于字母表示的数，如果没有特别说明，就应该理

解它可以是任何一个数.

通常最容易犯的毛病是：看到一个字母 a，就以为它一定表示正数，其实 a 也可能是某个负数，或者是 0. 同样地，看到一个带有负号的字母，例如 $-a$，也容易认为它一定是负数，其实只有当 a 为正数时，$-a$ 才是负数；而当 a 为负数时，它的相反数 $-a$ 就变成了正数；当 a 为 0 时，$-a$ 也是 0。

例 1 $a+1$ 是否一定比 1 大？

解 不一定. 如果 a 是负数，$a+1$ 就比 1 小；如果 a 是 0，$a+1$ 就等于 1；只有当 a 是正数时，$a+1$ 才比 1 大.

例 2 什么时候 x 比 $-x$ 小？

解 当 x 是负数时，$-x$ 是正数，这时 x 比 $-x$ 小.

例 3 你能比较 $2x$ 与 $3x$ 的大小吗？

解 当 x 是正数时，$2x$ 比 $3x$ 小；当 x 是负数时，$2x$ 比 $3x$ 大；当 x 是 0 时，$2x$ 与 $3x$ 相等，都等于 0.

例 4 a 是否一定比 $\frac{1}{a}$ 大？

解 不一定. 例如当 a 等于 $\frac{1}{2}$ 时，它的倒数 $\frac{1}{a}$ 等于 2，这时 a 就比 $\frac{1}{a}$ 小.

例 5 是否存在这样的数 x，使得 x^3 比 x^2 小，并且 x^4 比 x^3 大？

解 例如当 x 等于 -1 时，$(-1)^3$ 等于 -1，比 $(-1)^2=1$ 小；而 $(-1)^4=1$，又比 $(-1)^3$ 即 -1 大.

2. 在应用问题中，要注意各个量的实际意义，由此决

定字母表示的数是否被限制在某个特定的范围里面.

例 6 初一(2)班共有学生 n 人，其中男生 32 人，求女生的人数.

(答：$n-32$)

在这个例子里，n 是人数，因而一定是正整数. 又因为男生已经有 32 人，再加上女生后，总人数一定更多，所以 n 还必定大于 32.

例 7 矩形的两条相邻的边的长度分别是 a 厘米和 b 厘米，求矩形的面积.

(答：ab 平方厘米)

在这个例子里，a 和 b 都是线段的长度，因而只能是正数.

3. 同一个数，在不同场合，往往会采用不同的字母表示，这时我们要透过形式上的不同看到实质上的一致.

例 8 加法交换律可以叙述成

第一个数＋第二个数＝第二个数＋第一个数.

如果用字母 a 表示第一个数，b 表示第二个数，加法交换律可简单地写成

$$a+b=b+a.$$

但是如果换成另一个人考虑这个问题，他也许用 x 和 y 表示这两个数，把加法交换律写成

$$x+y=y+x.$$

例 9 设某人在 t 小时内走过的路程是 S 公里，求他的速度.

数学上解这类问题时，通常是设速度为每小时 x 公里，

得到

$$x=\frac{S}{t}.$$

而在物理上解这类问题时，却喜欢用字母 v 表示速度，因而得到

$$v=\frac{S}{t}.$$

两种表示形式虽然不同，实质却是一样的。

4．同一个字母，在不同场合可能具有不同的含义，这时我们要透过形式上的一致看到实质上的区别．

例 10 某个圆的半径等于 $2r$，求它的面积．

解 圆面积 A 的计算公式是

$$A=\pi r^2,$$

其中 r 是圆半径．对于本题，圆半径不是 r，而是 $2r$，所以本题中圆的面积是

$$A=\pi\cdot(2r)^2=4\pi r^2.$$

这里，同一个字母 r，在不同场合下表示两种不同的意义．如果不注意，很容易张冠李戴，造成错误．在引用定义、定理和公式时，特别容易发生这类错误．所以在学习时，一定要把定义、定理和公式中每个符号的意义弄清楚，在理解的基础上记忆。

练　习　二

1．从“正数”、“负数”和“0”这三种可能的答案里选择适当的一种填进括弧：

［例］如果 $|a|$ 比 a 大，那么 a 是(负数)。

(1) 如果 a 比 $2a$ 大，那么 a 是(　　)。

(2) 如果 a 比 $\frac{a}{3}$ 大，那么 a 是(　　)。

(3) 如果 $32a$ 与 $-21a$ 相等，那么 a 是(　　)。

2. 如果 a 不是 0，那么 a^2 能否与 $-a$ 相等?

3. 填空：

(1) 练习簿每本的价格是 a 元，买 10 本练习簿共需______。

(2) 第一小组原来有 m 人，现在增加 1 人，因而第一小组现在共有______。

(三) 用字母表示数的优点

用字母表示数，有下面的四个优点：

1. 可以把运算定律用简洁而又普遍的形式表达出来.

例 1 乘法交换律：两数相乘，交换它们的位置，其积不变.

用 a 和 b 表示这两个数，乘法交换律表示成非常简单的形状：

$$ab=ba.$$

2. 可以把各种公式写成便于记忆的简明形式：

例 2 梯形的面积等于上底与下底之和的一半再乘以高.

用 A 表示梯形的面积，a 表示下底，b 表示上底，h 表示高，上述公式可简单地写成

$$A=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

3. 容易看出各个式子之间的相互关系.

4．有利于把复杂问题的条件分析清楚．

后面这两个优点要到以下讨论较复杂的问题时才逐渐显示出来，这里就不举例说明了．

练 习 三

1．用字母 a、b、c 表示任意有理数，试将下列运算定律用字母表示出来：

(1) 加法结合律；

(2) 乘法结合律；

(3) 分配律；

(4) 任何数与它的相反数之和为零．

2．圆周长等于直径与圆周率的乘积．用 C 表示圆周长，D 表示直径，π 表示圆周率，将圆周长的计算公式用字母表示出来．

3．用 a、b、c 表示任意三个有理数，试将下列各句话用字母表示出来：

(1) 这三个数的连乘积等于 1；

(2) 第一个数等于另两个数的和．

4．回答下列问题：

(1) 什么时候 a 与 $\frac{1}{a}$ 相等？

(2) $3a$ 能与 $\frac{1}{3}a$ 相等吗？

(3) $|a|$ 能比 a 小吗？

(4) 已知 $\frac{1}{2a}>0$，a 不能是什么数？

二、代 数 式

（一）什么是代数式

我们已经接触过很多数学式子．例如下面这些都是数学式子：

$$(2+3)\times 5,\ 2^3+1,\ \pi r^2,\ 2b+2,$$

$$(x+y)z,\quad \frac{S}{t},\ \frac{1}{2a},\ x+\frac{1}{x}.$$

这些式子的共同特点是：它们都是由一些数或表示数的字母组成的，各个数或字母之间用加、减、乘、除等运算符号连结起来．

这里需要注意，象$\frac{S}{t}$这样的式子，好象不包含任何加、减、乘、除符号，但是其中的分数线就相当于除号．同样，在πr^2中，也省略了π与r^2之间的乘号，并且把2写在r的右上角就是平方运算的符号．

当然，除去运算符号之外，有些式子里还含有括号，如$(2+3)\times 5$，$(x+y)z$等，这些括号是用来表示运算顺序的，是一种辅助符号，通常用不着特别提到它们．

用运算符号把数或表示数的字母连结而成的式子，叫做**数学表达式**，简称为**表达式**，在不会引起误会的情形下，还

可以简称为式.

单独一个数或单独一个字母可以看成是它自己与1的乘积，例如

$$2=2\times1,\qquad a=a\times1,$$

所以单独一个数或一个字母也被认为是一个表达式.

例 1 下面这些都是表达式：

$$x,\ 3,\ 0,\ a^2,\ 1-\frac{b}{a},$$

$$(2a^3b-c)\{x^2y[ax-b(x^2-y^2)]+c\}.$$

两个表达式之间用等号连起来，得到的式子叫做**等式**. 两个表达式之间用>(大于)或<(小于)这类不等号连起来，得到的式子叫做**不等式**. 等号和不等号都不是运算符号，所以等式和不等式都不是表达式.

例 2 $3x+1$ 是一个表达式，0 也是一个表达式，但是 $3x+1=0$ 不是一个表达式，而是一个等式.

类似地，$a^2=bc$、$3x-y=\frac{1}{x}$ 都是等式，因而这两个式子都不是表达式.

例 3 $2x>5$ 是不等式，不是一个表达式.

表达式是一个非常广泛的概念. 到目前为止，我们所学过的运算还只限于加、减、乘、除、乘方这五种. 加法的逆运算是减法，乘法的逆运算是除法. 乘方也有逆运算，叫做**开方**，这种新运算将在以后详细学习. 加、减，乘、除，乘方、开方，这六种运算总称为**代数运算**. 如果一个表达式中的所有运算都是代数运算，这样的表达式就叫做**代数式**.

由于我们在现阶段学习中接触的运算全部限于代数运算，所以现阶段遇到的表达式都是代数式。正因为这样，在我们这本书里，从现在开始，不再使用“表达式”这个术语，而改用“代数式”这个术语。

代数式里的每个字母都表示数。因此，数的一些运算定律和运算规则，如加法交换律、结合律，乘法交换律、结合律，分配律，四则混合运算的顺序等等，也都适用于代数式。

练　习　四

1．下列各题中的式子是不是代数式？

(1) $2x+5$；

(2) $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$；

(3) $(x-y)(y-z)(z-x)$；

(4) x^2+px+q；

(5) 0；

(6) $A=\pi r^2$；

(7) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}$；

(8) a；

(9) $x=2$；

(10) $4>1+2$.

2．式子 $3x+1=5$ 是不是一个代数式？等号左边的 $3x+1$ 是不是代数式？等号右边的 5 是不是代数式？

3．等式是不是代数式？等式与代数式有什么关系？举例说明。

4．举例说明公式与代数式的关系。

5．举例说明公式与等式的关系。