胡坤陞遺著

第一卷

数学論文集

人民教育出版社

胡 坤 陞 遺 著

第 一 卷

数 学 論 文 集

四川大学数学系整理

人 民 教 育 出 版 社

本书收集了四川大学胡坤陞教授的主要遗著，由四川大学数学系整理。

第一卷包括数学論文十篇。內容主要涉及变分学方面，也涉及数学分析的其它問題：隐函数定理、柯西积分定理、均值定理、积分微分方程組等。其中較早的五篇原来是用外文发表的，都由整理者譯作汉文了。

本卷供数学工作者和高等学校数学专业学生参考。

胡坤陞遺著

第一卷

数学論文集

四川大学数学系整理

人民教育出版社出版 高等學校教材編輯部 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

京华印书局印装 新华书店发行

統一书号 13010·731 开本 850×1168 1/32 印張 6 4/16

字数 145000 印数 0001—3,500 定价（8）¥0.80

1960年6月第1版 1960年6月北京第1次印刷

序　　言

胡坤陞教授一生从事教育工作，在大学任教三十多年，一貫严肃認眞，受到学生普遍尊敬。他好学不倦，閱讀数学书籍已成为他每日的习惯。这样，他不仅在"变分法"方面学有专长，对数学其他很多分枝，也广泛涉猎，达到一定水平。凡是与他比較熟悉的人，都很欽佩他的学識渊博。而胡先生始終謙遜，从来不显示自己，不貶低别人。这也是值得我們称道的。但是，在旧社会，学术事业是得不到支持和鼓励的。胡先生虽然勤勤恳恳地教书数十年，而在解放以前，他并沒有培养出多少数学人才。他的研究工作，也是如此。远在 1932 年，他在"变分学"上关于 Bolza 問題的論文，已經达到当时的国际水平。但他回国以后，由于条件限制，研究工作未能經常进行，抗日战争以及解放战爭期間，更中断了十余年。解放以后，胡先生受到党的关怀和鼓励，他和大家一起，滿怀信心地大量培养数学人才。他自己培养了研究生，編写了教材，并且恢复了研究工作。在这部遺著中，只有五篇論文是他解放以前的旧作，其余部分，都是解放十年来陆續写成的。胡先生受到党的經常不断的教育，在政治上日有进步。以他热爱社会主义祖国的态度，广闊踏实的基础，刻苦鉆研的精神，本来可以发揮所长不断地作出更多的貢献；不幸竟因体弱病逝。这是非常值得惋惜的。

为了丰富祖国的数学文献，为了提供数学工作者一些参考資料，也为了紀念胡先生的辛勤劳动，我們四川大学数学系在党的指示下，組織了部分同志，将胡先生的主要遺著整理出版。遺著中包括論文十篇，"高等微积分講义"一部和"变分法講义"一部。原来用英文发表的五篇論文，都由整理者譯成中文。"高等微积分講义"

是胡先生在重庆大学讲授这門課程时的教材，手稿沒有保存下来，而現存的油印講义，又錯漏甚多。我們認为这部著作水平較高，是教师和学生的一本良好的参考用书，因此，花了較大的人力，加以校訂。胡先生在世时，曾經采用語体文着手改写过这部著作，并且增加了例題和习題。改写后，試用过一学期，学生反映良好，可惜只完成四章，不是全璧。所以这里只能照旧稿付印。“变分法講义”則包含胡先生自己的一些研究心得的专著。我們認为这本书的出版，对讀者是有益处的。

这部著作整理完竣时，欣逢我国建国十周年大庆。我們都深深体会到，祖国的一切成就，都离不开党的領导。就是这部遺著的出版，也是由于党的关怀和支持，我們都衷心贊同，以这部遺著作为庆祝建国十周年的献礼。参加整理和校訂这部遺著工作的有赵淞，周雪鷗，卜保明，梁經菊等十三位同志，因为时間仓卒和限于水平，錯誤一定难免，希望讀者指正。

四川大学数学系

1959，9，30

胡坤陞教授数学論文集序

我于 1957 年自欧东归，目睹祖国的新面貌，极感兴奋；而見到旧时的朋友皆朝气勃勃，精神焕发，亦大感欢幸。与我有深交的胡坤陞教授自成都寄我一信，复使我惊异和高兴。他賦性沉靜，在旧中国安于冷冷清清的学者生活，于时事几不过問。乃这次来信，于种种新生事物，欣欣然言之；对祖国的社会主义偉大建設，尤显露出极高度的热情。以与昔对比，他不啻判若两人。这信我今不复寻得。但特别深印于我脑中者，是他对于以后的研究工作，决鼓足干勁以求有更好貢献于祖国学术，而不負此偉大时代的积极表示。我想，他虽未說明，必已有一个远大的研究計划。以他的智力及他在治学上已具备的条件，其理想自不难实現。特别地，可期望他在这个国人工作表現极少的数学領域——变分学上，有更多更突出的收获。不幸在我接信后仅年余，他便病不复起，致使他的工作停留在一个正积极推进的阶段，良可叹惜。

回忆三十余年前，他肄业于南京东南大学数学系时，我忝在师位。相接触未久，其人品才智即深深引我注意。他既肯勤学，复能深思；他处理問題的扼要，推演算理的周密，每有过人处；故考試时恒拔前茅。他的这些优点，我还在他任清华大学助教时見之；更在他 1929 年应清华选送留美研究生考試时見之。又特为师友所重者，是他虽有过人之处，而恒持平易无驕的态度。

他仲选送美，从名教授布里士（Bliss）研究变分法，得博士学位。其論文为“Bolza 問題和它的附属边値問題”，內容丰富；結果有甚显重要者。全文刊載于“芝加哥大学 1931—1932 年关于变分学的貢献”(Contributions to the Calculus of Variations, 1931—

1932, University of Chicago）一书中。归国后，他于研究續有表現；在变分学上复完成一个具体工作；并在他方面获得一些結果。有文发表于清华大学理科报告、中国数学学报等期刊。这都是关于近代高深数学的研究，而得有良好或难能的結果。例如在其“变分法中的变动端点問題”論文內，他就很普泛的情况推广了哈恩(Hahn)氏基本引理；而于所导入的主要函数W(λ)的构制，克服了不小的困难。惟于1937年后，因受环境及时局的影响，他的研究工作遂形中断。

解放后，党和政府大力发展科学，奖掖科学研究；胡坤陞教授深受鼓舞，并获得应有的便利，于是很快地恢复其研究工作；且日趋积极。自1956年起，逐年又有論文发表，內容皆充实而有重要性。特別是他在一个較前为新的方向，做了一个題名“一类型的积分微分方程組”的工作。在这工作中，他普化了屋耳特腊(Volterra)关于第二种綫性积分方程的理論，并获得包有关于屋氏型的非綫性积分方程的拉賴士戈(Lalesco)定理的結果。但他的主要工作仍是在变分法方面；关于他的基本理論，有不少推广或改进的結果及新的收获。如关于多重积分的变分問題，他給出了横截条件連同着严密的証明；关于著名的都布瓦岩蒙(Du Bois Reymond)引理与馬松——窪田(Mason—Kubota)引理，則作了多方面的推广，而获得很普泛的定理；且在甚弱的假設下，获得极値曲面所需要滿足的条件。他所得定理的应用，于变分法外，尙关涉到索波列夫(Соболев)氏的广义导数；又一推論，則可裨益于实变数函数論。胡坤陞教授对于这一系列已有成果的研究問題，截至他最后病臥时止，似尙未結束，而对于显然已有的更前进的計划，自不及实現。虽然如此，他已有的成果就我国学术发展的現阶段言，已为可貴。

党和政府重視在教学和科学研究方面劳动者获致的优秀成績，四川大学爰成立委員会，負責整理胡坤陞教授的遺著。于其中

編有他的論文集一书,由人民教育出版社付印,使他多年来辛勤劳动所得的这部分有創获性的結果,不致散失以成为国家永久的学术財产。我对于胡坤陞教授有深切的認識,因受託写数語作为前言,俾讀者得由我的这个角度窺見他的为人。写至此,我不禁欲更进而說几句:党和政府曾号召向科学进軍,壮大的科学队伍已漸形成;胡坤陞教授曾为先驅深入的这个重要数学領域,这个不少理論結合实际問題的領域,极希望有一部分生力軍継起攻取,以求有更輝煌的战果貢献于祖国。这本論文集将是他們感兴趣而便参考的一系列文献。

熊庆来

1960年2月5日

于中国科学院数学研究所

目　录

Bolza問題和它的附属边値問題

目　录

引　言

具有变动端点，并且呈一般形式的 Lagrange 問題已經由 Bolza[1] 加以陈述。他考虑对于某些弧来极小化表达式

$$g[x_1, y_i(x_1), x_2, y_i(x_2)] + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_i, y_i')\,dx \quad (i=1,\cdots,n)$$

的問題，这些弧要滿足一組有限方程和微分方程，同时适合若干一般的端点条件。Bliss[2] 减少了 Bolza 的假設，并把問題表成不出

現积分項的形式。用这个方法他的問題是很对称的，而且是古典的 Mayer 問題的一个直接推广。最近，Morse[3] 研究了 Bolza 問題，并且第一次給出了它的充分条件。这个条件应用了由一般問題的二級变分的极小化而产生的边値問題的特征数。Morse 解决这个問題时借助于一个他叫作基本二次形的理論。

在本文中，按照 Bliss 教授的建議，我們純粹用微分方程[4] 的理論来研究这个边値問題。用一个簡单的符号变換，我們能够避免 Morse 所用的不相切的条件，同时能給出問題的最对称的形式。首先証明特征数和特征函数的各种性质，我們就得到一个重要的展开定理，它能够使我們証明：二級变分常为正（或不为負）的必要而充分的条件是特征数全为正（或不为負）。我們賦予相当于 Morse 的完全問題的每一特征数和特征函数一个极小化的性质。对于最簡单的平面問題已被 Hilbert[5] 已經給出类似的証明，作为具有对称核的綫性积分方程理論的一个应用。在我們的情形，展开定理也可以从具有对称核的綫性积分方程組的理論推出①，但我們所采用的方法则为直接和初等。

利用通常的微分方法，Hahn 引理的一个推广和二級变分常为正的条件，給出了 Bolza 問題的一个新的充分性定理，与 Morse 无关，并且无需不相切的条件。对于滿足 Euler-Lagrange 方程的极小化弧 E_μ 要在所有的区間上是正常的这个假設，我們用只假設在任意一个子区間 x_1x_3 上是正常的来代替。这两个正常条件均要求被积函数 f 不恒为零。从这一方面說，Bolza 問題可以当作是完全解决了，但对于 Bliss 問題来說，需要某些不同类型的正常条件。

最后考慮各种边値系和与它們相应的极小化問題的联系，我

①参考下面的引理 8.1 和它的証明后面的注意。

們由此推出一些相当一般的振动和比較定理，这些都涉及到共軛点和焦点的理論。我們的結果包含前面提到的 Morse 的文章和他早期一篇文章[6]中的結果。这些証明是完全独立的，而且似乎是比較容易的。作为一般比較定理的一个应用还得出一个基本引理[7]，这个引理可以引出圍繞一条极值曲綫的場的构造，这条极值曲綫仅仅在所有子区間上或者所有子区間 x_1x_3 上是正常的。

第一章 問題和它們的一些必要条件

1. Bolza 問題和它的乘数規則

按定义規定一条容許弧是一 D' 类弧

(1.1) $$y_i=y_i(x) \quad (x_1\leqslant x\leqslant x_2,\quad i=1,\cdots\cdots,n)$$

位于 (x,y,y') 空間的开区域 R 内，并滿足微分方程組

(1.2) $$\varphi_\alpha(x,y,y')=\varphi_\alpha(x,y_i,y_i')=0 \quad (\alpha=1,\cdots\cdots,m<n)$$

其中，y_i' 表 y_i 对 x 的导数。于是 Bolza 問題如下：

問題 1 根据上述定义在容許弧 $y_i=y_i(x)$ 类中找出滿足一組端点条件

(1.3) $$\psi_\mu(x,y)=\psi_\mu(x_1,y_{i1},x_2,y_{i2})=0^{①},$$
$$(\mu=1,\cdots\cdots,p\leqslant 2n+2)$$

的一条曲綫使得表达式

(1.4) $$I=g(x,y)+\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')dx=$$
$$=g(x_1,y_{i1},x_2,y_{i2})+\int_{x_1}^{x_2}f(x,y_i,y_i')dx$$

---

①符号 y_{i1} 和 y_{i2} 分别代表 y_i 在 x_1 和 x_2 上的值。以后对另外的函数也用类似的如 η_{i1}，ζ_{i1} 等等。

为极小。

同平常一样，我們集中注意力于具有形如(1.1)的方程，而且满足端点条件(1.3)的一条特殊的容許弧 E_{12}。我們研究它必須具有哪一些性質才能成为极小化弧。这个分析是基于下面的假設：

(a)函数 φ_α 与 f 对于它們在区域 R 中的变元是 C''' 类的，而函数 ψ_μ 与 g 仅要求对于在 R 的射影中的 x_1，y_{i1}，x_2，y_{i2} 是 C'' 类的。

(b) $m\times n$ 維的矩陣 $\|\varphi_{\alpha y'_i}\|$ 在 E_{12} 上每一点之秩是 m。

(c)对于 E_{12} 的端点値 $p\times(2n+2)$ 維矩陣 $\|\psi_{\mu x_1},\ \psi_{\mu y_{i1}},\ \psi_{\mu x_2},\ \psi_{\mu y_{i2}}\|$ 的秩是 p。

这里和以后，凡是文字下标，不論是在函数的标数的后面或是别的地方，如象在(b)和(c)中的 y'_i，y_{i1}，y_{i2} 等等都常常用来表示偏导数。

我們現在要給出几个定义和乘数定理而不加証明。設

$$y_i=y_i(x,b)\quad[x_1(b)\leqslant x\leqslant x_2(b)] \tag{1.5}$$

是一单参数族容許弧，当 $b=0$ 时成为 E_{12}，并且在 $b=0$ 的邻近对于 b 是 C' 类的。

对 b 微分方程組 $\varphi_\alpha[x,y(x,b),y'(x,b)]=0$ 并令 $b=0$，我們得到所謂函数 φ_α 沿 E_{12} 的"变分方程組"

$$\Phi_\alpha(x,\eta,\eta')=\varphi_{\alpha y'_i}\eta'_i+\varphi_{\alpha y_i}\eta_i=0\text{①}, \tag{1.6}$$

其中 η_i 表示 $y_i(x,0)$，并且 φ_α 的偏导数中的变元是属于 E_{12} 的。如果族(1.5)对接近 $b=0$ 的每一个 b 也满足端点条件(1.3)，于是对 b 微分方程組 $\psi_\mu[x(b),y(b)]=0$，并令 $b=0$，我們将有

$$\begin{aligned}\Psi_\mu(\xi,\eta)=(\psi_{\mu x_1}+\psi_{\mu y_{i1}}y'_{i1})\xi_1+\psi_{\mu y_{i1}}\eta'_{i1}+\\+(\psi_{\mu x_2}+\psi_{\mu y_{i2}}y'_{i2})\xi_2+\psi_{\mu y_{i2}}\eta_{i2}=0.\end{aligned} \tag{1.7}$$

①整个这篇論文中的重复下标象張量分析中一样表示和数，如 $\varphi_{\alpha y_i}\eta_i=\varphi_{\alpha y_1}\eta_1+\cdots\cdots+\varphi_{\alpha y_n}\eta_n$。

其中 $\xi_1=x_{1b}(0)$，$\xi_2=x_{2b}(0)$，并且 ψ_μ 的偏导数中的变元是属于 E_{12} 的端点。这些称为函数 ψ_μ 沿 E_{12} 的“变分方程組”。

沿 E_{12} 的一組“容許变分”，按定义是一組 $\xi_1, \xi_2, \eta_i(x)$，其中 ξ_1, ξ_2 是任意常数，而 $\eta_i(x)$ 是变分方程組(1.6)的 D' 类解。若对 E_{12} 存在 p 組容許变分 $\xi_1^\nu, \xi_2^\nu, \eta_i^\nu(x), (\nu=1, \cdots\cdots, p)$ 使得

(1.8) $$|\Psi'_\mu(\xi^\nu, \eta^\nu)|\neq 0, \quad (\mu, \nu=1, \cdots\cdots, p)$$

则称弧 E_{12} 是“正常的”。这样的正常性是对于条件 $\psi_\mu=0$ 的正常性。在后面充分定理的証明中，我們还需要下面一种加强的正常性条件。在 x_1x_2 的一个子区間上，若对 E_{12} 存在 $2n$ 組容許变分 $\eta_i^\tau(x), (\tau=1, \cdots\cdots, 2n)$，使得

(1.9) $$|\eta_i^\tau(x_3), \eta_i^\tau(x_4)|\neq 0 \quad (i=1, \cdots\cdots, n;\ \tau=1, \cdots\cdots, 2n)$$

则称弧 E_{12} 是“絕对正常的”。“絕对”这个副詞是第一次在这里引进的。将它引进来似乎是正确的，因为如果 E_{12} 在某个区間上是絕对正常的，则在同一区間上对任何条件也是正常的。

定理 1.1[8] 对于問題 1 的每一条极小化曲綫 E_{12}，存在一組常数 c_i 和一个函数

(1.10) $$F(x, y, y', \lambda)=\lambda_0 f+\lambda_\alpha(x)\varphi_\alpha$$

使得方程組

(1.11) $$F_{y'_i}=\int_{x_1}^{x_2} F_{y_i}dx+c_i$$

在 E_{12} 的每一点均被滿足。常数 λ_0 和乘数 $\lambda_\alpha(x)$ 对 x_1x_2 的任何点不全为零；并且它們是連續的，可能要除去決定 E_{12} 的角点的 x 值。此外，存在常数 d_μ 使得 λ_0 和 d_μ 不全为零，并与 E_{12} 的端点值一起滿足所謂“横截条件”

$$-F(x_1)+y'_{i1}F_{y'_i}(x_1)+\lambda_0 g_{x_1}+d_\mu\psi_{\mu x_1}=0,$$

(1.12) $$F(x_2)-y'_{i2}F_{y'_i}(x_2)+\lambda_0 g_{x_2}+d_\mu\psi_{\mu x_2}=0,$$

$$-F_{y_i'}(x_1)+\lambda_0 g_{y_{i1}}+d_\mu\psi_{\mu y_{i1}}=0,$$

$$F_{y_i'}(x_2)+\lambda_0 g_{y_{i2}}+d_\mu\psi_{\mu y_{i2}}=0,$$

其中 $F(x_1)$，代表 $F(x)$ 在 $x=x_1$ 的值，而 $F(x_2)$，$F_{y_i}(x_1)$，$F_{y_i'}(x_2)$ 有类似的意义。对于一条正常的极小化弧 E_{12}，常数 λ_0 不能为零，并且乘数和常数当取成形如 $\lambda_0=1$，$\lambda_\alpha(x)$ 及 c_i 和 d_μ 时是唯一的。

推論 1 对于 E_{12} 上不是角点的所有的点，Euler-Lagrange 方程組

$$\varphi_\alpha(x,y,y')=0,\quad (d/dx)F_{y_i'}=F_{y_i} \tag{1.13}$$

必定被满足。

推論 2 对于 E_{12} 的每一角点，必满足角点条件

$$\begin{aligned}&F_{y_i'}[x,y,y'(x-0),\lambda(x-0)]=\\&=F_{y_i'}[x,y,y'(x+0),\lambda(x+0)].\end{aligned} \tag{1.14}$$

推論 3 取 E_{12} 的任意一个不是角点的点，而且設在此点

$$R=\begin{vmatrix}F_{y_i'y_k'} & \varphi_{\alpha y_i'}\\ \varphi_{\alpha y_k'} & 0\end{vmatrix}\qquad\begin{pmatrix}i,k=1,\cdots\cdots,n\\ \alpha=1,\cdots\cdots,m\end{pmatrix} \tag{1.15}$$

异于零，那么在这点附近，E_{12} 属于 C'' 类，而乘数 $\lambda_\alpha(x)$ 属于 C' 类。

如果 $y_i(x)$ 属于 C'' 类，而 $\lambda_\alpha(x)$ 属于 C' 类，并且进一步如果它們又满足 Euler-Lagrange 方程(1.13)，則容許弧 $y_i=y_i(x)$ 連同一組乘数 λ_0，$\lambda_\alpha(x)$ 叫作一条"极值弧"。一条极小化弧或一条极值弧，若对它的所有点(1.15)中的行列式不为零，則称它是"非特异的"。若 E_{12} 是問題1的一条沒有角点的极小化弧，則由推論3，它必定为一条极值弧，为了避免叙述重复起見，在下面的討論中，我們除已給的假設(a)，(b)，(c)外，再增加一个假設：

(d) E_{12} 是一条满足端点条件 $\psi_\mu=0$ 和横截条件(1.12)的正常或非特异的极值弧。

2. 对于 E_{12} 的二級变分和它的附屬問題

因为 E_{12} 是滿足条件 $\psi_\mu=0$ 的一条正常极値弧，所以对于滿足条件 $\Psi_\mu(\xi,\eta)=0$ 的每一組容許变分 $\xi_1,\xi_2,\eta_i(x)$ 存在[9]一个形如(1.5)的单参数容許弧族，滿足条件 $\psi_\mu=0$，当 $b=0$ 时包含 E_{12}，对邻近 $b=0$ 的 b 属于 C'' 类，并且沿 E_{12} 变分是 $\xi_1,\xi_2,\eta_i(x)$。当这一族代入(1.4)中 I 的表达式时我們将有一函数 $I(b)$。如果我們在定理1.1内取 $\lambda_0=1$，那末，这一族沿 E_{12} 的"一級变分"容易証明为

(2.1) $$I_1(\xi,\eta)=(d/db)I(b)\,|^{b=0}=$$

$$=G(\xi,\eta)+F(x_2)\xi_2-F(x_1)\xi_1+\int_{x_1}^{x_2}(F_{y_i}\eta_i+F_{y_i'}\eta_i')\,dx$$

其中 $G(\xi,\eta)$ 是由(1.7)中用 g 代替 ψ_μ 而給出，并且 x_1,x_2，指 E_{12} 的端点。由方程組(1.11)和横截条件(1.12)容易看出 $I_1(\xi,\eta)$ 的値是零。

利用(1.11)和(1.12)以及一些复杂而不困难的計算，我們也能証明对上述的族沿 E_{12} 的"二級变分"[10]具有形式

(2.2) $$I_2(\xi,\eta)=(d^2/db^2)I(b)\,|^{b=0}=$$

$$=2q(\xi,\eta)+\int_{x_1}^{x_2}2\omega(x,\eta,\eta')\,dx,$$

其中 x_1,x_2 仍属于 E_{12} 的端点。函数 $2q(\xi,\eta)$ 是 ξ_1，ξ_2，η_{i1}，η_{i2} 的一个二次形，系数由 E_{12} 唯一确定。我們不需要 $q(\xi,\eta)$ 的显表达式，因此，这里就不写出来。函数 $2\omega(x,\eta,\eta')$ 由

(2.3) $$2\omega(x,\eta,\eta')=P_{ik}\eta_i\eta_k+2Q_{ik}\eta_i\eta_k'+R_{ik}\eta_i'\eta_k'$$

$$(i,k=1,\cdots\cdots,n)$$

給出，其中 P_{ik}, Q_{ik}, R_{ik} 分别表示偏导数 $F_{y_iy_k}$, $F_{y_iy_k'}$, $F_{y_i'y_k'}$，其变元属于 E_{12}。我們注意 P_{ik} 和 R_{ik} 是对称矩陣。

若 E_{12} 是一条极小化弧，对于满足条件 $\Psi_\mu(\xi,\eta)=0$ 的每一組容許变分 $\xi_1,\xi_2,\eta_i(x)$ 我們必然有 $I_2(\xi,\eta)\geqslant 0$。因此，自然会提出下面的"附属問題"，即是对所有参数 ξ_1,ξ_2 和在 x_1x_2 上为 D' 类并满足条件

$$(2.4)\quad \Phi_\alpha(x,\eta,\eta')=0,\quad \Psi_\mu(\xi,\eta)=0,\quad \int_{x_1}^{x_2}(\xi_1^2+\xi_2^2+\eta_i\eta_i)\,dx=1$$

的函数 $\eta_i(x)$，使表达式 $I_2(\xi,\eta)$ 成为极小。

由于 ξ_1,ξ_2 的出現，此問題頗不对称，因而如果在討論中不引进某些限制条件，就会发生許多困难。然而用一个簡单的符号变换，我們能将它表成一个更整齐更簡单的形式，而不失一般性。我們扩大 i，k 和 α 的范圍使得 $i,k=1,\cdots\cdots,n+2$；$\alpha=1,\cdots\cdots,m+2$。我們分別用 η_{n+1},η_{n+2} 代替 ξ_1,ξ_2 并規定

$$(2.5)\quad \begin{aligned}&P_{ik}=Q_{ik}=R_{ik}=0\quad 对\ i\ 或\ k>n,\\ &\Phi_{m+s}(x,\eta,\eta')=\eta'_{n+s}\quad 对\ s=1\ 或\ 2。\end{aligned}$$

用这些規定和 $q(\xi,\eta)$，$\Psi_\mu(\xi,\eta)$ 寫法的显然的改变，我們看出上面的問題包含在下面的問題 2 中，不过在那里我們仍然写成 $i,k=1,\cdots\cdots,n$；$\alpha=1,\cdots\cdots,m$。这是为了方便起見，因为 m 和 n 是任意整数，只要 $m<n$。此外由于 §1 中的假設(a)，(b)，(c)，(d) 人們容易証明下面要給出的假設(α)，(β)，……，(ε) 被改变記号以后的，关于 E_{12} 的附属問題所滿足。

問題 2　求形如

$$J(\eta)=2q(\eta)+\int_{x_1}^{x_2}2\omega(x,\eta,\eta')\,dx,\quad 其中$$

$$(2.6)\quad \begin{aligned}2q(\eta)&=A_{ik}\eta_{i1}\eta_{k1}+2B_{ik}\eta_{i1}\eta_{k2}+C_{ik}\eta_{i2}\eta_{k2},\\ 2\omega(x,\eta,\eta')&=P_{ik}\eta_i\eta_k+2Q_{ik}\eta_i\eta'_k+R_{ik}\eta'_i\eta'_k\\ &(i,k=1,\cdots\cdots,n)\end{aligned}$$

的表达式 $J(\eta)$ 关于所有在固定区間 x_1x_2 上为 D' 类，并满足条件