

622932

551

1017

T 3

高等学校试用教材

建筑力学

下 册

武汉水利电力学院建筑力学教研室



成都科学技术大学图书馆

基本馆藏

人民教育出版社

551
1017
T 3

高等学校试用教材

建筑力学

下册

武汉水利电力学院建筑力学教研室编
栗一凡 主编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书包括了传统的材料力学、结构力学和某些近代工程力学的内容,根据它们的内在联系进行了综合的编写。全书分上、中、下三册。上、中册为各有关专业必需的基本内容,下册为选学内容,可根据专业需要选学其中的有关部分。

下册内容包括矩阵位移法、结构的动力计算、能量原理、材料力学性质的进一步介绍、断裂力学概论、实验应力分析等。

本书为高等学校工科力学课程的试用教材,主要适用于水利和土建类专业,也可供其他有关专业和工程技术人员参考。

高等学校试用教材

建 筑 力 学

下 册

武汉水利电力学院建筑力学教研室编

栗一凡 主编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

香河县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 18.5 字数 400,000

1981年1月第1版 1981年7月第1次印刷

印数 00,001—6,500

书号 15012·0301 定价 1.55 元

目 录

第二十一章 矩阵位移法.....1

- 第一节 矩阵位移法的基本概念1
- 第二节 等截面直杆单元的劲度分析 单元劲度矩阵4
- 第三节 结点荷载作用下结构的计算 结构劲度矩阵10
- 第四节 杆端内力的计算 杆端内力矩阵23
- 第五节 一般荷载作用下结构的计算 等效结点荷载27
- 第六节 考虑剪力对变形影响时的计算35
- 习题38

第二十二章 结构的动力计算.....40

- 第一节 结构中的动力计算问题40
- 第二节 等加速度运动构件的计算41
- 第三节 简单冲击作用的计算42
- 第四节 单自由度系统的自由振动与强迫振动47
- 第五节 多自由度系统的自由振动与强迫振动60
- 第六节 用矩阵位移法分析多自由度系统的振动69
- 第七节 用能量法计算结构的自振频率82
- 第八节 地震和地震荷载理论概述86
- 第九节 结构物的地震反应88
- 习题99

第二十三章 能量原理.....102

- 第一节 概述102
- 第二节 应变能、应变余能和总势能103
- 第三节 最小总势能原理114
- 第四节 基于最小总势能原理的瑞利-李滋法118
- 第五节 最小总余能原理125
- 习题134

第二十四章 材料力学性质的进一步介绍.....137

- 第一节 影响材料力学性质的主要因素137
- 第二节 温度、时间对材料力学性质的影响138
- 第三节 变形速度对材料力学性质的影响144
- 第四节 交变应力与材料的疲劳145

第二十五章 断裂力学概论.....152

- 第一节 概述152
- 第二节 线弹性断裂力学的基本理论155
- 第三节 应力场强度因子 K 的计算166
- 第四节 线弹性断裂力学理论在小范围屈服条件下的推广应用175
- 第五节 材料的平面应变断裂韧性 K_{Ic} 及其测试方法181
- 第六节 在交变应力作用下疲劳裂纹的亚临界扩展速率及耐寿命的估算186
- 第七节 低应力脆性断裂判据及其在工程中的应用195
- 第八节 弹塑性断裂力学概要201
- 习题209

第二十六章 实验应力分析.....211

- 第一节 概述211
- 第二节 相似条件的分析212
- 第三节 电阻应变测量法的基本原理224
- 第四节 静荷载作用下结构的应力测量232
- 第五节 电阻应变测量技术中的几个问题239
- 第六节 平面光弹性的基本原理248
- 第七节 根据实验资料计算应力257
- 第八节 三向光弹性简介265
- 第九节 全息光弹性简介275
- 第十节 光弹性模型的制作和加载方法284

附录 IX 习题答案.....289

第二十一章 矩阵位移法

在本书中册第十五章计算超静定结构的位移法中。为了便于手算（即用计算尺或简单计算机进行计算），对于基本假定的设立、基本未知数的确定、基本结构的选取等，都尽可能地考虑使基本未知数的个数少一些，这样就尽可能地使典型方程的个数少一些，以减少用手算的计算工作量。随着电子计算机的广泛应用，应用电子计算机解算数百阶的线性代数方程已不是什么困难问题了。在这种情况下，在计算超静定结构的位移法中对于基本假定的设立、基本未知数的确定、基本结构的选取等方面也就可以有所不同。除此以外，为了使各种计算更加规格化，以便于编制电子计算机计算程序，还广泛的采用了矩阵位移法，也就是用矩阵来阐述位移法。矩阵位移法虽然在电子计算机使用以前就已经确立了，但它只是在电子计算机得到广泛应用以后，才得到了更好的发展与应用。

第一节 矩阵位移法的基本概念

在本书中册第十五章的位移法中，为了简化计算曾用过两条基本假定，一是计算杆的位移时可以忽略轴向变形和剪切变形的影响；二是：所有的位移都是小位移。采用了这两条假定目的是为了减少基本未知数和计算工作量。事实上，一个结构如果存在有轴力和剪力，就必然有轴向变形和剪切变形，如果忽略它们的影响，则对计算结果的精度就必然有影响。为了提高计算结果的精度，我们不再采用第一条假定，也就是计算结构的变形时将同时考虑到弯曲、轴向及剪切

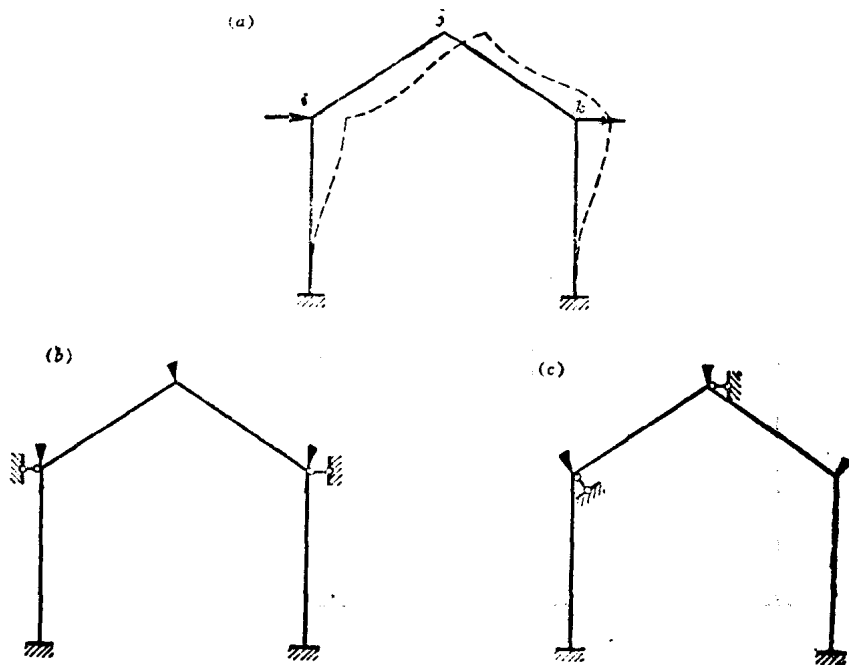


图 21-1

等三种变形的影响；对于第二条小位移的假定仍旧采用，因为在一般情况下，采用了这条假定对结构强度、刚度的计算可以简使得多，而对结果精度的影响却十分微小。

显然，在不采用前述第一条假定的情况下，结点位移未知数的数目将要大大增加。例如如图 21-1a 所示的结构，如果采用第一条假定，其基本位移未知数只有 5 个，包括三个刚结点的 3 个角位移和任意两个刚结点的 2 个线位移，而且其中两个线位移的方向还可以根据计算的方便来选取，如图 21-1b, c 所示；如果不采用这一假定，那么每个刚结点除了有 1 个角位移未知数外还有 2 个线位移未知数，整个结构一共有 9 个位移未知数，其基本结构将如图 21-2 所示。对于后面这种情况，其结点线位移的方向，为了计算上的方便，通常统一采用与所取的一个正交坐标系的 x 轴或 y 轴平行，并且称这个坐标系为整体坐标系或结构坐标系。在这里我们采用的是右手坐标系。

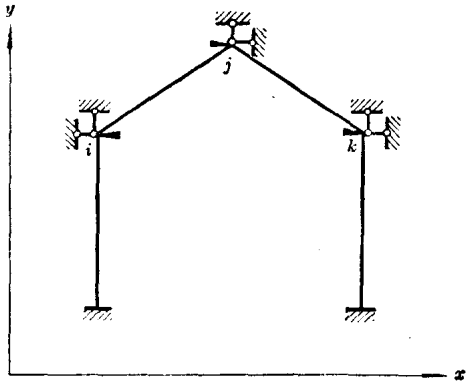


图 21-2

取了这样的基本结构，虽然基本未知数增加为 9 个，但如果分别取每个结点为脱离体，并且列出它们的平衡条件时，则每一个结点可以成立 $\sum X=0$ 、 $\sum Y=0$ 、 $\sum M=0$ 等 3 个平衡方程，一共可以成立 9 个平衡方程。因此，位移法典型方程的数目仍与未知数的数目相等，足以解算出全部的未知数。

如图 21-3a 所示的刚架，它不仅有刚结点而且有铰结点，则可以取铰结点 2 的角位移为未

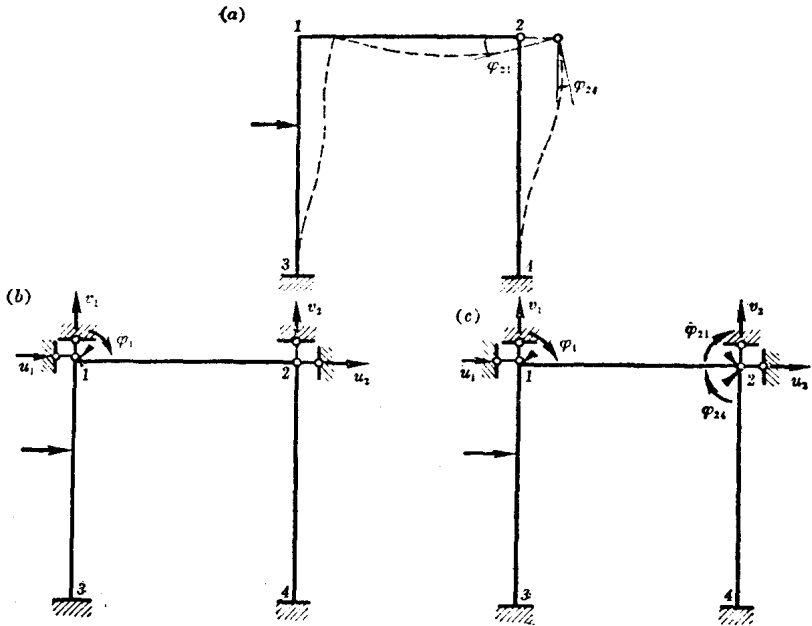


图 21-3

知数。这样,基本未知数的总数为5,由此而选出的基本结构如图 21-3b 所示。在此基本结构中,1-3 杆可以取作两端固定的单跨梁,1-2 杆及 2-4 杆可以取作一端固定、另一端铰支的单跨梁。计算这些未知数时,取结点 1 为脱离体可以成立 3 个平衡方程,取结点 2 为脱离体可以成立 $\Sigma X=0$ 、 $\Sigma Y=0$ 两个平衡方程,一共有 5 个平衡方程,恰恰足以求解 5 个未知位移。此外,我们也可以取铰结点 2 的角位移作为未知数,因为在铰结点处的角位移是不连续的,即 φ_{21} 与 φ_{24} 是不相等的,所以结点 2 应该有 2 个角位移未知数。这样,一共有 7 个未知数,选取的基本结构如图 21-3c 所示。在结点 2 加了两个刚臂分别控制着 φ_{21} 及 φ_{24} 的转动,对这样的基本结构,它的每一根杆都可以取成为两端固定的单跨梁。这种基本结构虽然有 7 个独立的基本未知数,但是以结点 1 为脱离体时可以成立 3 个平衡方程,以整个结点 2 为脱离体(图 21-4a)时可以成立 $\Sigma X=0$ 与 $\Sigma Y=0$ 两个平衡方程。此外,还可以根据铰不能承受弯矩的特点,分别截取杆 2-1 及杆 2-4 的一部分为脱离体(图 21-4b, c)各成立一个 $\Sigma M=0$ 的平衡方程,这样可以成立 7 个独立的平衡方程以解算 7 个独立的基本未知数。

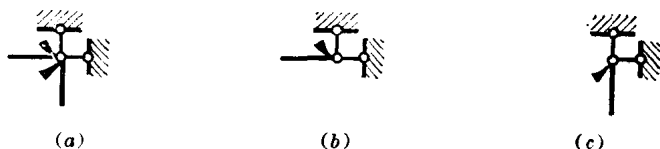


图 21-4

如上所述,图 21-3b, c 所示的两种不同的基本结构都可以用来计算图 21-3a 所示的超静定结构,但是各有特点。图 21-3b 所示的基本结构虽然只有 5 个基本未知数,但是需要应用两种单跨梁的形常数及载常数,图 21-3c 所示的基本结构虽然有 7 个基本未知数,但是只需要应用一种单跨梁的形常数及载常数。在某些情况下(例如变截面梁、或需要同时考虑弯曲、轴向及剪切变形的影响时),后一种基本结构常优先为机算所采用,因为它只需要一种两端固定单跨梁的形、载常数,而每一种单跨梁的形、载常数常常是很繁杂的,能够少用一种单跨梁的资料就可以使计算机的计算程序简单许多。但是,取后一种基本结构也有不利之处,就是基本未知数比较多。在本章中,我们将只采用这种形式的基本结构来计算有铰结的刚架结构。

对于超静定桁架,手算时通常都采用力法,因为力法典型方程的数目比较少。如果用机算,虽然用位移法时的典型方程数目要多一些,但是编制计算程序的工作比较简单,所以即使是超静定桁架的计算也往往采用位移法。用位移法计算桁架时的原理和方法与计算刚架的相同。例如如图 21-5a 所示的桁架,用位移法计算时,也是以结点位移作为未知数。因为所有的结点都是铰结点,同时各杆都只有轴力,所以只要取每个结点的 2 个线位移作基本未知数。对于支座结点的位移可以根据支承情况来确定,或没有线位移或只有 1 个线位移。各结点所有线位移的方向仍取为与整体坐标轴平行。取图 21-5b 所示的基本结构时,这个桁架共有 9 个线位移未知数。通过分别取结点 2、3、5、6 为脱离体,并且分别对每个结点成立 $\Sigma X=0$ 、 $\Sigma Y=0$ 两个平衡方程,一共可以成立 8 个平衡方程,另外取结点 4 为脱离体,可以成立 $\Sigma X=0$ 的平衡方程。这样,平衡方程的数目正等于基本未知数的数目,因而可以解出各个结点的位移。

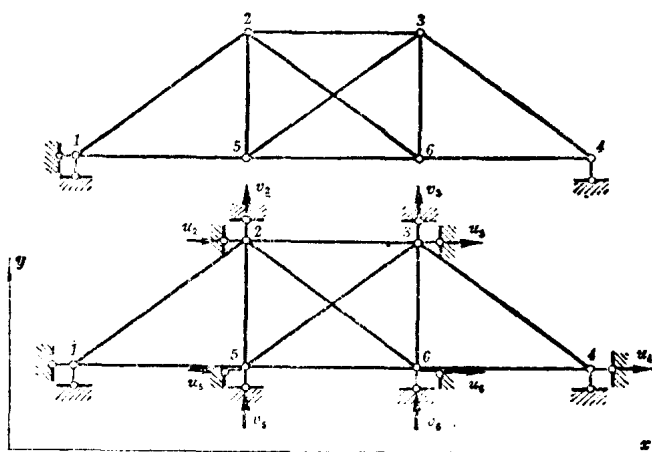


图 21-5

以上介绍了矩阵位移法的基本概念。此外,为了适应机算的要求,对有铰结点的刚架,我们将铰结点的角位移也取作了基本未知数。最后,还指出了位移法也可以推广应用于超静定桁架的计算。这样,在本章中,计算各种刚架时就只需要一种两端固定单跨梁的形常数和载常数;计算桁架时就只需要轴力杆的形常数,我们把这种单跨梁或轴力杆称为基本杆或单元。

第二节 等截面直杆单元的劲度分析 单元劲度矩阵

在上节中,我们介绍了矩阵位移法中基本假定、基本未知数以及基本结构的有关问题。为了计算出所有的位移未知数,需要列出位移法的典型方程,而为了计算典型方程中的系数又必须用到各相应基本杆的形常数,也就是要运用到基本杆的杆端位移与杆端力之间的关系。本节主要就是建立它们之间的关系,这种工作叫做单元的劲度分析。下面我们先对两端固定的等截面直杆单元作劲度分析。

设有如图 21-6a、b 所示的两端固定的基本杆,为了以后的计算需要,除了整体坐标系 $x-y$ 外,还要建立一个局部坐标系或单元坐标系 $\bar{x}-\bar{y}$,局部坐标系也采用右手坐标系,并且规定 $\bar{x}$ 轴恒与杆轴重合和朝向结点 i 到 j 的方向。按整体坐标系表示的杆端位移和杆端力(图 21-6a、b),分别用矩阵表示为:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}, \quad \{N\} = \begin{Bmatrix} N_{ij} \\ N_{ji} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ M_{ij} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ M_{ji} \end{Bmatrix} \quad (21-1)$$

式中的 u 及 v 分别表示沿 x 轴及 y 轴方向的线位移, φ 表示角位移,下标 i 和 j 表示 i 端和 j 端; X 和 Y 表示沿 x 轴和 y 轴的杆端力, M 表示杆端力矩,下标 ij 或 ji 表示 ij 杆的 i 端或 j 端。

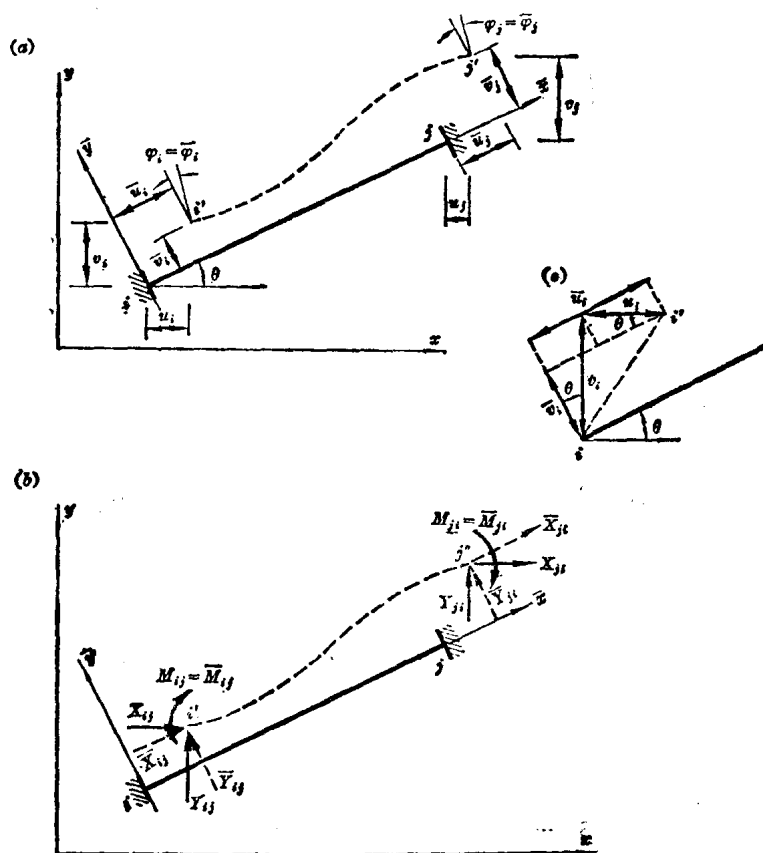


图 21-6

在这里重新规定：线位移及杆端力以沿坐标轴正方向者为正，反之为负（注意，这个规定与第十五章的有关规定不同）；角位移及杆端力矩以顺时针转者为正，反之为负。

按局部坐标系表示的杆端位移及杆端力分别为：

$$\{\bar{\delta}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_i \\ \bar{\delta}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{N}\} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_{ij} \\ \bar{N}_{ji} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_{ij} \\ \bar{Y}_{ij} \\ \bar{M}_{ij} \\ \bar{X}_{ji} \\ \bar{Y}_{ji} \\ \bar{M}_{ji} \end{Bmatrix} \quad (21-2)$$

凡是按局部坐标系表示的量，上面都加个“-”号，按整体坐标系表示的量则不加，以示区别。

如果已知用整体坐标表示的杆端位移，从图 21-6c 中表示的几何关系，可以求得用局部坐标表示的杆端位移为：

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_i &= u_i \cos \theta + v_i \sin \theta \\ \bar{v}_i &= -u_i \sin \theta + v_i \cos \theta \\ \bar{\phi}_i &= \phi_i \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

同样

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_j &= u_j \cos \theta + v_j \sin \theta \\ \bar{v}_j &= -u_j \sin \theta + v_j \cos \theta \\ \bar{\varphi}_j &= \varphi_j \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

式(a)、(b)可以分别用矩阵表示为:

$$\{\bar{\delta}_i\} = [\lambda] \{\delta_i\}, \quad \{\bar{\delta}_j\} = [\lambda] \{\delta_j\} \quad (21-3)$$

式中

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21-4)$$

如果将式(21-3)的两式合并,可以写成

$$\{\bar{\delta}\} = [L] \{\delta\} \quad (21-5)$$

很明显,如果已知整体坐标的杆端力,用同样的关系可以求得局部坐标的杆端力,即

$$\{\bar{N}\} = [L] \{N\} \quad (21-6)$$

以上二式中的

$$[L] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (21-7)$$

上式为由 $[\lambda]$ 组成的 6×6 阶矩阵。矩阵 $[\lambda]$ 及 $[L]$ 都叫做转换矩阵,通过它们可以将整体坐标表示的量化为局部坐标表示的量。

如果反过来,已知局部坐标表示的量,要化为整体坐标表示的量,也可以由如下的矩阵运算求得。

在式(21-5)等式的左、右边同时左乘以 $[L]^{-1}$ 并化简,则有

$$[L]^{-1} \{\bar{\delta}\} = [L]^{-1} [L] \{\delta\} = \{\delta\}$$

由于转换矩阵存在下列关系:

$$[L]^{-1} = [L]^T \quad (c)$$

即转换矩阵的逆矩阵就等于其转置矩阵^①。所以有

① 由于弹性体所作的功,不因所取坐标的不同而不同,所以应该有

$$W = \{N\}^T \{\delta\} = \{\bar{N}\}^T \{\bar{\delta}\}$$

将式(21-6) $\{\bar{N}\} = [L] \{N\}$ 及式(21-5) $\{\bar{\delta}\} = [L] \{\delta\}$ 代入上式,可以得到

$$\{N\}^T \{\delta\} \equiv \{\bar{N}\}^T \{\bar{\delta}\} \equiv ([L] \{N\})^T [L] \{\delta\} \equiv \{N\}^T [L]^T [L] \{\delta\}.$$

因为等式的左、右边恒等,所以应该有

$$[L]^T [L] = [I]$$

由此可以知道

$$[L]^{-1} = [L]^T$$

$$\{\delta\} = [L]^T \{\bar{\delta}\} \quad (21-8)$$

同样, 杆端力也有相同的转换关系, 即

$$\{N\} = [L]^T \{\bar{N}\} \quad (21-9)$$

这样, 用式(21-7)建立了转换矩阵 $[L]$ 后, 就可以用式(21-5)、(21-6)、(21-8)、(21-9)将两种坐标系表示的量互相转换。

下面再按局部坐标系计算杆端位移与杆端力的关系, 即计算图 21-6a、b 所示的 ij 杆, 当 i 端及 j 端分别产生 $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{\varphi}_i, \bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{\varphi}_j$ 的位移时, 杆的 i 端及 j 端的杆端力 $\bar{X}_{ij}, \bar{Y}_{ij}, \bar{M}_{ij}, \bar{X}_{ji}, \bar{Y}_{ji}, \bar{M}_{ji}$ 的数值。杆的弹性模量 E 、截面面积 A 、截面惯性矩 I 、杆长 l 都为已知。计算时可以采用第十三章所介绍的力法, 需要注意, 在计算系数和自由项时, 需要同时考虑弯矩和轴力两种因素对位移的影响。剪力对位移的影响, 在本节内不加考虑, 现将计算的结果写出如下:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_{ij} &= \frac{EA}{l} \bar{u}_i - \frac{EA}{l} \bar{u}_j \\ \bar{Y}_{ij} &= \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_i - \frac{6EI}{l^2} \bar{\varphi}_i - \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_j + \frac{6EI}{l^2} \bar{\varphi}_j \\ \bar{M}_{ij} &= -\frac{6EI}{l^2} \bar{v}_i + \frac{4EI}{l} \bar{\varphi}_i + \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_j + \frac{2EI}{l} \bar{\varphi}_j \\ \bar{X}_{ji} &= -\frac{EA}{l} \bar{u}_i + \frac{EA}{l} \bar{u}_j \\ \bar{Y}_{ji} &= -\frac{12EI}{l^3} \bar{v}_i + \frac{6EI}{l^2} \bar{\varphi}_i + \frac{12EI}{l^3} \bar{v}_j + \frac{6EI}{l^2} \bar{\varphi}_j \\ \bar{M}_{ji} &= -\frac{6EI}{l^2} \bar{v}_i + \frac{2EI}{l} \bar{\varphi}_i + \frac{6EI}{l^2} \bar{v}_j + \frac{4EI}{l} \bar{\varphi}_j \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

式中的第一、四两式是由拉、压虎克定律求得, 其他各式是将第十三章表 13.1 中的有关形常数进行叠加得到的。

将式(d)用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_{ij} \\ \bar{Y}_{ij} \\ \bar{M}_{ij} \\ \bar{X}_{ji} \\ \bar{Y}_{ji} \\ \bar{M}_{ji} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\varphi}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\varphi}_j \end{Bmatrix} \quad (21-10)$$

上式就是用局部坐标表示的杆端位移与杆端力的关系式, 称为单元劲度方程, 上式还可以用矩阵缩写成

$$\{\bar{N}\} = [\bar{k}]\{\bar{\delta}\} \quad (21-11)$$

式中的 $[\bar{k}]$ 代表式(21-10)等号右边的 6×6 阶方阵,它是表示杆单元劲度的一个系数矩阵,称为杆单元劲度矩阵。杆单元劲度矩阵是一个对称方阵,其中的每一个系数,代表着杆端产生某一单位位移时相应的杆端力的数值(也就是形常数)。为了能清楚的看出某一位移与某一杆端力的对应关系,可以将杆端位移注明在劲度矩阵的上面和将杆端力注明在劲度矩阵的右面,如下式中所示:

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \bar{u}_i & \bar{v}_i & \bar{\varphi}_i & \bar{u}_j & \bar{v}_j & \bar{\varphi}_j \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{X}_{ij} \\ \bar{Y}_{ij} \\ \bar{M}_{ij} \\ \bar{X}_{ji} \\ \bar{Y}_{ji} \\ \bar{M}_{ji} \end{matrix} \quad (21-12)$$

此外,为了更好的理解劲度矩阵的意义,我们还可以按杆的*i*端或*j*端将劲度矩阵分为四个 3×3 的子块,将其写成

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \{\bar{\delta}_i\} & \{\bar{\delta}_j\} \\ \bar{k}_{ii} & \bar{k}_{ij} \\ \bar{k}_{ji} & \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} \begin{matrix} \{\bar{N}_{ij}\} \\ \{\bar{N}_{ji}\} \end{matrix} \quad (21-13)$$

式中的每一个子块用一个有下标的 $\bar{k}$ 表示, $\bar{k}$ 的下标第1个字母表示杆端力产生的地点(*i*端或*j*端),第2个字母表示引起杆端力的位移的地点。例如:

$\bar{k}_{ii}$ 表示*ij*杆的*i*端产生单位位移时,引起*i*端产生的杆端力;

$\bar{k}_{ij}$ 表示*ij*杆的*j*端产生单位位移时,引起*i*端产生的杆端力。

式(21-12)为局部坐标系表示的单元劲度矩阵,如果要求整体坐标系表示的单元劲度矩阵时,可以利用前面介绍过的转换关系进行如下的换算。

由式(21-6)及(21-5)已经得出

$$\{\bar{N}\} = [L]\{N\}$$

和

$$\{\bar{\delta}\} = [L]\{\delta\}$$

将它们分别代入式(21-11)等式的左、右两边,则有

$$[L]\{N\} = [\bar{k}][L]\{\delta\}$$

将上式的左、右两边左乘以 $[L]^{-1}$,可以得到

$$[L]^{-1}[L]\{N\} = [L]^{-1}[\bar{k}][L]\{\delta\}$$

即

$$\{N\} = [L]^{-1}[\bar{k}][L]\{\delta\}$$

由式(c)已经知道

$$[L]^{-1} = [L]^T$$

所以

$$\{N\} = [L]^T[\bar{k}][L]\{\delta\}$$

将上式改写成

$$\{N\} = [k]\{\delta\} \quad (21-14)$$

式中的

$$[k] = [L]^T[\bar{k}][L] \quad (21-15)$$

式(21-14)为整体坐标表示的单元劲度方程。式中的 $[k]$ 为整体坐标表示的杆单元劲度矩阵。它可以根据式(21-15)应用 $[L]^T$ 、 $[\bar{k}]$ 、 $[L]$ 三个矩阵连乘求得。现在用式(21-7)及(21-12)推出 $[k]$ 的显式如下:

$$[\bar{k}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_i & v_i & \varphi_i \\ \left[\begin{array}{ccc} \frac{EA}{l} \cos^2 \theta + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \theta & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) \cos \theta \sin \theta & \frac{6EI}{l^2} \sin \theta \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) \cos \theta \sin \theta & \frac{EA}{l} \sin^2 \theta + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \theta & -\frac{6EI}{l^2} \cos \theta \\ \frac{6EI}{l^2} \sin \theta & -\frac{6EI}{l^2} \cos \theta & \frac{4EI}{l} \end{array} \right. \\ \hline \begin{array}{ccc} -\left(\frac{EA}{l} \cos^2 \theta + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \theta \right) & \left(-\frac{EA}{l} + \frac{12EI}{l^3} \right) \cos \theta \sin \theta & -\frac{6EI}{l^2} \sin \theta \\ \left(-\frac{EA}{l} + \frac{12EI}{l^3} \right) \cos \theta \sin \theta & -\left(\frac{EA}{l} \sin^2 \theta + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \theta \right) & \frac{6EI}{l^2} \cos \theta \\ \frac{6EI}{l^2} \sin \theta & -\frac{6EI}{l^2} \cos \theta & \frac{2EI}{l} \end{array} \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} u_j & v_j & \varphi_j \\ \left[\begin{array}{ccc} -\left(\frac{EA}{l} \cos^2 \theta + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \theta \right) & \left(-\frac{EA}{l} + \frac{12EI}{l^3} \right) \cos \theta \sin \theta & \frac{6EI}{l^2} \sin \theta \\ \left(-\frac{EA}{l} + \frac{12EI}{l^3} \right) \cos \theta \sin \theta & -\left(\frac{EA}{l} \sin^2 \theta + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \theta \right) & -\frac{6EI}{l^2} \cos \theta \\ -\frac{6EI}{l^2} \sin \theta & \frac{6EI}{l^2} \cos \theta & \frac{2EI}{l} \end{array} \right. \\ \hline \begin{array}{ccc} \frac{EA}{l} \cos^2 \theta + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \theta & \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) \cos \theta \sin \theta & -\frac{6EI}{l^2} \sin \theta \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) \cos \theta \sin \theta & \frac{EA}{l} \sin^2 \theta + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \theta & \frac{6EI}{l^2} \cos \theta \\ -\frac{6EI}{l^2} \sin \theta & \frac{6EI}{l^2} \cos \theta & \frac{4EI}{l} \end{array} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ M_{ij} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ M_{ji} \end{array} \quad (21-16)$$

在上而求得的劲度矩阵 $[k]$ 中,我们同样地附注了相应的杆端位移和杆端力,以便能够清楚地看出在整体坐标系中单元的某一位移与某一杆端力的对应关系。

下面再对两端铰结的轴力杆作劲度分析,同样通过劲度矩阵来建立杆端位移与杆端力之间的关系。这种轴力单元的劲度矩阵,可以很方便地从前面导出的劲度矩阵(21-12)推得。因为可以把这种杆看成为只能承受轴力而不能承受弯矩的杆,所以可以令式(21-12)中的惯性矩 I 为零;同时因为计算桁架时不用角位移作未知数,也不产生弯矩,所以可以将矩阵中与 $\varphi_i, \varphi_j, M_{ij}, M_{ji}$ 有关的第三列、第六列和第三行、第六行除去,就得到 4×4 阶的轴力杆的劲度矩阵如下:

$$[\bar{k}] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \bar{u}_i & \bar{v}_i & \bar{u}_j & \bar{v}_j \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{X}_{ij} \\ \bar{Y}_{ij} \\ \bar{X}_{ji} \\ \bar{Y}_{ji} \end{matrix} \quad (21-17)$$

在上述矩阵中,我们将公因子 EA/l 取出放在矩阵的外面,式(21-17)就是局部坐标表示的轴力单元劲度矩阵。根据同样的道理可以从式(21-16)推得整体坐标系表示的轴力单元劲度矩阵为

$$[k] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j \\ \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{matrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \end{matrix} \quad (21-18)$$

在本节中,我们对两端固定的基本杆和轴力基本杆进行了劲度分析,并且分别建立了局部坐标系和整体坐标系表示的单元劲度矩阵,这样就为下面对整体结构的计算打下了必需的基础。

第三节 结点荷载作用下结构的计算 结构劲度矩阵

现在开始对结构进行分析,在本节中先只研究作用有结点荷载的情况。设有如图 21-7 所示

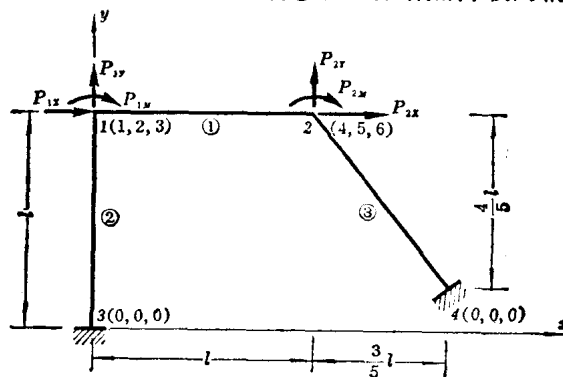


图 21-7

的刚架,在结点 1、2 作用有集中荷载,设各杆的 E 、 A 、 I 都相同。

计算时首先选取结点和划分单元。设取 1、2、3、4 为 4 个结点,将 12、31 及 24 (前一数码为 i ,后一数码为 j) 为 3 个杆单元,并且分别编号为①、②、③如图中所示。取图所示的整体坐标系,各结点的坐标值如下表:

结 点 号	1	2	3	4
x 坐标值	0	l	0	$\frac{8}{5}l$
y 坐标值	l	l	0	$\frac{1}{5}l$

结点位移未知数共 6 个,其中结点 1 有 3 个即 u_1, v_1, φ_1 , 结点 2 有 3 个即 u_2, v_2, φ_2 , 将这 6 个未知数的编号依次编为 (1, 2, 3)、(4, 5, 6) 并且将它们写在图 21-7 中相应的结点号后面。结点 3 及 4 为固定支座, 它们的 3 个位移分量都为零, 也分别编号为 (0, 0, 0), 并且写在相应的结点号后面。现在需要计算结点 1 和 2 的 6 个位移, 为此, 我们取结点 1 及 2 为脱离体如图 21-8 中所示。

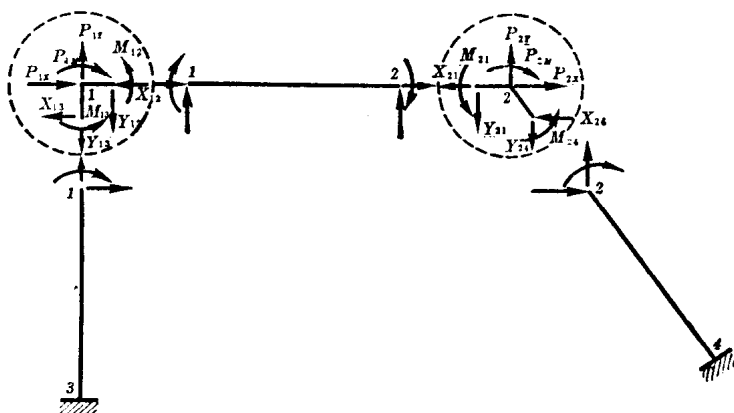


图 21-8

在图 21-8 中,作用在杆端的杆端力都按整体坐标取为正的方向,而与其相对应的、作用在结点上的力的方向则与其相反。

由结点 1 及结点 2 的 3 个平衡条件 $\sum X=0$ 、 $\sum Y=0$ 、 $\sum M=0$ 可以分别建立 3 个平衡方程,用矩阵表示为:

$$\begin{Bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ M_{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_{13} \\ Y_{13} \\ M_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1M} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} X_{21} \\ Y_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_{24} \\ Y_{24} \\ M_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{2x} \\ P_{2y} \\ P_{2M} \end{Bmatrix} \quad (a)$$

或缩写为:

$$\{N_{12}\} + \{N_{13}\} = \{P_1\}, \quad \{N_{21}\} + \{N_{24}\} = \{P_2\} \quad (b)$$

各结点力(也就是杆端力)与结点位移(也就是杆端位移)之间的关系,可以通过整体坐标单

元劲度矩阵来表示,因此需要用式(21-16)成立各个单元劲度矩阵。式中需要的各个杆单元的长度和倾角的余弦值及正弦值,可以用结点坐标代入下列的式子来进行计算(参看图 21-9):

$$\left. \begin{aligned} l_{ij} &= \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \\ \cos \theta &= \frac{x_j - x_i}{l_{ij}}, \quad \sin \theta = \frac{y_j - y_i}{l_{ij}} \end{aligned} \right\} (21-19)$$

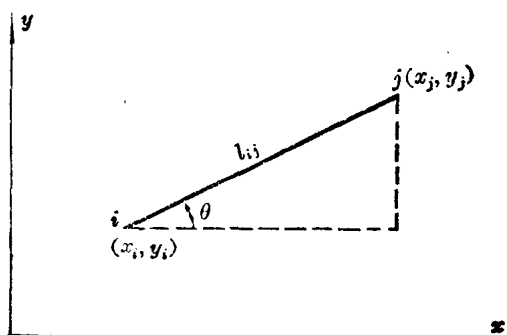


图 21-9

对图 21-7 所示刚架的各个单元可算出其有关数值如下:

单元	$x_j - x_i$	$y_j - y_i$	l_{ij}	$\cos \theta$	$\sin \theta$
①	l	0	l	1	0
②	0	l	l	0	1
③	$\frac{3}{5}l$	$-\frac{4}{5}l$	l	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$

将上表结果代入式(21-16),就可以求出整体坐标表示的各个单元的劲度矩阵如下:

对单元①:

$$[k]_{12}^{(1)} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} (1) & (2) & (3) \\ u_1 & v_1 & \varphi_1 \end{matrix} & \begin{matrix} (4) & (5) & (6) \\ u_2 & v_2 & \varphi_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} X_{12} (1) \\ Y_{12} (2) \\ M_{12} (3) \\ X_{21} (4) \\ Y_{21} (5) \\ M_{21} (6) \end{matrix} \quad (c)$$

在上面的劲度矩阵中,我们在 $u_1, v_1, \varphi_1, u_2, v_2, \varphi_2$ 等结点位移的上边注明了它们的编号(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6),此外,在矩阵的右边也注明了相同的编号。最后我们可以按式(21-13)的形式将上列劲度矩阵缩写成

$$[k]_{12}^{\textcircled{1}} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} \{\delta_1\} & \{\delta_2\} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} k_{11}^{\textcircled{1}} & k_{12}^{\textcircled{1}} \\ k_{21}^{\textcircled{1}} & k_{22}^{\textcircled{1}} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \{N_{12}\} \\ \{N_{21}\} \end{array} \quad (d)$$

由此可以写出有关的展式:

$$\begin{aligned} \{N_{12}\} &= [k_{11}^{\textcircled{1}}]\{\delta_1\} + [k_{12}^{\textcircled{1}}]\{\delta_2\} \\ \{N_{21}\} &= [k_{21}^{\textcircled{1}}]\{\delta_1\} + [k_{22}^{\textcircled{1}}]\{\delta_2\} \end{aligned} \quad (e)$$

式中的 $k_{ij}^{\textcircled{1}}$ 用了上标①来表示该单元的编号为①。

对单元②:

$$[k]_{31}^{\textcircled{2}} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccccc} (0) & (0) & (0) & (1) & (2) & (3) \\ u_3 & v_3 & \varphi_3 & u_1 & v_1 & \varphi_1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccccc} \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} X_{31} (0) \\ Y_{31} (0) \\ M_{31} (0) \\ X_{13} (1) \\ Y_{13} (2) \\ M_{13} (3) \end{array} \quad (f)$$

在这个矩阵的 $u_3, v_3, \varphi_3, u_1, v_1, \varphi_1$ 等结点位移的上边也注明了它们的编号(0)、(0)、(0)、(1)、(2)、(3), 同时在矩阵的右边也注上了相同的编号。最后写成缩写形式

$$[k]_{31}^{\textcircled{2}} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} \{\delta_3\} & \{\delta_1\} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} k_{33}^{\textcircled{2}} & K_{31}^{\textcircled{2}} \\ k_{13}^{\textcircled{2}} & k_{11}^{\textcircled{2}} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \{N_{31}\} \\ \{N_{13}\} \end{array} \quad (g)$$

由于结点3是固定端, 所以上式中的 $\{\delta_3\}$ 为零。由此写出的展式为

$$\{N_{13}\} = [k_{13}^{\textcircled{2}}]\{\delta_3\} + [k_{11}^{\textcircled{2}}]\{\delta_1\} = [k_{11}^{\textcircled{2}}]\{\delta_1\} \quad (h)$$

$\{N_{31}\}$ 在平衡方程(b)中不出现, 所以它的展式没有列出。

对单元③: