

考虑材料塑性的结构计算

A. P. 尔然尼采



建筑工程出版社

考慮材料塑性的結構計算

趙超燮 葉于政 沈參璜 譯

建筑工程出版社出版

• 1957 •

內容提要 本書講述根據彈塑性材料理想工作圖按極限狀態計算結構的理論和時間對應力狀態影響的計算，同時詳細說明利用機率理論確定安全係數的一些問題。此外，還介紹了關於彈粘性構件和非線性變形的概念。

本書供土建工程師、設計工作者、科學研究工作者以及研究生閱讀。

本書序言、第一、二、三、四、五、六、七、十一、十二、十四章結束語由趙超燮譯，第八、九、十章由叶于政譯，第十三章由沈參瑛譯，第一至五章由沈參瑛校閱，全書由趙超燮校訂。

書中的譯者注是供一般工程師參考的。

原本說明

書名 РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ(ИЗДАНИЕ 2-Е ПЕРЕРАБОТАННОЕ)

著者 А.Р. Ржаницын

出版者 Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре

出版地点及年份 Москва—1954.10.27

考慮材料塑性的結構計算

趙超燮 叶于政 沈參瑛 譯

*

建築工程出版社出版（北京市阜成門外南夏土路）

（北京市書刊出版業營業許可證出字第952號）

建築工程出版社印刷廠印刷·新華書店發行

書號552 230千字 870×1092 $\frac{1}{30}$ 印張 $9\frac{9}{15}$

1957年8月第1版 1957年8月第1次印刷

印數：1—2,050册 定價（11）2.20元

目 录

序 言	7
第一章 結構按極限狀態計算的理論	8
第一節 建筑力學中綫性和非綫性問題	8
第二節 虎克定律的偏差	12
第三節 結構按容許應力原理計算的應用範圍	15
第四節 結構的極限狀態	17
第五節 彈塑性超靜定結構極限荷載的求法	18
第六節 彈塑性超靜定結構的計算例題	20
第七節 不考慮強化的彈塑性結構計算理論的應用範圍	23
第八節 按極限狀態計算的經濟性及其應用範圍	24
第二章 彈塑性梁的受彎計算	27
第一節 平面截面假設	27
第二節 超過彈性極限時梁截面的工作	29
第三節 塑性截面矩量	32
第四節 梁受彎時的塑性區域	34
第五節 彈塑性矩形截面梁的垂度	37
第六節 極限狀態時梁有限垂度的條件	41
第七節 初應力、卸載和重複荷載的影響	43
第三章 按極限狀態計算超靜定梁	47
第一節 塑性鉸的概念	47
第二節 確定連續梁極限狀態的機動法和靜力法	50
第三節 多跨連續梁的極限狀態	54
第四節 支座沉陷、卸載和重複荷載的影響	56
第五節 實驗資料	60
第六節 彈性地基上的彈塑性梁	63
第四章 杆在彎矩和縱向力同時作用下按極限狀態的計算	67
第一節 斜向彎曲時截面的極限狀態	67

第二節	偏心受压或受拉杆截面的極限状态	70
第三節	斜向偏心受压或受拉	74
第四節	彈塑性拱的極限状态	77
第五章	彈塑性結構的一般計算理論	81
第一節	超靜定結構的自应力状态	81
第二節	正交和标准自应力状态	83
第三節	結構具有無限自由度时自应力概念的推广	84
第四節	一次超靜定結構塑性状态时自应力的变化	85
第五節	彈塑性超靜定梁的可能状态范围	88
第六節	加载时塑性变形的求法	91
第七節	变荷载的情形	95
第八節	不同荷载依次更替作用的情形	98
第九節	兩次超靜定結構	101
第十節	作用在結構上的变荷载	104
第六章	复杂应力状态的塑性	108
第一節	微小彈塑性变形的理論	108
第二節	塑性理論方程	109
第三節	体积改变的变形和形狀改变的变形	113
第四節	应力張量和变形張量的不变量	115
第五節	八面体的剪应力和剪变形	118
第六節	理想的彈塑性材料和塑性条件	121
第七節	連續体的極限状态	126
第八節	簡單加载規律	126
第七章	具有剪应力时的杆截面極限状态	128
第一節	純扭轉时的極限状态	128
第二節	圓柱杆受扭同时受拉	133
第三節	薄条受拉同时受扭	137
第四節	薄条受弯同时受扭	139
第五節	剪力对截面承重能力影响的近似計算法	140
第六節	弯矩和剪力同时作用下的截面極限状态	144
第七節	开口截面薄壁杆承受約束扭轉时的極限状态	151
第八章	平板的極限状态	156
第一節	周边簡支彈塑性板的破坏形狀	156

第二節	簡支板的特殊情形	162
第三節	非周边支承板	164
第四節	自由(單向)支承板	169
第五節	周边固定板	172
第六節	平板邊緣塑性鉸不閉合时的对称破坏形狀	176
第七節	周边固定并承受均布荷载的平板	181
第九章	应力和变形成幂函数关系时超靜定結構的計算	186
第一節	一般定理	186
第二節	超靜定結構的計算例題	189
第三節	应力和变形成幂函数关系时梁的弯曲	190
第十章	彈粘性結構	195
第一節	綫性变形物体物理規律的確定	195
第二節	簡單的非松弛物体	196
第三節	松 弛	199
第四節	变形規律的进一步確定	200
第五節	簡化的基本綫性变形規律	202
第六節	彈粘性構件的各种加载情形	204
第七節	变形按已知規律的变化	208
第八節	先前加载的影响函数	210
第九節	应力和变形的关系图	213
第十一章	綫性变形的一般規律	218
第一節	加载对变形的影响函数	218
第二節	卸载后的变形	221
第三節	稳定和不稳定的变形規律	223
第四節	成幂函数的影响函数	225
第五節	有奇異点($t=0$)的影响函数	228
第十二章	材料的非綫性变形	232
第一節	变形和应力的似綫性关系	232
第二節	超过綫性关系应用范围时的近似变形規律	233
第三節	匀速增長的变形	236
第四節	超过綫性关系时較准確的变形簡图	238
第五節	超过綫性变形范围的卸载規律	242
第十三章	計算結果准确度的概率	244

第一節	考慮計算值的隨機誤差	244
第二節	概率分布曲綫	244
第三節	分布表面	247
第四節	多變數的情形	253
第五節	正態分布定律	255
第六節	隨機量函數變異系數的求法	257
第十四章	由破壞應力狀態過渡到容許應力狀態	261
第一節	結構破壞概率的求法	261
第二節	安全系數的求法	265
第三節	鋼結構的計算例題	266
第四節	勻質系數和超載系數	268
第五節	加載次數的影響和結構破壞簡圖	273
結 束 語		278
參考書刊		
中俄人名對照表		

序 言

近来,結構强度和剛度的計算方法,向更完善地考慮結構实际工作条件方面順利发展。但在超过彈性工作阶段的結構計算方面,大多数科学著作仍然未能广泛地为工程师們所掌握,这是由于这些著作本身的复杂性,以及发表在各种銷行数量不多的文集和杂志上的緣故。本書是著者所写“考虑材料塑性的結構計算”(海軍建設出版社,1949年俄文版)一書的第二版修訂本。本書的目的是向土建工程师們介紹超过彈性極限时結構計算問題的現狀,以及如今摆在研究工作者面前有关結構理論方面的一些問題。同时在書內还闡述著者对上述問題的一些独特研究和看法。

本書根据結構是理想彈塑性結構的假設,着重研究結構按極限状态(極限平衡)計算的理論。此外,还講到彈粘性結構計算的基本概念,这种結構在恒載作用下应力状态具有随時間变化的特性,也就是具有徐变和松弛的特性。最后講述如何确定安全系数,以及按照結構可能出現極限状态来确定其容許工作状态的新原理。

本書并不准备全面研究材料和結構的非彈性工作問題,因为这样一来,就要增加很多的篇幅。应当指出,在本書的第二版中,主要是增加了理想彈塑性結構工作理論的一般原理,塑性力学原理以及有关彈粘性結構方面的理論。結構計算的一般原理以及梁式結構的計算方法,为制定其它形式的結構(例如框架、桁架、壳体)的計算方法奠定基础。有些著者在他們的著作中发表对这些計算方法的研究(見附录的参考書刊)。

大体上,結構按其恰在破坏之前并規定为工作(結構的容許应力状态)阶段的計算方法的研究和应用,不但在材料上、資金上可以得到巨大的節約,而且能提高結構物的安全性。根据上面的叙述,這個問題是具有很大的国民經济意义。因此,本書如能促进解决這個問題,著者就可以認為是尽到了自己的职责。

第一章 結構按極限狀態計算的理論

第一節 建築力學中線性和非線性問題

古典建築力學中較大部分方程是線性方程。建築力學的一些基本方程之所以是線性方程，主要是根據下列簡化的結構工作假設：

1) 假設結構的計算簡圖和尺寸在整個加載過程中都沒有變化；

2) 應力和變形之間保持均勻的線性關係^①（虎克定律）。

建築力學中許多問題是不能滿足這兩個假設的。例如在結構工作過程中，計算簡圖在下列情形就發生變化。

(1) 結構變形的數值與結構尺寸同級。如果變形很大或者結構的某些尺寸（例如厚度）很小，就會發生結構失去平衡穩定性的現象，這在工程結構靜力穩定性理論中詳細研究。

下面的例題可以用來說明大變形情形。設一拉得很緊的彈性綫繫在點 A 和 B 上（圖 1）。在綫的中點 C 加一豎向力 P 。

利用虎克定律^② 求出綫的拉力 S 和力 P 之間的關係；

$$S = EF \frac{l - l_0}{l_0}, \quad 1.1$$

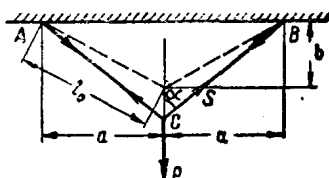


圖 1 拉得很緊的彈性綫

① 如果所有自變數等於零，則函數的均勻線性關係就變為零。

② 在有限變形理論中，有時將符合下列定律的物體認為是彈性體：

$$S = EF \ln \frac{l}{l_0}. \quad 1.1a$$

實際拉得很緊的物體，其內力和變形之間有各種不同的關係。定律 1.1 適合於彈性螺旋彈簧，而定律 1.1a 更適合於橡皮，可是它不是彈性體。

式中 l_0 ——半条綫的原来長度；

l ——加载后半条綫的最后長度；

E ——綫材料的彈性模量；

F ——橫截面面积。

將汇交在点 C 的各力投影在豎直軸上，写出节点 C 的平衡条件：

$$P = 2S \cos \alpha = 2S \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}}, \quad 1.2$$

式中 a ——半条綫的水平投影。

从式1.1得到

$$l = l_0 \left(1 + \frac{S}{EF} \right).$$

將 l 值代入式1.2，求得

$$P = \frac{2S}{1 + \frac{S}{EF}} \sqrt{\left(1 + \frac{S}{EF} \right)^2 - \frac{a^2}{l_0^2}}.$$

为了簡化上式，設

$$p = \frac{P}{EF}, \quad s = \frac{S}{EF}. \quad 1.3$$

于是得到

$$p = \frac{2s}{1+s} \sqrt{(1+s)^2 - \frac{a^2}{l_0^2}}. \quad 1.4$$

外力 P 和內力 S 之間是非綫性关系。图2就是 $a=l_0$ 时， P 与 S 之間的关系图。

当 s 值远小于1时，可以得到綫性关系：

$$p = 2s \sqrt{1 - \frac{a^2}{l_0^2}} = 2 \frac{b}{l_0} s. \quad 1.5$$

这时，我們应当認为在所研究的 p 值範圍內，綫的垂度 b 接近于常数。

当 $l_0 < a$ 时得到綫予先受拉的情形（ l_0 ——在予先受拉前的半条綫長度）。这里 s 值不能小于予拉力 s_0 ：

$$s_0 = \frac{a}{l_0} - 1. \quad 1.6$$

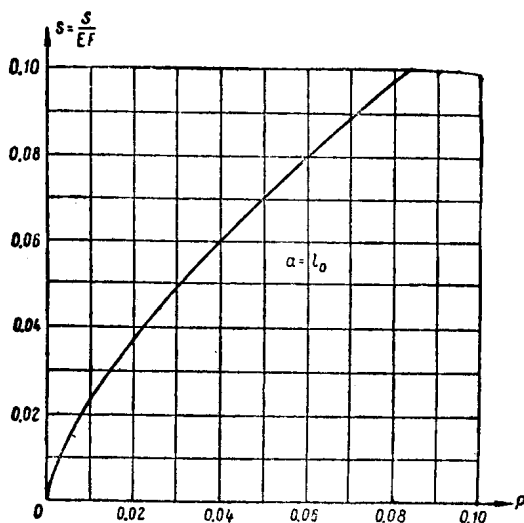


圖 2 受拉綫內力和外来荷載之間的关系图

当 $s = s_0$ 时, 从公式 1.4 得到 P 等于零。

从公式 1.4 求出导数 $\frac{dp}{ds}$:

$$\frac{dp}{ds} = \frac{2 \sqrt{(1+s)^2 - \frac{a^2}{l_0^2}}}{(1+s)^2} + \frac{2s}{\sqrt{(1+s)^2 - \frac{a^2}{l_0^2}}} \quad 1.7$$

当 $s = 0$ 时, 导数

$$\frac{dp}{ds} = 2 \sqrt{2 - \frac{a^2}{l_0^2}},$$

这就是公式 1.5 的导数。

在綫予先受拉的情形下, $s = s_0 = \frac{a}{l_0} - 1$ 时:

$$\frac{dp}{ds} = \frac{2s_0}{0} = \infty.$$

这也就是说,开始加载后 p 值无论怎样小, p 和 s 之间的线性关系早就不存在了。

应当指出,差不多各种建筑材料的变形(不会导致破坏的)都很小,因此在实践中根本很难遇到大变形的情形。

(2) 加载过程中结构上约束的改变。这是常有的情形,特别是在单向约束的情形下发生得更多。所谓单向约束,也就是只能在一个方向工作,例如两个物体简单接触时,第二个物体只能阻碍第一个物体在一个方向运动,而不能阻止第一个物体在相反方向运动。

我们可以取自由搁置在刚性地基上的弹性梁来作为单向约束的例题(图3a)。梁承受自重 $g \text{ kg/cm}$ 和中点上顶力 P 。设梁被顶起部分的长度为 a 。

没有被顶起部分的地基反力完全与梁的自重相互平衡。因此梁上没有被顶起部分不传递任何力量给被顶起部分,只是在梁与地基的弯起处发生集中

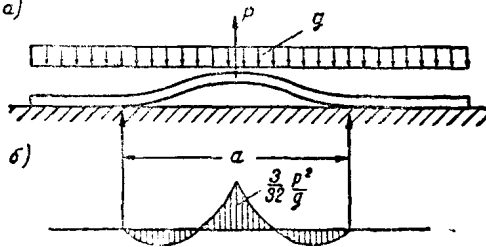


圖3 刚性地基上自由拱起的柔性梁

中支座反力。这样在中间部分得到两端固定、跨度为 a 的梁,梁承受均布荷载 g 和负集中力 P 。根据固定端弯矩等于零的条件求得未知长度 a :

$$-\frac{ga^2}{12} + \frac{Pa}{8} = 0.$$

由此

$$a = \frac{3}{2} \frac{P}{g}. \quad 1.8$$

荷载 P 作用处截面的弯矩为

$$M_{\text{max}} = -\frac{Pa}{8} + \frac{ga^2}{24} = -\frac{3}{32} \frac{P^2}{g}. \quad 1.9$$

图36是梁的弯矩图。

我們看出,最大加载截面处的弯矩和力 P 之間不是綫性关系,甚至在 P 值很小时也不能近似地認為是綫性关系。

第二節 虎克定律的偏差

計算結構时,非綫性关系的最主要根源 就是材料 不能符合虎克定律所产生的偏差。差不多所有建筑材料在 破坏的瞬时,应力和变形之間的关系与虎克定律(正比定律)有很大的偏差。因此对于各种建筑材料,可以采用一些簡化的(假設的)材料工作图来代替虎克定律,也就是用应力和变形之間的曲綫关系来代替綫性关系。这些曲綫是根据实验資料和考虑到計算的簡化,而按照某一簡單的数学規律繪制成的。

图 4、5 和 6 上所画的是建筑鋼、木材和 混凝土等 材料的工作图。

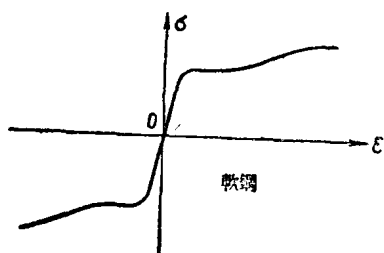


圖 4 軟鋼工作图

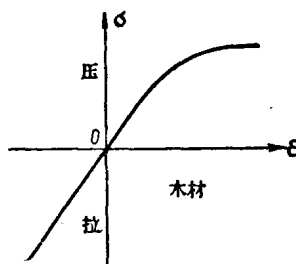


圖 5 木材工作图

通常采用下列簡化的材料工作图:

1) 脆性材料在已知极限(极限强度)以前采用斜直綫图(虎克定律),超过极限强度后应力瞬間减小到零(图 7)。

2) 理想彈塑性材料在某一极限(屈服点)以前采用斜直綫图,然后是水平直綫,这时应力是常量,而变形无限增加(图 8);这种图最适用于建筑鋼。

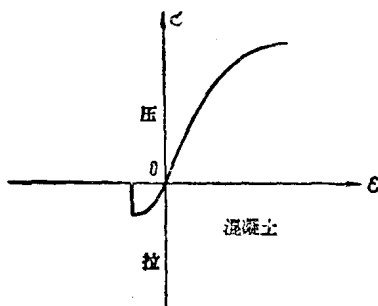


圖 6 混凝土工作图

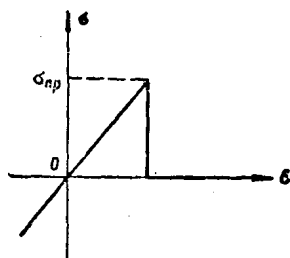


圖 7 脆性材料的簡化工作图

3) 考虑强化的彈塑性材料采用兩条斜直綫图, 其中第一条綫通过坐标原点, 它相应于材料的彈性工作阶段; 而第二条綫的斜率較小(图 9)。

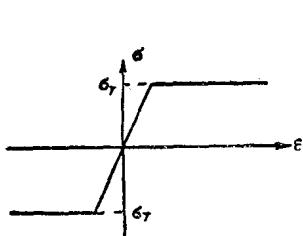


圖 8 理想彈塑性材料的簡化工作图

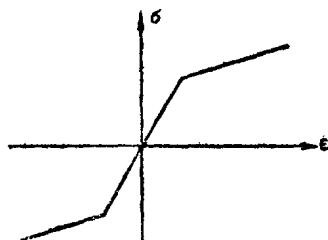


圖 9 考虑强化的彈塑性材料簡化工作图

其它的簡化工作图, 例如拋物綫形等等也时常采用。

今后我們認 为 塑 性 或 彈 塑 性 構 件 适 合 采 用 图 8 的 理 想 工 作 图, 这时不考虑强化。

只有在超靜定結構中, 材料工作图的形狀才能影响內力分布, 这是因为超靜定結構的內力分布取决于各个構件的变形。彈塑性超靜定結構中內力和外来荷載之間的关系, 即使 根据图 8 的簡化工作图也是非綫性的。

現在用下列簡單例題來說明这一点。

設有同一材料制成的三个杆悬挂在刚性平面上，而下端用铰连接(图10)。各杆横截面面积相同都等于 F' 。力 P 作用在各杆的连接点 A 。杆内应力 σ_1 、 σ_2 和力 P 之间的关系，就依結構的不同工作阶段而不同。

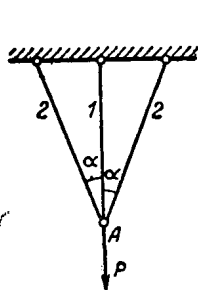


圖 10 超靜定杆件結構

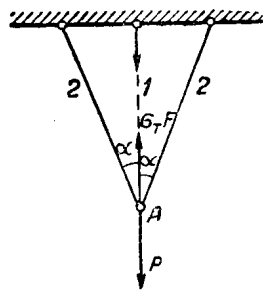


圖 11 彈塑性超靜定杆件結構的第二工作阶段

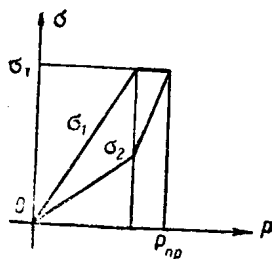


圖 12 彈塑性超靜定杆件应力和荷載之間的关糸图

在第一工作阶段时各杆应力都未到达屈服点 σ_T ，其应力可用普通計算彈性結構的方法来确定：

$$\sigma_1 = \frac{P}{F'(1+2\cos^3\alpha)}; \quad \sigma_2 = \frac{P \cos^2\alpha}{F'(1+2\cos^3\alpha)}; \quad (1.10)$$

$(\sigma_1 > \sigma_T, \sigma_2 < \sigma_T).$

在力 P 增加的过程中，当

$$P = \sigma_T F'(1+2\cos^3\alpha); \quad \sigma_2 = \sigma_T \cos^2\alpha. \quad (1.11)$$

时，中間杆首先到达屈服点。

① 從圖10，根据 $\Sigma y=0$ ；得 $2\sigma_2 \cos\alpha + \sigma_1 - P=0$

根据變形条件知道 $\Delta l_2 = \Delta l_1 \cos\alpha$ ； $\therefore \Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E}$ ， $\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E}$ ； $\therefore \sigma_2 l_2 = \sigma_1 l_1 \cos\alpha$ 。

$\therefore l_1 = l_2 \cos\alpha$ ， $\therefore \sigma_2 l_2 = \sigma_1 l_2 \cos^2\alpha$ 即 $\sigma_2 = \sigma_1 \cos^2\alpha$ 。

代入上面平衡方程就得到

$$\sigma_1 = \frac{P}{1+2\cos^3\alpha}; \quad \sigma_2 = \frac{P \cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}. \quad \text{——譯者注。}$$

如果繼續增加力 P ，就只能依靠增加兩個邊杆的應力。這時中間杆的應力保持常數，等於 $\sigma_r F'$ 。結構在第二工作階段（圖11）時，兩個邊杆內的應力為

$$\sigma_2 = \frac{P - \sigma_r F'}{2F' \cos \alpha} \quad 1.12$$

最後，當

$$P = P_{np} = \sigma_r F' (1 + 2 \cos \alpha) \quad 1.13$$

時，兩個邊杆內的應力也到達屈服點，以後就不能繼續增加力 P 了。因而按公式 1.13 求得的力 P 是極限值，或者說是破壞值。

應力 σ_1 、 σ_2 和力 P 之間的關係可用兩條折綫來表示（圖12），那時應力 σ_1 或 σ_2 和力 P 之間的均勻綫性關係，在力 P 由零增加到破壞值 P_{np} 的整個區間內可用一直綫來表示。

第三節 結構按容許應力原理 計算的應用範圍

力作用獨立性原理就是：幾個荷載的作用等於每個荷載單獨作用的和。只有所研究的作用和荷載值成均勻的綫性關係時，才能應用這個原理。力作用獨立性原理的解析式實際上可以寫成：

$$\Phi(P_1, P_2, \dots, P_n) = \Phi_1(P_1) + \Phi_2(P_2) + \dots + \Phi_n(P_n), \quad 1.14$$

式中 $P_i (i=1, 2, \dots, n)$ ——荷載；

Φ ——全部荷載的作用；

$\Phi_i (i=1, 2, \dots, n)$ ——一個別荷載的作用。

在 $P_1 = P_2 = \dots = P_n = P_i$ 的情形下，從式 1.14 得到

$$\Phi(n P_i) = n \Phi_i(P_i). \quad 1.15$$

方程 1.15 兩端除以 $n P_i$ ，得到

$$\frac{\Phi(n P_i)}{n P_i} = \frac{\Phi_i(P_i)}{P_i}. \quad 1.16$$

由於 n 是任意常數，等式 1.16 右端應當是常數，我們設此常數

为 C_i 。于是得到

$$\Phi_i(P_i) = C_i P_i (i = 1, 2, \dots, n), \quad 1.17$$

同时按照式 1.14

$$\Phi(P_1, P_2, \dots, P_n) = C_1 P_1 + C_2 P_2 + \dots + C_n P_n. \quad 1.18$$

因此所求的数个荷载 P_i 的作用 Φ 应当是变数 P_i 的均匀线性函数。

符合力作用独立性原理的结构，更精确地说凡是应力和变形之间有均匀线性关系的结构，可以按容许应力来计算，破坏应力除以安全系数叫作容许应力。

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{np}}{k}, \quad 1.19$$

式中 $[\sigma]$ ——容许应力；

σ_{np} ——破坏应力（有时取屈服点 σ_r 作为破坏应力）；

k ——安全系数。

引用安全系数之后，可以充分保证结构不致于因为强度和荷载数值与计算值的可能误差而引起破坏。极限荷载（结构强度的特征）与容许荷载（使用时的容许荷载）的比值是安全系数：

$$k = \frac{P_{np}}{P_{дон}}. \quad 1.20$$

虽然加载形式不同，一种材料所制成的各种结构，通常采用相同的安全系数。最近转向确定分开来的安全系数（参阅第十四章）。认为安全系数应由结构上的作用荷载来确定。当荷载与应力之间具有均匀线性关系时，由式 1.20 很容易化为式 1.19。在非线性关系时，将关系式 $P = \Phi(\sigma)$ 、 $P_{np} = \Phi(\sigma_{np})$ 都除以安全系数，得到

$$P_{дон} = \frac{P_{np}}{k} = \frac{\Phi(\sigma_{np})}{k} = \Phi\left(\frac{\sigma_{np}}{k}\right),$$

这是由于不适用力作用独立性原理而得出的结论。因此应力与荷载之间是非线性关系时，只能用极限荷载除以安全系数的方法来求容许荷载。这时已不适用按容许应力方法来计算。