

中学生数理化“巧用”系列

立体几何巧用图

识图 · 作图 · 析图 · 解图

中学数学高级教师 特级教师
张雪明 编著

中国致公出版社

709

G634.62

234

立体几何巧用图

——识图·作图·析图·解图

中学数学高级教师 特级教师

张雪明 编著

中国致公出版社

图书在版编目(CIP)数据

立体几何巧用图：识图·作图·析图·解图/张雪明编著. —北京：中国致公出版社，2002.7

ISBN 7-80179-007-3

I. 立… II. 张… III. 立体几何课—高中—教学参考资料 IV. G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 038280 号

立体几何巧用图：识图·作图·析图·解图

编 著 者：张雪明

责任编辑：刘 秦

封面设计：盛 熠

版式设计：盛 熠

出版发行：中国致公出版社

(北京市西城区太平桥大街 4 号 电话 66168543 邮编 100034)

经 销：全国新华书店

印 刷：北京市顺义兴华印刷厂

印 数：001—10 000 册

开 本：850×1168 1/32 开

印 张：7.125

字 数：160 千字

版 次：2002 年 7 月第 1 版 2002 年 7 月第 1 次印刷

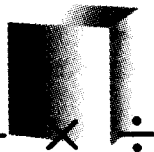
ISBN 7-80179-007-3/G·004

定价：12.00 元

版权所有 翻印必究

编写说明

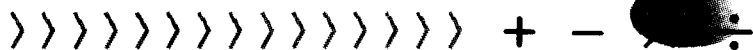
>>>>>>>>>>>>>>>>>>> + - × ÷



1. 本书立意为“立体几何自学型方法指导书”，扎根于生活常识且外延宽广，突出思想方法、时代精神、人文精神。既多向渗透又自成体系，既关注基础又突出能力，具有鲜明“个性”。
2. 本书根据学生学习规律和特点，针对学生立体几何学习中产生困难的具体原因，打破长期以来立体几何书籍的编排常规，在内容结构及其呈现方式上大胆创新，真正符合学生的认识规律。
3. 本书既适合初学也适合复习。直观、易学、有趣是本书的一个特点，初学者通过本书的学习，可以轻松从常识水平直到精通水平。重高考走势、重能力素养、重思想方法是本书的第二个特点，其能力要求和内容范围完全达到甚至超过高考要求，使得使用本书进行高考复习的同学能够从容应对高考试题中的立体几何问题。
4. 本书试图通过对一些世界名题的介绍，再现历史上伟大数学家们的杰出劳动，展示数学的魅力。使读者能领略大师们的风采、欣赏数学的美丽，以启迪读者的思想和智慧。
5. 本书内容范围以人教版高中实验教材第二册（下A）中的立体几何内容为准。

编著者

前言



生活——立体几何大课堂

立体几何因为难懂难学而“名声不佳”。害怕立体几何的同学实在不是少数。为什么会造成这种局面，恐怕原因是多方面的。其中最重要的因素，我想是因为缺少能引起他们学习立体几何兴趣的材料，我们大部分的立体几何教材过多强调了立体几何的抽象性，整个学科完全变成了三个抽象概念——点、线、面——的“产儿”，忽视了立体几何的发生基础——普通生活，使得我们在学习的时候难以感受到立体几何知识的来源及其发生过程，既引不起学习者的兴趣，也影响了学习者入门的进程，甚至许多同学用了那么多的功夫，却始终站在立体几何的大门之外。

事实上，研究立体几何，首先要学会研究生活。立体几何中的“形体”广泛存在于我们生活的每一个角落。例如图1所示的民宅就是一个长方体和一个三棱柱的组合。图2所示的金字塔是一个棱锥。工业上经常使用的铆钉则是一个圆柱和一个球缺的组合。平时我们使用的工具、物品的形状大多也是一些基本几何体或者是它们其中若干个

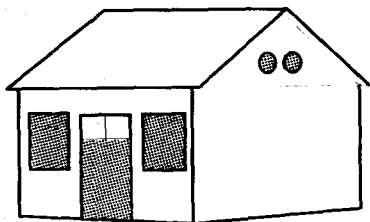


图1

的组合。

一些生活常识直接地、直观地反映着立体几何的基本原理。为了获得一根直立于地面而不倒的支柱，我们只需把它垂直固定在地面上两根交叉的木棒上（图3），这与立体几何中“线面垂直

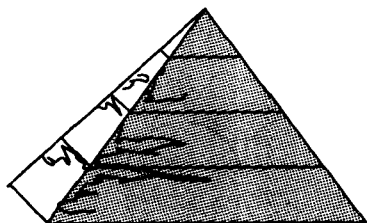


图2

的判定定理——垂直于平面内两条相交直线的直线垂直于该平面”的结论同出一辙；房门通常靠两个安装在同一边沿的旋转栓固定，这里体现着二面角的特征，当我们外出的时候，只需一把锁就能锁定房门（图4），这又直接反映了“不共线的三点确定一个平面”的原理，其中的门锁和两个旋转栓就是确定房门这个“平面”的三个不共线的“点”，正因为如此，我们不能把锁和两个旋转栓安装在门的同一边缘上，因为这样做，即使是无数把锁，也是锁不住房门的。

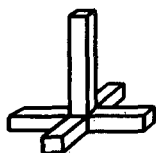


图3

立体几何的知识反过来又可以指导实践，为生活服务。平时生活中，一些问题看上去很简单，但如果要解决它却并不容易。例如把三个半径都是 R 的木球两两相切堆放在一起（见图5），共有二层，它们的高度应当是多少呢？常识告诉我们，这个值不会是 $4R$ ，但如果仅仅从生活中的观察、估计等方式来求解的话，是难以获得它的准确结果的，只有应用立体几何的方法，

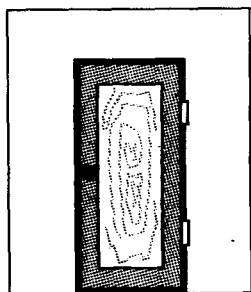


图4

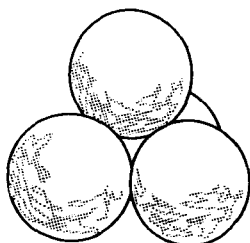


图 5

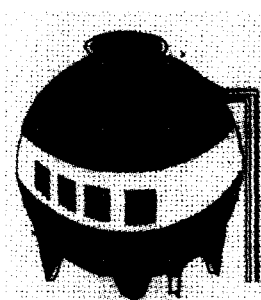


图 6

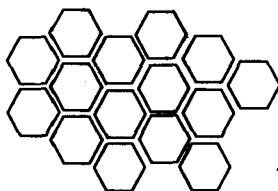


图 7

通过转化、计算才能得到准确的答案(你愿意试一试吗?)。

如果用相同面积的材料作为表面分别制作出一个长方体水箱、一个与长方体等高的圆柱体水箱、一个球形水箱(图6)。虽然靠常识、经验或者实验都可以断定它们一个比一个能盛(容积较大),但要给出严格的论证,不仅需要立体几何知识,而且还需要其他一些数学内容作为基础。这就涉及到立体几何的学科渗透问题了。

的确,我们每个人、每一天都在通过不同的方式与立体几何打着交道。即使一些动植物也不例外,它们以独特的方式遵循着、甚至创造着自己的“立体几何”。被誉为“天才建筑师”的蜜蜂,其住房布局(图7)的合理性及公平性无与伦比,结构的巧妙性及精美性令人叫绝。数学家表明,只有正六边形、正方形、正三角形三种正多边形能够镶嵌平面,使得没有剩余的空隙。而在上述三者中,当它们面积相等时,正六边形有最小的周长,这意味着,在建造蜂巢中为了获得同样的空间,蜜蜂把自己的小窝建成正六边形所用的蜂蜡较少,所做的工

作也较少，而且，居住的舒适度也相对较高。历史上，作为世界性名题——《蜂巢问题》——曾吸引了一大批数学家关注、研究，进一步得出的结论会让我们对这一小精灵佩服的五体投地（参见本书阅读材料）。也使我们人类的所有建筑师为之汗颜。

我们就生活在一个立体几何的世界里，生活本身就是一个立体几何的大课堂！

方法——立体几何敲门砖

学习立体几何，有哪些需要我们注意的方面呢？

第一，关注生活。我们应当把所学的立体几何知识与实际生活相联系，一方面善于从生活中发现立体几何模型，归纳出立体几何的一些基本原理；另一方面能够把立体几何的知识“还原”回生活——追寻其生活的原型。通过这样的学习，能消除你对立体几何的恐惧感、神秘感。

第二，建立感情。“立体几何”是有趣的、好学的、有用的，我们要热爱立体几何。立体几何是一门奇妙的基础学科，处处闪耀着数学美的光辉，学好立体几何，不仅可以掌握生活中的一个武器，提高自己的空间想像能力和创新水平，而且能陶冶情操，享受几何学的美丽。

第三，学会识图。识图是指对立体几何图形——特别是立体几何中涉及到的那些基本几何体的观察、识别、想象。要能结合生活经验对它们进行比较全面而清醒的观察和提炼，把握其中的关键几何量。必要时可以通过有关书籍学习一点二视图、三视图的简单知识，提高自己识图的能力。识图是学习立体几何的基础。

第四，学会作图。正确准确作图，是学习立体几何的最重要基本功。要能作画规范的空间线、面及简单几何体的直观图，善于利用图形表达空间点、线、面的位置关系。保证所作图形的直观性、实用性。防止错图、不可能图的出现。

第五，学会析图。所谓析图就是指对空间图形的分析和研究，特别是对空间点、线、面位置关系的分析、描述、论证、计算。这是立体几何的主体内容。

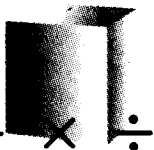
第六，学会解图。通过化归、类比、展折、割补等思想方法的应用，学会对空间图形的分解、组合，提高空间想像能力。应用立体几何知识提高分析问题和解决问题的能力。解图，既是立体几何基础知识、基本方法、基本技能的体现和深化，也是立体几何的最终目的。

好了，现在就请你和我一起走进奇妙的立体几何世界！

编著者

2002年6月，江苏泗阳

本书阅读线索与建议



>>>>>>>>>>>>>>> + - × ÷

- 初学者，请按下列顺序学习：

前 言 — 第 1 章 — 第 2 章
— 第 3 章

- 高考复习者，请按下列顺序学习：

前 言 — 第 3 章 — 第 4 章

- 从常识起步、直到精通者，请按下列顺序学习：

前 言 — 第 1 章 — 第 2 章
— 第 3 章 — 第 4 章

- 希望成为“立体几何小专家”者，请学习本书所有内容，包括阅读材料。

>>>>>>>>>>>>>>> + - x ÷

1

第4章 解 图	(126)
§ 4.1 化归思想方法	(126)
§ 4.2 类比思想方法	(139)
§ 4.3 展折思想方法	(152)
§ 4.4 割补思想方法	(169)
§ 4.5 应用思想方法	(180)
阅读材料六：祖暅原理，辛卜生公式.....	(194)
阅读材料七：世界名题赏析——蜂巢问题.....	(199)
练习答案	(203)
参考资料	(215)

§ 1.1 基本几何体

1.1.1 必要的说明

立体几何中的几何体毕竟不是生活中的几何体，它们实际上是一种理想化的几何体，它们没有质地、没有重量、没有气味，是对实际生活中的形体的抽象。

本章中我们将认识一些常见的几何体，并熟悉平面的概念。已经学过立体几何的人也许会对本章的编排顺序感到奇怪，因为它与常见的立体几何书籍不同，把平面的概念放在了简单几何体的后面。我们这样做的理由是：点、线、面作为抽象概念，接受起来要比简单几何体更困难。实际上，点、线、面是简单几何体中相关元素的再抽象。经验告诉我们，本书的处理方式更符合学生的认识习惯。

关于基本几何体及点、线、面概念的抽象的层次性可以通过下面的图 1.1-1 说明:

生活中的形体可以通过抽象获得立体几何中的形体，而立体几何中的形体的相关元素通过再抽象得到点、线、面的概念。反过来，对点、线、面的概念、位置关系的认识可以指导我们对几何形体的深入研究，且最终服务于生活实际。

当然，本章的中心任务是识图，所以我们一般不轻易涉及相关几何体的性质，而只是限于对图形本身及其相关元素的认识。

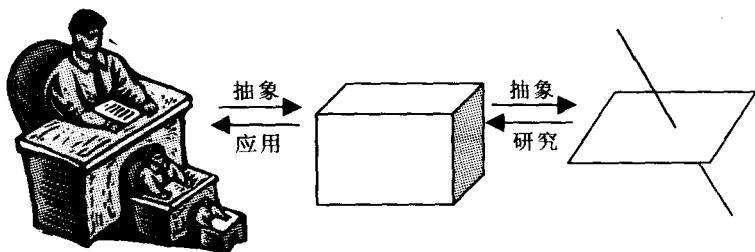


图 1.1-1

1.1.2 棱柱

棱柱的特征描述：

是由若干个多边形面围成的一种封闭几何体，其中，有两个面互相平行，其余各个面都是平行四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都相互平行（图 1.1-2）。

棱柱的相关几何量：

- (1) 底面——两个互相平行的面。
- (2) 侧面——除去底面的面（都是平行四边形）。
- (3) 棱——两个面的公共边。
- (4) 侧棱——两个侧面的公共边。
- (5) 顶点——侧面四边形和底面多边形的公共顶点。
- (6) 对角线——不在

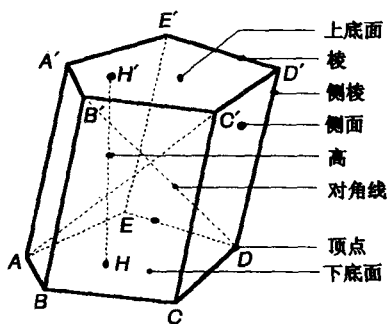


图 1.1-2

同一个面上的两个顶点的连线。

(7) 高——两个底面之间的距离。

棱柱的表示：

棱柱用表示底面顶点的字母来表示，例如图 1.1-2 中的棱柱，记作棱柱 $ABCDE - A'B'C'D'E'$ ，或者用表示一条对角线端点的两个字母来表示，如棱柱 AC' 。

棱柱中的相关几何量都可以用相应顶点的字母组合表示。

棱柱的分类：

斜棱柱——侧棱倾斜，与底面不垂直。

直棱柱——侧棱与底面垂直，是“直立着的棱柱”。其侧面平行四边形演变为矩形。

正棱柱——不仅是直棱柱，而且底面是正多边形（图 1.1-3）。

另外，棱柱也可以根据其底面是三角形、四边形、五边形……而分别叫成三棱柱、四棱柱、五棱柱（图 1.1-3）……

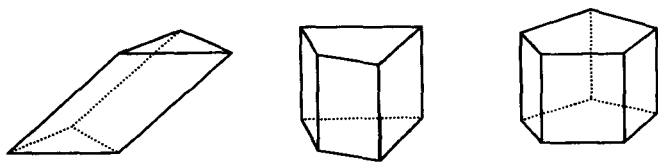


图 1.1-3

1.1.3 平行六面体

平行六面体的特征描述：

如果一个棱柱的底面是平行四边形，那么就把它称为平行六面体。请注意，平行六面体首先是四棱柱。很显然，平行六面体的底面、侧面共六个面都是平行四边形，而且三组对面的平行四边形是全等的（图 1.1-4）。

特殊的平行六面体：

直平行六面体——侧棱垂直于底面的平行六面体。

长方体——底面是矩形的直平行六面体叫长方体。事实上，长方体的所有面都是矩形。

正方体——棱长都相等的长方体叫做正方体。正方体的六个面都是全等的正方形（图 1.1-5）。

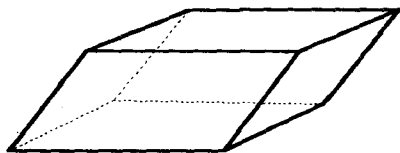


图 1.1-4

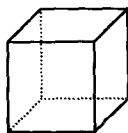
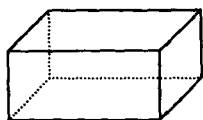
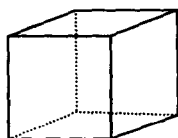


图 1.1-5

1.1.4 棱锥

棱锥的特征描述：

是一个多边形和若干个三角形围成的封闭几何体，其中，除了那个多边形，所有的三角形都共有一个顶点（图 1.1-6）。

棱锥的相关几何量：

底面——上面关于

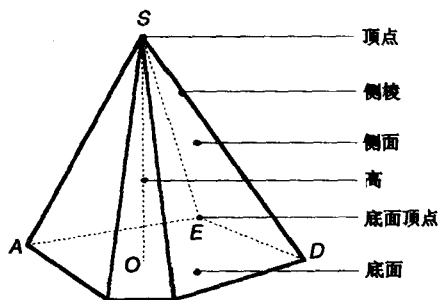


图 1.1-6

棱锥的描述中，提到的那个多边形叫做棱锥的底面。

侧面——具有一个共同顶点的那些三角形，也就是棱锥中除去底面的所有其他面。

侧棱——相邻两个侧面的公共边。

顶点——各侧面的公共顶点。

高——棱锥顶点到底面的距离。也可以说是连结顶点和顶点在底面上的正射影所得线段的长度。

棱锥的表示：

可以用表示顶点和底面各顶点，或者底面一条对角线端点的字母来表示。例如，图 1.1-6 中的棱锥表示为 $S-ABCDE$ 或者 $S-AC$ 。

棱锥的分类：

棱锥有一般棱锥和正棱锥之分，如果一个棱锥的底面是正多边形，并且顶点在底面上的射影是该正多边形的中心，则这个棱锥叫做正棱锥。否则就是一般棱锥。

根据棱锥底面多边形的边数不同，还将棱锥相应地称作三棱锥、四棱锥、五棱锥、六棱锥等……参见图 1.1-7，其中的四个棱锥中，四棱锥和五棱锥是正棱锥的直观图，其余两个是一般棱锥的直观图。

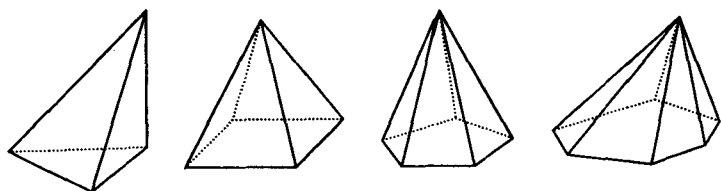


图 1.1-7