线性規划

談祥柏 編著

上海科学技术出版社

綫性規划

談祥柏 編著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

綫性规划是运筹学的一个分支，是在本世紀的三十年代才开始发展起来的学科，利用它可以确定一些实际經济問題的最佳方案，如寻求最好的分配和使用資源的方法。目前已把此种方法应用到交通运輸、物資調配等各个部門。

本书向讀者介紹了几种典型的方法，如"康—希方法"、"单純形法"等，給出了它們的几何解釋，并引用了許多实际例子，如制訂煤炭和糧食的产銷供应計划、耕地的合理使用、几种产品在工作母机上的安排等等。

本书适合經济計划人員、工程技术人員及数学愛好者閱讀，在现阶段中等学校数学教学改革中，需要加入綫性规划的材料，尤具有一定的参考作用。

綫 性 規 划

談 祥 柏 編 著

*

上海科学技术出版社出版

（上海南京西路 2004 号）

上海市書刊出版业营业許可証出 093 号

上海市印刷五厂印刷　新华書店上海发行所总經售

*

开本 787×1092 紙 1/32　印張 4 5/16　字数 90,000

1959年6月第1版・1959年6月第1次印刷

印数 1—10,000

統一書号：13119・282

定　价：(十)0.42元

目　录

第一章　綫性規划——运筹学的一个分支

第一节　运筹学的发展

运筹学是一門边緣科学，它的主要內容是利用近代数学的成就，特别是概率論、数理統計和計算数学方面的成就，来研究最有效地使用人力、生产工具、物資以及武器等的方法和安排，从而把一切規划工作放在科学的基础上面。

在人类生产活动的領域里，有着两个不同的方面。一方面是創造和发現新的物质資源，寻找更好的利用方式，如勘探和发現新矿床、制造工作母机、改进生产工具等等。当然，极大多数的創造发明和科学技术活动都是属于这一領域的。但是，另一方面，我們也絕不应該忽視怎样来发揮現有設备和方法的潜在力量，以达到最大限度的利用率。譬如說，鉄路运輸任务异常紧張，当然，一方面我們应該設法敷設一条新的鉄路綫或者寻求新的运輸方式，例如鋪双軌、整治运河等，但是另一方面，我們也应該去設法制訂出最經济、最有效地利用現有路綫的規划。又譬如，某种产品中的廢品数量較多，那末一方面应該設計和制造更好的工具，改良制造方法，另一方面还应該找出那些影响质量的不利因素，以便及时地糾正。运筹学的研究对象，就是属于后一方面的問題的，它不研究物质的能

量、动量，也沒有什么动力学問題，而是专門去考究某一个組織、某一个系統的运用效果和組織間与系統間的消长关系。换句話說，它的着眼点是在“运用”和“筹划”方面，这也就是“运筹”两字的字义所在。

以前，人們早已經常在应用“运用”和“筹划”的方法，如我国古代，便有“运筹帷幄之中，决胜千里之外”的話，但是作为一門成熟的科学来說，它却只有短短一、二十年的历史。

我們知道，任何一門科学的誕生，都是从解决实际問題出发的。例如在現代大量生产方式的工业中，要逐一檢驗产品是很困难的，因此为了克服这一种困难，并且仍要保証質量，就研究出了抽样檢查和質量控制的方法，而成为运筹学里的一个重要分支。

在战爭的年代里，也产生了形形色色、多种多样的运筹問題。例如船舶的护航問題，設計大陆防空体系，雷达網的分布問題，最有效地使用飞机来偵察潜水艇問題，繁忙的軍事运輸問題，战斗梯队的組織問題，最合适地使用軍用飞机場和領航調度問題等等。这些問題都需要应用运筹学的方法来研究。

苏联数学家康托洛維奇教授早在本世紀的三十年代就对于运筹学有了极其深入和卓著成效的研究（这在后文还要說到它）。現在，在社会主义国家里，随着社会主义和共产主义建設的突飞猛进，运筹学正在以无可比拟的速度发展和壮大着，并且，由于社会制度的优越性，运筹学的用武之地是异常广闊的，我們可以在大范圍里广泛应用它的方法，取得极其重大的經济效果，这更是一切資本主义国家所望尘莫及的。

我們祖国是一个历史悠久、人口众多的偉大国家，劳动人民在生产实践中，研究出了許多制訂規划、解决一系列問題的好办法；这些方法虽然不見于史册，也沒有什么深奥难懂的理論，但是实践本身証明，它們却是具有极大价值的。近来已經发現有一些"土"办法，使用起来异常簡便，但却一样能够得到最好的結果；这种方法实际上已經远远超过了已知的一些"洋"办法。目前，中国科学院数学研究所已經与有关部門共同調查这些方法的来源与历史，关于这种方法，将在后面談到。

我国过去虽然在这門科学的理論研究方面基础較差，但是現在，我們已經在急起直追了。尤其在大跃进的 1958 年，取得了許多輝煌成就。例如数学研究所的同志們，为了迎接 1958 年国庆，研究出了运輸問題的一般解法，作为献礼。这是在理論研究上的一項重大收穫。至于在实际应用方面，收效更为卓著。如数学研究所的同志們，在党委的正确領导下，曾經突击完成了 1958 年第 4 季度全国食糖調运方案。这个方案与原方案相比，可以为国家节約运费 150 多万元。他們在完成这一工作以后，又相继制訂了其他一些物資的調运方案，这些方案与原方案相比，共可为国家节省运費达 6,000 万元。又如北京大学数学力学系师生組成的战斗小組，协助北京市汽車运輸公司，用綫性規划的方法来組織了巡迴运輸，改进了調度方法，大大地提高了汽車利用率（这在后文还要說到）；南开大学数学系，在粮食运輸問題上也有不少收获。无疑地，随着教育与劳动生产相結合的方針的貫徹，这种方法的日益推广，必然会出現更多鮮明的实例来；而运筹学这一門实

端科学，也必然会在我国遍地开花，更好地为我国社会主义建設事业服务的。

第二节 运筹学主要内容簡介

运筹学包括下列一些主要分支：博奕論、排队論、控制論、信息論、質量控制和綫性規划。这本书所要介紹的，便是最后一个内容。这里再把其他几个分支的大致情况簡略地介紹一下。

1. 博奕論 对于賭博理論的数学研究，起源很早。在历史上著名的"彼得堡賭法"，和"点的問題"，曾經促进了概率論的发展。另一方面，有一些簡单的棋类游戏，也同样可以用数学方法去处理。但是在本質上来說，后者比前者是更富于策略性的。大家都知道，一个象棋高手差不多有絕对的把握去战胜一个普通的棋手，而很少要依賴偶然性的机会。但是想把这种策略表現为数学的形式，却是一桩很困难的事，直到1928年，数学家馮·諾伊曼（Von Neumann）証明了博奕論的基本定理以后，这門科学的理論基础才算是建立了起来，但至今仍有許多問題尙未解决。因此，博奕論是一門非常年青的数学分支。

在圍棋、象棋、甚至极为簡单的五子棋里，对局者可能施用的策略的数目，还是一个非常巨大的数字。因此为了容易把概念說得淸楚起見，我們来引述一个簡单的例子：

現在来考虑一个博奕，共有甲、乙两个局中人，每一个局中人都有三种策略可以采取。

如果甲采取他的策略 I，乙采取他的策略 I，那么甲可以

赢到3分；

甲采取他的策略I，乙采取他的策略II，那么沒有輸赢；

甲采取他的策略I，乙采取他的策略III，那么甲便要輸掉2分；

当甲采取他的第II种或第III种策略时，而乙应付各种对策时，如果輸赢的数字也是已知的，那么便可以将它們列成下面的表格（或矩陣）形状，象这样的表格，称为支付表。

甲＼乙	I	II	III
I	3	0	−2
II	2	1	2
III	−1	0	4

表中的正数为甲赢进的数字，負数为他輸掉的数字。

現在如果站在甲的立場看問題，他应該采用什么策略，才能算是最稳扎稳打呢？我們不妨加以比較一下。如果他采用的是第I种策略，那么不管乙的策略如何，甲至少可得−2分，即輸掉2分；如果甲采用策略II，那么他至少可以得到1分，而当他采用策略III时，他至少可得−1分。在这三个数字−2，1，−1中，1是最大的，这便是甲所考虑到的最不冒风險而又能赢得最多的办法。因此我們可以看出：在二人博奕中，对局者的最优策略是使他至少可能得到的尽可能地多，而不論对方如何行动。如果局中人不用他的最优策略，他所得到的便可能更少。

在上面这張支付表中，我們可以看到，存在着这样一个数值，它是所在横行中最小的数，同时又是它所在縱列中最大的数，例如上例第二行和第二列交叉处的 1 就是。我們称这一项的位置为鞍点(Saddle Point)。

应該注意，并不是所有的博奕都具有唯一的鞍点的，例如，在下列的支付表中

乙 / 甲	I	II	III
I	1	2	1
II	0	−4	−1
III	1	3	−2

便具有两个鞍点，一个鞍点是在第一横行和第一縱列交叉处的 1，另一个鞍点是在第一横行和第三縱列的交叉处的 1。

又如，在下列支付表中，就根本不存在鞍点。

乙 / 甲	I	II	III
I	1	2	1
II	0	−4	−1
III	2	1	2

現在我們从一个具体例子出发，来說明当鞍点不存在时，局中人应当怎样做。

两个人来玩一种猜銅板游戏，每人都掩着銅錢，然后两人同时揭开来。如果二人都是正面朝上或反面朝上，那么甲赢进乙的一个銅板；如果朝上的两面不相同，则甲輸給乙一个銅板。

如令正面向上为甲的第I个策略，反面向上为甲的第II个策略；同样可定出乙的第I与第II策略，于是可以列出甲的支付表如下：

甲＼乙	I	II
I	1	-1
II	-1	1

显然这是一个不存在鞍点的博奕問題，现在很容易看出，如果一个局中人經常采取某一种策略的話，那对他将是很不利的，因为对手可以利用这种偏爱而占上风。因此，如果这种游戏要玩很多次，那么局中人就应該以同样的頻率，时而正面向上，时而反面向上，并且在玩的过程中，一定要使得对方猜不出下一次要出的是什么。如果双方都这样做，那么当玩的次数很多时，每人的平均所得是接近于零的。这样的情况，称为混合策略問題。实际問題所碰到的，也大都是这样，例如我国民間流行的猜拳行令，便是一个例子。

再举一个例，如在下列的支付表中：

甲 \ 乙	I	II
I	-3	7
II	6	1

如果甲用$\frac{1}{2}$的頻率来玩他的第 I 策略，用$\frac{1}{2}$的頻率来玩他的第 II 策略，而乙則自始至終都用第 I 策略时，这时甲可以贏到的是：

$$\frac{1}{2}(-3)+\frac{1}{2}(6)=1.5$$

如果乙改变方法，自始至終都采用他的第 II 策略，則这时甲可以贏到：

$$\frac{1}{2}(7)+\frac{1}{2}(1)=4$$

然而乙假使也有一套混合策略，他用$\frac{1}{2}$的頻率来玩第 I 策略，而用$\frac{1}{2}$的頻率来玩第 II 策略，这时甲可以贏到的是：

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(-3)+\frac{1}{2}(6)\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(7)+\frac{1}{2}(1)\right]=2.75$$

現在甲、乙两人都改变了玩法，若甲以$\frac{1}{4}$的頻率来玩第 I 策略，$\frac{3}{4}$的頻率来玩第 II 策略；乙則用$\frac{1}{3}$的頻率玩他的第 I 策略，$\frac{2}{3}$的頻率来玩他的第 II 策略，則在这种情况下，甲可以贏到的便是：

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}(-3)+\frac{3}{4}(6)\right]+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}(7)+\frac{3}{4}(1)\right]=2.92$$

从上面的例子中我們可以看到：甲所赢的錢，少到1.5，多到4。甲赢錢的多少，是要随着他与对手乙所采取的不同的混合策略而改变的。現在我們所感到兴趣的問題是：对局中人是否存在着一种最好的策略呢。这就是説，在上面的支付表下，甲保証可以获得的最低的数字是多少呢，同样，对于乙来説，有沒有一种最好的策略，能使他所失去的是最少呢，如果有的話，那么这个数字又将是多大呢。

根据上面所說的意思，我們可以算出：（算法从略）

（1）甲应該以$\frac{1}{3}$的頻率玩他的策略I，而以$\frac{2}{3}$的頻率玩他的策略II；

（2）乙应以$\frac{2}{5}$的頻率玩他的策略I，而以$\frac{3}{5}$的頻率玩他的策略II；

（3）这样，甲最低限度可以赢到的是3，而乙最大限度輸去的亦不会超过3。

以上談到的只是两人博奕的情况，并且其支付的总和是零，这因为甲所赢到的就是乙所輸掉的，甲輸掉的也是乙赢到的緣故。但在实际問題中，却远不是这样簡单，往往有多于两方面的利害关系，例如，三国棋便是一种三人博奕，叉麻将則是四人博奕等。

此外，支付总和也可能是一个不等于零的数，例如在生产問題中，由于生产总是增加財富的，每个局中人都可能获得正的利益，因而其支付总和便是一个大于零的正数，而在战争的

情况下，由于战爭都是毁灭財富的，所以支付总和便会是一个小于零的負数。

在战爭問題方面，例如甲方的飞机在海上进行偵察乙方的潛水艇，在飞机的角度看来，它必須要时常变更偵察地点，以便弋获該潛水艇，而在潛水艇那方面来說，它也必須采取一种策略，使被偵察到的可能性最小，这便是一种利害得失絕然相反的問題。

又如在双方都使用空空导彈的空战中，甲方为了使乙方的导彈不易命中起見，采用无綫电波来进行“干扰”的方法，然而乙方也早已預見到这种可能性，而預备采取反干扰，这时，甲方便可能采取对于反干扰的干扰，……这样継續下去，到底結果如何，就要看双方所采取的策略誰高誰低了。当然在上述的例子中，双方可能采取的策略实际上可認为是无限多的，并且最后的胜負并不单純取决于策略，有时偶然性的因素也能起些作用，这便牽涉到概率論的問題。

上面談到的博奕論的情况，虽只一鱗半爪，但已經可以看到它的重要性。因此，現在研究它的人已經愈来愈多，在社会主义国家里更受到了极大的重視，苏联許多著名的大学里，都有专門关于博奕論的“习明納尔”(討論班)，权威性的数学評論杂志，也为它設立了专栏，介紹在这方面获有成就的論文。

2. 排队論 运筹学的这一个分支是用概率論的观点和方法来研究拥挤現象的。由于在大城市里各項公共設施几乎都与它发生关系，因此这是一种专門研究公用事业的数学理論。

我們經常看到，在上下班高峰負荷时間，公共汽車和电車

总是非常拥挤。車站上排着一字長蛇陣，車子开来了，每次只能上去几个人。乘客等到上車，常会化去很多的时間。

要研究車站的拥挤程度，必須从概率的观点出发。譬如公共交通公司的統計調度人員，他要了解某一个車站到底拥挤到何等程度，就必須經常观察排队的长短，并且計算某种长队出现的机会。例如有一个站头甲，某次排队的人多至一百几十人，开来几輛汽車都不能解决問題，然而平时这一个站头上排队的人却只有十几人，而另外一个站头乙，却經常有三、四十人在排队，那末就可以肯定說，乙站是比甲站更为拥挤的。

所以在排队論里，我們所感到兴趣的問題是：

(1) 等待排队的时間；

(2) 排队的长度；

(3) 等待的时間和被接待时間的比例。

如前面所談，这些問題都必須从概率論的观点出发，根据大量現象的統計数据来处理加工的。

除了乘汽車或是买东西之类的排队外，还有許多事情，虽然沒有排队，实际上却也和排队一样，例如电話总机为每一号电話呼喚的服务，是要逐个地来的，因此拿起电話来就不一定馬上能接通，因为别人也可能要这一个号碼的电話（尤其是象买火車票或戏院的定票电話等），这样就无形中排起了一个队。

不仅人能排队，其他事物也能排队，譬如說，参观过一般紗厂的人，都会熟悉这一現象：在紗厂里，一个女工要照顧好几部机器，当一卷紗繞完时，机器得要工人去换装上一个新的繞筒。也許正在繞的时候，紗断了，必須要有人去接上。这样

如果当那位工人做着一件事的时候，恰巧别一件事又发生了，那么机器便会排着队等人去逐一处理。

在交通运輸方面，排队現象也是到处可見的，例如在軍用机場里，由于机場的容量有限，有时飞机飞进了机場，而跑道却正在使用着，不能着陆，只好盘旋于空中，于是許多飞机无形中在空中排起了队。在火車站和輪船碼头，往往有大量物資，如鋼鉄、矿石、日用百貨、副食品堆积如山，等待着火車和駁船来装运它們，这豈不也是一种排队嗎。

一般人的想法，总是站在顧客的方面着想，他們希望等候的时間愈少愈好，排队的長度愈短愈好。然而，这种想法却往往是不現实的。多办些戏院、多开些汽車、多装設些电話交換設备，这不仅会增加国家的投資，而且从服务部門的观点来看也太不經济了；因为这样一来，在很多时候，公共汽車里的乘客寥寥若晨星，电話綫路里寂然无声，所以从服务部門来看，他們希望公共汽車总是满座，电話綫經常不空……。

因此在顧客的方便和服务部門的經济观点之間，便存在着矛盾。在这两方面应該如何求得一个最合理的折衷办法呢？例如在某一条綫路上究竟应該配备多少輛公共汽車最为合适，一个紗厂女工最好管理几部机器等等，都需要用排队論去加以研究。

在排队論領域中进行研究工作、获得較大成果的两位学者是埃尔兰(A. K. Erlang)与巴尔姆(C. Palm)，在苏联著名数学家辛欽所著的"公用事业的数学理論"一书中有着比較完备的論述。

3. 控制論和信息論 控制論是控制設备和自动机的数