

变结构控制 理论与应用

◎ 胡跃明 著



科学出版社
www.sciencep.com

变结构控制理论与应用

胡跃明 著

本书为国家自然科学基金(No. 69974015)和广东省
自然科学基金(No. 990583, No. 020848)资助项目

科学出版社

北京

内 容 简 介

变结构控制方法通过选取适当的切换函数,首先使系统的状态轨迹运动到指定的滑动流形,然后沿此流形渐近运动到平衡点.系统一旦进入滑动模运动,在一定条件下就对外界干扰及参数扰动具有不变性.

本书作者根据多年的教学和科研工作的积累,较系统地介绍了线性系统、非线性系统和离散系统的变结构控制基本理论,并特别介绍了非完整约束系统及基于反步法与高阶滑动模的变结构控制等前沿研究热点中的一些主要方法和结果,同时对模糊变结构控制、模型跟踪自适应控制以及机器人与电机控制等问题中的应用也做了较详细的介绍.

本书可作为控制理论与控制工程等相关专业的研究生以及高年级本科生的学习参考书,对从事非线性控制系统理论与应用研究和开发的专业人员也有很好的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

变结构控制理论与应用/胡跃明著. —北京:科学出版社,2003

ISBN 7-03-010587-7

I. 变… II. 胡… III. 控制系统理论 IV. O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 051940 号

责任编辑:马长芳/责任校对:刘小梅

责任印制:刘秀平/封面设计:黄华斌

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年1月第一版 开本: B5(720×1000)

2003年1月第一次印刷 印张: 11 1/4

印数: 1—2 000 字数: 214 000

定价: 23.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

前 言

随着计算机技术和大功率电子切换器件的迅速发展,近 20 年来变结构控制技术受到了国内外控制界的广泛重视,已逐渐发展成为现代控制领域中的重要分支之一。

变结构控制方法通过控制作用首先使系统的状态轨线运动到适当选取的切换流形,然后沿此流形渐近运动到平衡点。系统一旦进入滑动模运动,在一定条件下就对外界干扰及参数扰动具有不变性。系统的综合问题被分解成两个低维的子系统综合问题,即设计变结构控制规律使得系统在有限时间内到达指定的切换流形和选取适当的切换函数确保系统进入滑动模运动以后具有良好的动态特性。由系统不确定因素及参数扰动的变化范围可以直接确定出适当的变结构反馈控制规律解决前一问题,而后一低阶系统综合问题可以用常规的反馈设计方法予以解决。因此这种控制方法具有算法简单、抗干扰性能好及容易在线实现等优点,适用于不确定非线性多变量控制对象。

变结构控制理论与应用研究在近 20 年来受到了国内外控制界的普遍重视,特别是以微分几何为主要工具的非线性控制思想以及在机器人及电机等高度非线性不确定对象中的应用研究大大推动了变结构控制理论的发展。各种重要的国际和国内学术会议都设有专题小组,许多学术刊物都陆续出版了专题特刊。变结构控制方法已应用到离散系统、分布参数系统、广义系统、滞后系统及非完整力学系统等众多复杂受控对象。

变结构控制虽然具有上述一些优良特性,但是其不利的抖动也给实际应用带来了一定困难。为了克服这种缺陷,近年来有相当多的研究人员致力于减弱变结构控制系统抖动现象的研究。除了较早提出的边界层内正则化方法外,近年来还将神经网络、模糊控制及遗传算法等其他智能控制思想与变结构控制有机地结合起来,对变结构控制技术的应用起到了一定的促进作用。

前苏联学者邬特金教授和我国学者高为炳教授出版的专著比较系统地介绍了变结构控制的基本理论,但是相对于该学科的迅速发展而言,这些著作还没能反映出近年来发展起来的有关新方法,特别是在有关非线性控制系统及智能控制等方面的新成果,如基于高阶滑模的变结构控制及结合反步设计思想等对抑制抖动及非匹配干扰等的作用目前已受到国外学者的重视。鉴于此,作者感到十分有必要撰写一本参考书,向读者介绍有关的基本理论和近年来的新方法和新成果。但是,由于变结构控制理论与应用的范围很广,作者在本书中只能介绍其中一些重要的基

本理论以及比较有代表性和发展前景的新方法;王灏副教授应邀为本书撰写了关于模糊变结构控制的第八章.由于作者的水平和研究范围所限,书中缺点和不足在所难免,作者非常欢迎读者批评指正.

作者特别要感谢启蒙导师周其节教授,他很早就敏锐地意识到变结构控制理论及技术的重要性,指导作者开展了有关的研究工作.周教授及加拿大 Concordia 大学的苏春翌教授还对本书提出了许多撰写意见.本书中作者的部分成果得到了国家自然科学基金、国家“863”计划、广东省自然科学基金以及广东省“千百十工程”的资助.自 1991 年以来选修该课程的博士和硕士研究生给作者提出了许多宝贵的意见,他们在变结构控制理论与应用方面的学位论文研究,给作者提供了许多新思想和新方法.香港理工大学副校长梁天培教授及该校电子与信息工程系李志权博士多年来与作者在机器人控制系统理论与应用研究方面进行了愉快的合作,为作者收集资料和完成本书奠定了基础.在此,作者对他们表示衷心的感谢.

胡跃明

2002 年 8 月于华南理工大学

目 录

前 言

第一章 绪论	1
1-1 引言	1
1-2 变结构控制系统的基本概念	1
1-3 变结构控制系统的发展概况	4
第二章 变结构控制系统的描述及基本问题	7
2-1 引言	7
2-2 变结构控制系统的数学描述	7
2-3 滑动模的数学描述	8
2-4 滑动模的到达条件	11
2-5 滑动模的不变性	13
2-6 变结构控制系统的综合	15
2-7 变结构控制系统的抖振问题	17
第三章 线性系统的变结构控制	19
3-1 引言	19
3-2 线性系统的能控能观性	19
3-3 线性系统的变结构控制	22
3-4 多变量系统滑动模的设计	26
3-4-1 扇形区域上的特征配置	26
3-4-2 二次性能指标下的最优化方法	29
3-4-3 李雅普诺夫直接法	32
3-5 线性不确定系统的变结构控制	32
3-6 线性系统的输出反馈变结构控制	34
第四章 非线性系统的变结构控制	39
4-1 引言	39
4-2 非线性控制系统理论的预备知识	39
4-2-1 李导数和李括号	40
4-2-2 微分同胚与状态变换	41
4-2-3 可积性与对合性	42
4-3 非线性控制系统基本理论	47

4-3-1	非线性系统的能控性与能观性	47
4-3-2	非线性系统的精确线性化	48
4-3-3	非线性系统的输入/输出解耦	53
4-3-4	零动态	54
4-4	仿射非线性系统的变结构控制	56
4-5	基于线性化的变结构控制	61
4-6	输出解耦变结构控制	63
4-7	基于反步法的变结构控制	66
4-7-1	一类参数不确定系统的反步自适应变结构控制	66
4-7-2	一类不确定系统的反步变结构控制	69
4-8	基于高阶滑动模的变结构控制	74
4-8-1	基本概念	74
4-8-2	单输入/单输出线性系统的高阶滑动模控制	76
4-8-3	非线性系统的高阶滑动模控制	79
4-8-4	非线性能控标准形系统的进一步讨论	84
第五章	受限系统的变结构控制	91
5-1	引言	91
5-2	一类非线性受限系统的输出跟踪变结构控制	91
5-3	非完整动力学控制系统的鲁棒输出跟踪	96
5-4	非完整积分器系统的变结构控制	101
5-5	无漂移系统的变结构控制	105
第六章	模型跟踪问题的变结构控制	110
6-1	引言	110
6-2	线性系统的模型跟踪问题	110
6-3	非线性不确定系统的模型跟踪问题	114
6-4	模型跟踪问题的动态变结构控制方法	116
第七章	离散时间系统的变结构控制	119
7-1	引言	119
7-2	离散时间系统的滑动模	119
7-3	基于采样数据的变结构控制	124
第八章	模糊变结构控制	128
8-1	引言	128
8-2	模糊监督控制	128
8-2-1	一种模糊监督控制系统回顾与思考	128
8-2-2	模糊监督控制是一种广义的变结构控制	140

8-3	模糊变结构控制原理与设计	145
8-3-1	两种控制方法的有机结合	145
8-3-2	一类模糊变结构控制器的分析与设计	149
8-4	用于机械臂轨迹跟踪的仿真试验	152
第九章	变结构控制理论的若干应用	156
9-1	引言	156
9-2	机器人系统的变结构控制	156
9-3	柔性机械手的变结构控制	159
9-3-1	水平面内的直线跟踪问题	162
9-3-2	竖直平面内的调节问题	163
9-4	电机系统的变结构控制	165

第一章 绪 论

1-1 引 言

早在 20 世纪 50 年代末,前苏联学者就已开展了对变结构系统基本理论的研究.变结构控制系统所呈现出的特有性质,如对干扰的不变性和降阶特性,引起了西方控制界的高度重视.本章将介绍变结构控制系统的基本概念和有关发展概况,使读者对变结构控制理论与应用有一个初步了解.

1-2 变结构控制系统的基本概念

为了阐明变结构控制系统的基本概念,考虑下列简单的二阶系统:

$$\ddot{x} - \xi\dot{x} = u, \quad \xi > 0 \quad (1.2.1)$$

设状态反馈为

$$u = -\varphi x \quad (1.2.2)$$

其中 φ 的值可取为 α 或 $-\alpha$ ($\alpha > 0$). 当 $\varphi = \alpha$ 时,相当于负反馈,微分方程有一对共轭复特征值,其实部为正数,相轨迹如图 1-1 所示,相平面坐标原点是不稳定的焦点. 当 $\varphi = -\alpha$ 时,相当于正反馈,系统的特征值为实数且一正一负,从而坐标原点是鞍点,相轨迹如图 1-2 所示.

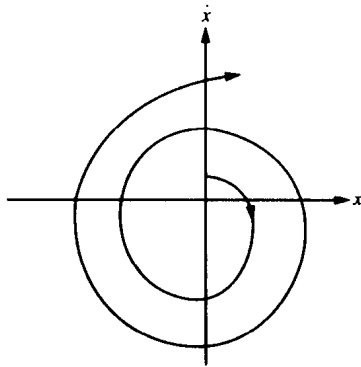


图 1-1 $\varphi = \alpha$ 时的相轨迹图

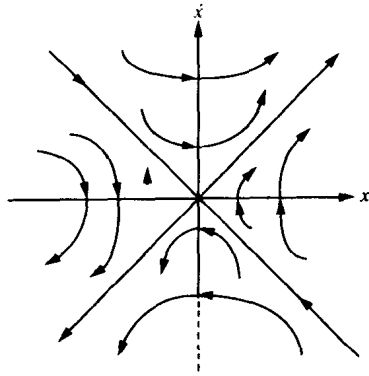
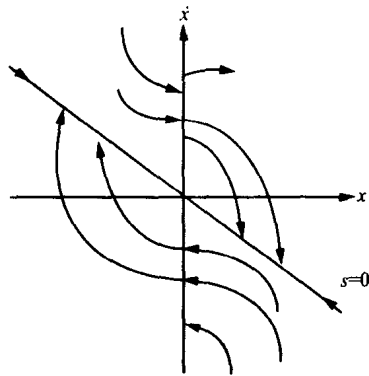
图 1-2 $\varphi = -\alpha$ 时的相轨迹图

图 1-3 有切换时的相轨迹图

显然,对应这两种结构,系统均不稳定,仅在 $\varphi = \alpha$ 时有收敛到原点的相轨线,即沿着这一结构的稳定特征向量方向的相轨线。

如果我们将上述两种反馈方法按一定规律有机地结合起来,则会产生奇妙的相轨线变化.选取系数 φ 按式(1.2.3)所示规律在稳定特征线及 $x = 0$ 上进行切换,即

$$\varphi = \begin{cases} \alpha, & xs > 0 \\ -\alpha, & xs < 0 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

其中

$$s = \dot{x} + cx, \quad c = -\frac{\xi}{2} + \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \alpha}$$

则直线两侧的轨线都最终落在此直线并收敛到原点,因此相应的系统是渐近稳定的,如图 1-3 所示.上述切换线直接由系统的参数 ξ 和切换参数 α 决定,因而当参数 ξ 未知或存在扰动时,这种选择方法就显得相当困难.为此,我们再考虑选取切换线为

$$x = 0, \quad s = \dot{x} + cx, \quad c \in \left(0, -\frac{\xi}{2} + \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \alpha} \right)$$

则得到图 1-4 的相轨迹.由图可见, $s=0$ 两侧的相轨线都引向切换线 $s=0$.因此,状态轨线一旦到达此直线上,就沿此直线收敛到原点,这种沿 $s=0$ 滑动至原点的特殊运动称之为滑动模,这是在前面任何一种固定结构下所没有的运动.直线 $s=0$ 称之为切换线或更一般的切换流形 (switching manifold),相应的函数称之为切换函数.在滑动模下,系统的运动规律由简单的微分方程 $\dot{x} + cx = 0$ 描述,其解为

$$x(t) = x(0)e^{-ct}$$

显然,此时方程的阶数比原系统低,而且仅与参数 c 有关,即不受系统参数变化或干扰的影响,故此时系统具有很强的鲁棒性,这是它的突出优点.

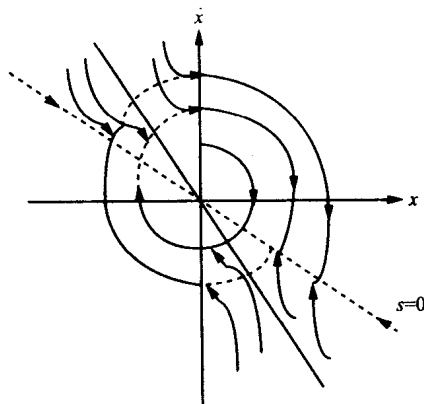


图 1-4 变结构系统的相轨迹图

在上例中,由于 α 与 $-\alpha$ 给出了两种控制结构,在控制过程中,结构在两者之间变化,故称之为变结构控制系统.这种控制方法称之为变结构控制方法,其基本思想是首先将从任一点出发的状态轨线通过控制作用拉到某一指定的直线,然后沿着此直线滑动到原点.因此,这种具有滑动模运动的控制在很多文献中也称为滑模控制 (sliding mode control).

从此例可以看出,在变结构系统的设计中,必须解决滑动模存在的条件、滑动模的一般数学描述及如何选择切换流形与控制规律,使得系统的状态确实能达到

切换流形并沿其滑动到原点,使之具有良好的动态特性等.此外,我们也可以看出,具有滑动模的变结构系统有以下特征:

(1) 滑动模相轨迹限制在维数低于原系统的子空间内,描述其运动的微分方程的阶数亦相应降低.在解决复杂的高阶系统控制问题时,这对离线分析和算法的在线实现都是非常有利的.

(2) 在大多数实际应用的情况下,滑动模的原点与控制量的大小无关(只要控制量能保证实现滑动),仅由对象特性及切换流形决定.根据这一特性,可把系统设计问题精确地分解为两个互不相关且比较简单的低维问题,期望的滑动模的动态特性由所选择的切换流形决定,而产生滑动模只需要有限的控制量.

(3) 在一定条件下,滑动模对于干扰与参数的变化具有不变性,这正是鲁棒性控制要解决的问题.如上例中的滑动模运动仅由参数 c 决定,并且 c 在一定范围内可由设计者选定.

变结构控制所具有的上述特性无疑对控制界有相当的吸引力,因此如何将上述思想推广到一般的控制系统,什么条件下可以确保滑动模运动的存在以及系统在进入滑动模运动以后能具有良好的动态特性如渐近稳定性等,是变结构控制理论所要研究的主要问题.

1-3 变结构控制系统的发展概况

以滑动模为基础的变结构控制系统理论经历了三个发展阶段.早期的工作主要由前苏联学者完成.在第一阶段,以误差及其导数为状态变量研究单输入单输出线性对象的变结构控制.在1957年至1962年间,主要研究二阶线性系统.以误差信号或加上它的导数作为反馈.反馈系数可在两组数值之间切换,研究的方法是相平面分析法,以系统误差和其导数构成相平面坐标.

1962年,开始对任意阶的单输入单输出线性(定常或时变)对象的研究,仍然采用误差及其各阶导数构成状态空间,亦即规范空间.控制量是各个相坐标的线性组合,其系数按一定切换逻辑进行切换,所选的切换流形都为规范空间中的超平面.滑动模在规范空间中对系统参数变化的不变性无疑对人们具有很大的吸引力,以至于认为它可以轻易地解决鲁棒性问题.在实际应用中人们发现,采用微分器获取误差的各阶导数信号这一做法并不可取.可实现的微分器传递函数总是有极点的,导致滑动模偏离理想状态,甚至使系统性能变坏到不可接受的程度.因此,这一阶段建立起来的变结构控制系统理论上很少被采用,这期间的文献也没有受到普遍重视.

20世纪60年代末开始了变结构控制系统理论研究的第二阶段.人们不再局限于在规范空间中进行研究,并且研究的对象扩大到多输入多输出系统和非线性

系统,切换流形也不限于超平面.特别是邬特金的专著《滑动模及其在变结构系统理论中的应用》英文版发表以后,西方学者对变结构控制系统理论产生了极大的兴趣,在此期间取得了相当多的研究成果,如关于滑动模的惟一性、稳定性及切换面方程式的设计等.但是由于没有相应的硬件技术支持,这一时期的主要研究工作还仅局限于基本理论研究.

进入 20 世纪 80 年代以来,随着计算机、大功率电子切换器件、机器人及电机等技术的迅速发展,变结构控制理论和应用研究开始进入了一个新阶段.以微分几何为主要工具发展起来的非线性控制思想极大地推动了变结构控制理论的发展,如基于精确输入/状态和输入/输出线性化及高阶滑动模的变结构控制等,都是近十年来取得的成果.各种重要的国际和国内学术会议都设有变结构控制或滑动模控制专题小组,许多有影响的学术刊物都陆续出版了专题特刊.所研究的控制对象也已涉及离散系统、分布参数系统^[6-8,11,15,26]、广义系统^[10,13]、滞后系统^[9,12,26]、非线性大系统^[17]及非完整力学系统^[18,19]等众多复杂系统.国内越来越多的学者也对这一控制方法产生了极大的兴趣^[3,5,21].同时,自适应控制、模糊控制、神经网络及遗传算法等先进控制技术也被综合应用到变结构控制系统设计中,以解决变结构控制器所存在的不利抖动对实际应用所带来的困难.

虽然变结构控制理论在近 40 年来取得了一定的研究进展,但是仍然有许多理论问题尚待解决,在应用研究方面,目前还主要局限于机器人、电机及航天器等对象.特别是对变结构控制与有关智能控制方法如模糊控制、神经网络及遗传算法等先进控制技术的综合应用还尚处在研究的起步阶段,绝大多数研究还仅局限于数值仿真和实验室平台实验阶段,迫切需要开展系统的应用开发研究工作.有兴趣的读者可以从文献[1,2,5,21,23]以及在澳大利亚召开的第六届变结构系统专题讨论会上变结构系统专家 Utkin 教授的大会报告^[27],特别是最新的综述论文[22]及其中的有关参考文献中详细了解有关的发展概况,本书不再一一阐述.作者力求将近年来发展起来的一些新思想和新方法介绍给读者,期望能起到抛砖引玉的作用,为推动变结构控制系统的理论研究以及在各种实际对象中的应用尽微薄之力.

参 考 文 献

- [1] Utkin V I. Sliding modes in control and optimization. Springer-Verlag, New York, 1992
- [2] Hung J Y, Gao W B, and Hung J C. Variable structure control: a survey. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 1993, 40(1): 2~22
- [3] 高为炳. 变结构控制理论基础. 北京: 中国科学技术出版社, 1990
- [4] 周其节. 变结构系统讲义. 广州: 华南理工大学, 1988
- [5] 周其节, 苏春奕. 变结构控制系统的理论与应用. *控制理论与应用*, 1990, 7(3): 1~11
- [6] 胡跃明, 周其节. 分布参数变结构控制系统. 北京: 国防工业出版社, 1996
- [7] 胡跃明, 周其节. 抛物型分布参数系统的变结构控制. *控制理论与应用*, 1991, 8(1): 38~42

- [8] 胡跃明,周其节.二阶分布参数系统的变结构控制.控制理论与应用,1993,10(3):256~262
- [9] 胡跃明,周其节.带有滞后影响的控制系统的变结构控制.自动化学报,1991,17(5):587~591
- [10] 胡跃明,周其节,刘永清.广义系统的变结构控制.控制理论与应用,1993,10(5):567~571
- [11] 胡跃明,周其节.二阶分布参数系统的变结构控制.控制理论与应用,1993,10(3):256~262
- [12] 郑锋,程敏,高为炳.时滞系统的变结构控制及其实现问题.控制理论与应用,1994,11(3):294~302
- [13] Hu Y M. Variable structure control of nonlinear singular systems. *Preprints of 12th IFAC World Congress*, Sydney, Australia, 1993, (8):417~420
- [14] Hu Y M, Lee C K, and Xu J M. Explicit solution of pole assignment in the sliding mode controller design of flexible manipulators. *International Journal of Robotics and Automation*, 1998, 13(2):60~64
- [15] Li K C, Leung T P, and Hu Y M. Sliding mode control of distributed parameter systems. *Automatica*, 1994, 30(12):1961~1966
- [16] 胡跃明,周其节,李志权.重力作用下柔性机械手臂滑动模控制器的鲁棒设计.控制理论与应用,1996,13(5):583~592
- [17] 胡跃明,李锦赐,梁天培.一类不确定非线性系统的分散滑动模控制.控制与决策,1994,9(4):241~246
- [18] 董文杰,霍伟.一类非完整动力学系统的自适应镇定及其在移动机器人中的应用.机器人,1998,20(6):432~447
- [19] Bloch A M, and Drakunov S. Stabilization and tracking in the nonholonomic integrator via sliding modes. *Systems & Control Letters*, 1996, 29(2):91~99
- [20] Yang J M, and Kim J H. Sliding mode motion control of nonholonomic mobile robots. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, 19:15~23
- [21] 姚琼荃,黄继起,吴汉松.变结构控制系统.重庆:重庆大学出版社,1997
- [22] Young K D, and Ozguner U. Sliding mode control engineering in practice. *Proc. of the 1999 ACC*, San Diego, CA, USA, 1999, 158~162
- [23] 高为炳.变结构控制的理论与设计方法.北京:科学出版社,1998
- [24] 冯纯伯,武玉强.动态不确定系统的变结构控制器设计.自动化学报,1994,20(6):394~402
- [25] 张天平,冯纯伯.一类非线性系统的自适应模糊滑模控制.自动化学报,1997,23(3):361~369
- [26] 刘永清,谢胜利.滞后分布参数系统的稳定性与变结构控制,广州:华南理工大学出版社,1998
- [27] Drakunov S V, and Utkin V I. Sliding mode control in dynamical systems. *Int. J. Control*, 1992, 55(4):1029~1037
- [28] Yu X H, and Xu J X. Advances in variable structure systems: analysis, integration and applications. *Proc. 6th IEEE International Workshop on Variable Structure Systems*, Australia, World Scientific, Dec. 2000
- [29] 胡跃明.非线性控制系统理论与应用.北京:国防工业出版社,2002
- [30] Hu Y M, and Huo W. Robust and adaptive control of nonholonomic mechanical systems with applications to mobile robots, In Leung T P and Qin H (Eds). *Advanced Topics in Nonlinear Control Systems*, Chapter 5, 163~192, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore. 2001

第二章 变结构控制系统的描述及基本问题

2-1 引言

如第一章所述,变结构控制研究的主要问题是设计适当的切换函数和变结构控制规律,使得系统的状态轨线在有限时间内到达所设计的切换流形并以适当的速度沿着它渐近滑向平衡点.本章将讨论变结构控制系统的数学描述、滑动模方程的确定及滑动模的实现或到达条件等基本问题,介绍等效控制方法在求取滑动模描述方程时的应用,并讨论滑动模对于系统不确定性因素的不变性,最后给出变结构控制系统的基本综合方法.

2-2 变结构控制系统的数学描述

考虑下列非线性控制系统:

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (2.2.1)$$

其中, $x \in R^n$, $u \in R^m$ 分别是系统的状态和控制向量.控制量 $u = u(t, x)$ 按下列逻辑在切换流形 $S(t, x) = 0$ 上进行切换:

$$u_i(t, x) = \begin{cases} u_i^+(t, x), & S_i(t, x) > 0, \\ u_i^-(t, x), & S_i(t, x) < 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2.2)$$

其中, $u_i(t, x)$, $S_i(t, x)$ 分别是 $u(t, x)$, $S(t, x)$ 的第 i 个分量; $u_i^+(t, x)$, $u_i^-(t, x)$ 及 $S_i(t, x)$ 是适当的光滑连续函数. $S(t, x)$ 称为切换函数,一般情况下其维数等于控制向量维数.

上述系统与通常的连续反馈控制系统不同,控制量按一定的逻辑进行切换,即系统的结构按一定规律变化.其对应的微分方程右端函数是不连续的,因而传统的系统分析方法已不再适用.我们自然关心此时微分方程的解是否存在及如何描述系统在 $S(t, x) = 0$ 的运动等问题.许多学者研究了各种类型的具有不连续右端函数的微分方程解的存在惟一性,其中最早和概念上直观的方法由 Filippov^[1] 给出.下面作一简单介绍.

当系统(2.2.1)为单输入系统时,控制律(2.2.2)变为

$$u(t, x) = \begin{cases} u^+(t, x), & s(t, x) > 0 \\ u^-(t, x), & s(t, x) < 0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

此时系统(2.2.1)在控制(2.2.3)作用下在切换曲线 $s=0$ 上的运动由下列方程描述:

$$\dot{x} = af^+ + (1-a)f^- = f^0, \quad 0 \leq a \leq 1 \quad (2.2.4)$$

其中 $f^+ = f(t, x, u^+)$, $f^- = f(t, x, u^-)$, f^0 为滑动模下状态轨线的切向量。

设 $ds \triangleq \text{grad}s \cdot (ds, f^- - f^+) > 0$ 为梯度向量, 若 $(ds, f^+) \leq 0$ 及 $(ds, f^-) \geq 0$, 则由 $(ds, f^0) = 0$ 可以解得

$$a = (ds, f^-) / (ds, f^- - f^+)$$

其中 (\cdot, \cdot) 表示向量的内积. 此时系统在切换曲线 $s=0$ 上的解是存在惟一的, 如图 2-1 所示.

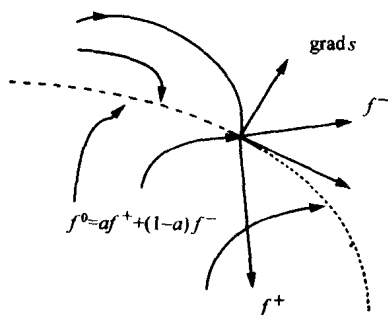


图 2-1 滑动模的存在性

在多输入多输出情形下, 方程(2.2.1)和(2.2.2)的 Filippov 意义下的解可表为下列形式^[2]:

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^m a_j(t) f(t, x, u_j(t, x)) \quad (2.2.5)$$

其中, $a_j(t) \geq 0$, $\sum_{j=1}^m a_j(t) = 1$, 但目前还没有一般求解 $a_j(t)$ 的公式. 因此必须寻求其他更实用的方法.

2-3 滑动模的数学描述

如上所说, 变结构控制的重要问题之一是要确定滑动模的描述方程. 这种确定

方法既要便于离线分析,又要符合控制系统的实际运行情况.描述其运动的微分方程右端函数是不连续甚至在切换流形上是无定义的,因此使得这种系统的分析不能用经典的微分方程理论来进行.早期的继电系统虽然也具有这种不连续性和不确定性,但从时间上讲,这些不连续点是孤立的.对于这类方程,可采用分段衔接的方法求解,在每一段内系统是连续的,因而可以用经典的方法求解.在切换面上,按衔接原理可求得进入下一段时的初始条件,整个解就按衔接原理连接起来.在发生高频切换时,按平均值计算其效果.

对于一般变结构控制系统,当系统发生滑动模时,其间断点在时间上构成测度不为零的点集,系统状态被限制在切换流形上运动.在此情况下,不能采用衔接原理求解,滑动模的运动方程式需要用新的方法来求得.通常采用等效控制方法来确定之.

从理论上讲,系统的状态轨线一旦到达切换流形就沿着其运动,即此时系统轨线保持在此切换流形上,称这种滑动模为理想的滑动模.但实际系统由于惯性、执行机构的切换滞后等非理想因素的存在,系统的轨线不可能保持在此切换流形上运动,而是在切换流形的附近来回抖动,这种滑动模称为实际滑动模.因此理想的滑动模与实际的滑动模总是存在着一定的偏差,如图 2-2 和图 2-3 所示.

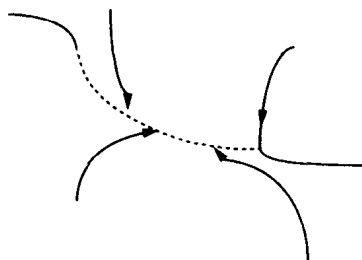


图 2-2 理想滑动模

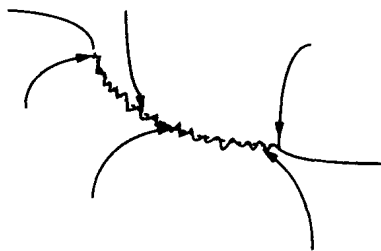


图 2-3 实际滑动模