序

居今日而欲致國家於富强之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦爲國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久爲識者所共喻。

巴西華僑徐君銘信，身繫異邦，心縈祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，爲邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已爲數不貲，前歲之冬，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與淵院長步頤之介紹，欲以迻譯刊行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敦敢，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋泚、李煥燊、南登岐、孫賡年(物理學總執筆人)、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊俊（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鍾恩寵、關德懋（以姓氏筆劃爲序）諸君分任迻譯，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則爲慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實爲元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心* 譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。茲值本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

中華民國五十一年元月湯元吉序於臺北

*該中心爲一不以營利爲目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事爲李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄺堃厚、湯元吉等九人。

徐氏基金會啓事

一、凡對本書任何一部分，或本會所印行之其他書籍，能在內容及文字方面，提供建議，致使讀者更易迅捷了解書中意義者，如被採納，當致酬美金十二元五角(折合新臺幣五百元)至一百二十五元（折合新臺幣五千元），以示謝意。

二、本會誠徵關於自然科學及機械、電機、電子等工程之中文創作或翻譯稿件，以適合於一般人士或中等學校以上學生自修之用者爲標準。稿費每千字美金二元五角（折合新臺幣一百元），特優譯著稿酬另議。

三、玆爲獎酬本會出版各書之作者及譯者起見，將於各書出版後之次年年底，核計其在臺灣、香港及星加坡三處之銷售數量，分配贈與其作者或譯者以下列三項獎金：

1. 銷數最多者美金6,000元

2. 第二多數者美金4,000元

3. 第三多數者美金2,000元

關於上開一、二兩項事宜，請逕函香港郵政信箱 1284 號徐氏基金會接洽。

編輯要旨

一•本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。

二•本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本；數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別遴請專家迻譯。

三•本叢書之供應對象，主要爲中等以上學校之學生、自行進修人士及從事教授各該有關課業之教師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要爲主旨。

四•原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種教學措施，學生於作成論文後，校方尙需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟爲存眞起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。

五•本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首册中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專册，以供讀者檢閱。

六•本叢書數學原文，每講約爲六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故爲便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印爲一册，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。

七•本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，教育部審

定公布之名詞；但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之，其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，尙冀海內專家學者不吝賜教。

八・本叢書之迻譯工作係由多人執筆，行文遣辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尙祈讀者諒之。

九・本叢書原文篇帙浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指教，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

數學第二十冊目錄

上冊　微積分學　　頁數

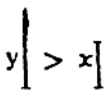
下冊　解析幾何學

上册　微積分學

I.　對應函數方程式

a) 衆所周知之例 278

〔278a〕圖中所畫 y 與 x 的長短關係，可用數學的簡略符號如此表示之：$y>x$ 或 $x<y$。這兩個不等式在形式上雖屬互異，但其內容並無不同之處，蓋兩者所指實爲同一事實，即不論指 y 大於 x 或 x 小 於y，結果並無二致也。因此，我們可將此二不等式稱爲**彼此對應的**，並選用簡略符號$\wedge$以表示之，這個符號在第一册〔90〕節中所講的符號（$\triangleq$）中早就出現過了。但$\triangleq$是代表“相當”之意（好比一秒相當於六度，可寫成 $1s \triangleq 6°$），而$\wedge$這個符號只能被置於彼此對應的不等式或等式之間，用以表示二式所代表者，實爲同一實際情形。（其他數學書並不用此符號$\wedge$）*) 我們擬用數學的簡略符號把“不等式 $y>x$ 及 $x<y$ 是彼此對應的”這一句話寫成：



278 a

$$\{y>x\}\wedge\{x<y\}$$

而簡單讀如：　$y>x$相當於$x<y$。

就等式而論，只要它們以不同的形式表達計算上的同一內容之時，亦可仿照上述之不等式使之取得彼此對應的形式。以言〔278a圖〕，便可看出：

$$\{y=2x\}\wedge\{x=\frac{1}{2}y\}$$

---

*) 標準符號$\triangleq$中之二平行線，我們不可把它當作等號看待。例如 3 公頃內收獲了 3.5 噸（=3500 公斤）裸麥，而我們採用對應式“3 公頃$\triangleq$3.5噸”來表達這一事實，這並不表示二數相等，而只不過表示二者之間具有一部分的配合關係而已：$\begin{array}{c|c} \text{頃} & \text{噸} \\ \hline 3 & 3.5 \end{array}$；因此，如將上述二平行線視爲這一表格中二水平線之剩餘段，也許是很有意義的一件事。

譬如 $y=2x$ 相當於 $x=\frac{1}{2}y$。

就計算方面而言，單靠形式的改變，即可保證上二等式內容是一致的；例如以2除上面的第一式即得第二式，或以2乘第二式即得第一式。

假如我們把上面的等式當作函數方程式看待時，則該等式便成爲**對應函數方程式**，這樣一來，我們就談到正題上來了。例如 $y=\sqrt{25-x^2}$ 及 $x=\sqrt{25-y^2}$ 就是對應函數方程式，蓋此二式所表達之計算實情($x^2+y^2=25$) 乃二而一者也。

習　題：一若我們曾從y式($y=2x$)構成與其對應的x式($x=\frac{1}{2}y$)，試對下列各式求其對應之 x 式，並以符號 ∧ 把二式聯繫起來：

1) $y=x^2$；　2) $y=3x-4$；　3) $y=x^2+2x$；　4) $y=x$

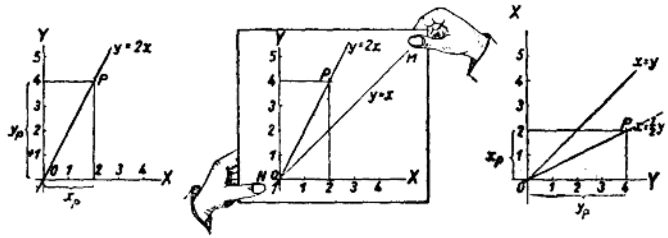
如欲使此等例題一般化，我們不僅要使彼此對應之二函數方程式在寫法方面（即一式以 y 開始，另一式以 x 開始），而且照例要使兩式所用之計算方法均有所分別，始克有濟。因此，我們對於第一式就 x 進行之計算遂選用了 $f(\quad)$，對於第二式就 y 進行之計算則選用了$\varphi(\quad)$作爲符號：

$$\boxed{\{y=f(x)\}\wedge\{x=\varphi(y)\}}$$

於此，請各位注意代表彼此對應之二函數方程式的公式中，實含有下面兩種如解聯立方程式可以互相約去的對立情形：第一是二式中之 y 和 x 並非列於同一邊；第二是符號$f(\quad)$及$\varphi(\quad)$乃表示 x 和 y 所用的算法是彼此各異的。（但計算時仍須按照題意，由**同一**假設，先求 x 再求 y 或先求y再求 x，並非可以**任意**爲之的。這一重要區別，我們在此亦擬用符號∧把它顯示出來。）

279 所有對應函數方程式，其相等意義均可採取各種不同的方式，**用圖形表示出來**。

例如：〔279a〕圖中所畫之直線，是函數 $y=2x$ 的圖解；而直



279 a　　279 b　　279 c

線上的一點 $P(x=2;\ y=4)$尤其畫的特別顯明。按一般慣例，P點之橫標 x 可被視作已知數，而縱標 y 則須根據 $y=2x$ 求之。又由該圖中，我們亦可看出：$x=\frac{1}{2}y$，好比對於 $P\ (y=4;\ x=2)$；於此，我們可以假定 $y=4$ 爲已知，而 x 則須按$x=\frac{1}{2}y$ 求之。由此可見，該二等式均可由同一圖形中讀出，這一事實更加强了我們對於該二等式必爲彼此對應者的此一信念。

以後各位必將看出，除此以外，彼此對應之等式還有一種圖示法也是非常重要的。請將一張複寫紙（落色的一面朝上！）放在透明或不透明的繪圖紙下面，然後把〔279a〕圖畫在該繪圖紙上！另外再畫上一條 $y=x$ 的直線。接着再用兩隻手拿住繪圖紙，如〔279b〕圖所示；並將每一隻手的大拇指放在直線 $y=x$ 的方向之內，卽右手的大拇指靠近M，左手的大拇指靠近N。如以$y=x$的直線作爲固定的旋轉軸（卽不改變M與N二點在空間之位置），將繪圖紙旋轉180°，各位便可看見其反面所顯示透明的或複寫的圖形（卽〔279c〕圖）；在此圖形中，我們如以彼此對應的等式 $x=\frac{1}{2}y$ 及$x=y$ 取代 $y=2x$ 及 $y=x$，而不改變圖的本身與軸的名稱，以及坐標與坐標之間的計算關係，那末在此圖形中各位也易於讀出 $x=\frac{1}{2}y$，這是我們所熟習的一種形式；但等號左邊之

x 値却須在垂直軸上去量取才行。

現在我們要問：如將〔279a〕圖對準〔279c〕圖重疊在一起，而不作任何旋轉，則〔279c〕圖究可顯示那幾種與〔279a〕圖彼此對立之情形？答案是有兩種，第一：以直線 $y=x$ 爲準，直線$y=2x$（見〔279a〕圖）及 $x=\frac{1}{2}y$（見〔279c圖）〔卽該二對應函數之圖解〕乃是彼此對立的。第二：坐標軸的名稱各不相同，也是彼此對立的。由此圖解可以令人清清楚楚的看出，這兩種對立情形是可互相約去的。

習　題： 1）試繪直線 $y=\frac{1}{2}x-1.5$（同樣將複寫紙放在繪圖紙下面），然後以$y=x$爲軸使圖形作180°之旋轉，並用 y 表示 x！

2）同上題，但所繪直線爲　　$y=x^2+1$；

3）同上題，但所繪直線爲　　$y=3x-4$；

4）同上題，但所繪直線爲　　$y=2x+3$。

綜上所述，除了符號 $\wedge$ 之外，直至目前爲止，各位並沒有學到什末新的玩藝；而我們之所以要把各位已經熟悉的東西重新整理和複述一遍，目的只不過是爲了要將“對應函數方程式”這個概念應用到三角函數方面去罷了。

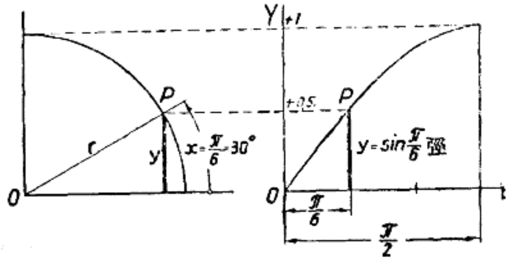
280 b) **三角函數**

在各位繼續往下研讀之前，務必要請各位先弄清楚，對於第十一至第十九册所講有關三角函數之理論，是否確已澈底了解了！於此，各位還可看出，我們從未由三角函數的 y 式構成過與其對應的 x 式。因此，我們首先要提出一個問題：

$$\{y=\sin\ x\ (\text{弳})\}\wedge\{x=\varphi(y)=?\}$$

卽：與　$y=\sin x$（弳)對應者究爲何一等式？

等式 $y=\sin x$（弳）之意義，我們是知道的。我們選擇一個實例，藉以回憶過去時常對此函數採用之圖示法；在〔280a〕圖中，就 $y=\sin\ x$（弳）而言，好比可以讀出下列各數值：



280 a

$$0.5=\sin\frac{\pi}{6}\text{（弳）}=\sin 30°$$

對此函數方程式，我們可作如下的解釋（請各位隨時注意〔280a〕圖！）：$y=0.5$ 在單位圓中係投影垂線之量度數，而此垂線是屬於 x（弳）$=\frac{\pi}{6}$（弳）$=30°$ 這個角的。設將函數 $y=\sin x$（弳）用直角坐標系表示出來，則$y=0.5$ 便是橫標$\frac{\pi}{6}$ 所屬之縱標；簡言之，即 $y=0.5$ 是角$\frac{\pi}{6}$（弳）之正弦值。請各位注意，位于等式 $y=\sin x$(弳)**左右兩邊**的都是正弦值！倘若 $y=\sin x$（弳）是一個定數方程式，則 x(弳)角照例為已知數，而所屬之正弦值 y 則為所求之未知數。（到目前為止，我們只不過把已經學過的東西拿來溫習了一下而已。）

現在，我們要來根據同一例題（即**內容完全不變**，仍以〔280a〕圖為根據）展成所求之等式 $x=\varphi(y)$了。於此，我們要問：

如果 y 是等于 $\sin x$（弳），怎樣才能把 x 表示為 y 之函數呢？

這個問題請各位自己去試行解答！除了一般等式 $y=\sin x$（弳）之外，各位只要也對那個有所指的，在〔280a〕圖中令人一目了然的等式 $0.5=\sin\frac{\pi}{6}$（弳）加以注意，而將該二式排列在一起的話，便已思過半矣：

$$y = \sin x \text{（弳）}$$

$$0.5 = \sin\frac{\pi}{6} \text{（弳）}$$

各位諒必已經發現：$x=\frac{\pi}{6}$乃是一個用單位"弳"來量的角之量度數，而此角之正弦（即y）乃等於0.5。可惜人們對此絲毫不算新奇亦不深奧的情形，却選用了一種容易引起誤解的表示方法：

$x = arc \sin y$，就本節所舉之例而言：$\frac{\pi}{6} = arc \sin 0.5$

讀如：x 等於一弧，其正弦爲 y；$\frac{\pi}{6}$等於一弧，其正弦爲 0.5；參閱第十四册中之〔62〕節！

請各位注意，位于以上二式**左右兩邊**的均爲角的量度數。（至於 $x=\frac{\pi}{6}$ 是角的量度數，上面已經提到過，各位早就知道了；但同式右邊之 $arc \sin y$ 也應該代表角的量度數，則不難由等號總是表示相等這一點推而知之。）

假如 $x = arc \sin y$ 是一個定數方程式的話，則正弦值 y 照例爲已知數，好比 $y=0.5$；而角的量度數 x 則爲所求之未知數。

現在，我們再就一般情形將 $x = arc \sin y$ 這個等式的意義複述於下：

x 是一個用弧度來量的角之量度數，
而此角的正弦乃等於 y。

此一解釋是如此重要，各位務須把它牢牢記住！各位有時會聽到另外一種解釋，即：在 $x = arc \sin y$ 這個等式內，x 是代表其正弦等於 y 之角。嚴格說來，似此說法是不對的，因爲 x 根本不是一個角，而只是一個角的量度數而已。

尤其各位只要一望〔230a〕圖的圖解（在此圖解中可以根據單位圓及正弦曲線直接把 $y = \sin x$（弳）及 $x = arc \sin y$ 讀出來的），便能看出，此二等式之內容實係完全相同；因此，我們遂可將

結果寫成：

$$a) \quad \boxed{\{y=\sin x(\text{徑})\}\wedge\{x=\operatorname{arc}\sin y\}}$$

在此公式內，下列兩種可以互相約去的對立情形顯示的非常清楚。第一：字母 y和x 並非位于公式的同一邊。第二：在第一等式內所求者爲一個角的正弦值，在第二等式內所求者爲一個已知其正弦的角之大小。

假如我們把 $x=arc \ \ sin\,y$ 當作一個簡單句子看待，然後再從文法上加以分析，或者更能使各位對此等式內容增加了解。好比這一單句（亦即等式 $x=arc\ sin\ y$）的主語是x，動詞包括於等號之內，而 ***arcus*** 則是述語的一部分；所以其主要結構應爲“$x=arc$”，把它用文字來表達便是：x 乃代表弧的量度數（由於一個角的大小亦決定於弧的量度數，所以x 同時也代表角的量度數）。現在再說明句子後面的一部分“$sin\ y$”，在文法上說來，它乃是這個句子組織當中的“附加語”；但並不附加於***arcus***這個字，而是附加於在此句中未有明白說出的“角”這個字。這一附加語如利用副句把它表達出來便爲：“其正弦等於 y”。但我們爲求簡便計，常以“$sin\ y$”來代替上述副句，並將“角”之一字略去，致使意義有時很難令人捉摸。

再者，在$x=arc\ sin\ y$這個等式中 ***sinus***與 y 之間，在文法上（亦即在邏輯方面）之聯繫，完全不同於等式$y=sin\ x$（徑）中 ***sinus*** 與 x 之間的聯繫，因此使我們對於“$x=arc\ sin\ y$”這個句子之意義的了解，格外增加了不少的困難。在等式 $y=sin\ x$（徑）中，所謂 $sin\ x$乃指“x（徑）角的正弦”而言，故 x（徑）在文法上是屬於第二格，乃是一種稱爲所有格的附加語。但就等式 $x=arc\ sin\ y$ 而論，y 並不是剛才所說的一種附加語，而是代表附加於 ***sinus*** 之同位語，亦即表明正弦之名稱或正弦值的同格語，所以 $sin\ y$ 在此並不代表“y 角的正弦”。簡而言之，在“$y=sin\ x$（徑）”式內，x是代表一個角；在“$x=arc\ sin\ y$”式內，位於 sin 後面的y所代表的乃是正弦本身。因此，在y 之後是不容許寫上單位（徑）這一字樣的。

只要各位留心〔280a〕圖所示之圖解法，那末，各位對於上述的錯綜關係必能領悟；並且對於由“$x=arc\ sin\ y$”這種省略符號可能引起之疑惑，也就不難加以克服了。

與此十分類似之剖析，請看第五冊中之〔441〕節！

討論至此，各位無需我們幫忙，便可向前邁進一步了：

(β) $\{y=\cos x(\text{弳})\} \wedge \{x=arc\ \cos y\}$
(γ) $\{y=tg\,x(\text{弳})\} \wedge \{x=arc\ tg\ y\}$
(δ) $\{y=ctg\ x(\text{弳})\} \wedge \{x=arc\ ctg\ y\}$

習　題：1）　上列三式之意義爲何？

2）　再請各位根據單位圓以及三角函數曲線，對於這些彼此對應的情形弄個一清二楚！

請各位僅就單位圓的第一象限（卽在 $x=0$ 至 $x=\frac{\pi}{2}$ 之範圍內）求下列各定數方程式之 x！

3）　$x=arc\ \sin 1$；　　4）　$x=arc\ \cos 1$；

5）　$x=arc\,tg\ 1$；　　6）　$x=arc\ ctg\ 1$；

7）　$x=arc\ \cos 0.5$；　　8）　$x=arc\,tg\ 0$

本節所研究之 y 函數及其所屬（卽與其對應）之 x 函數，其內容雖屬等值的，而只不過在發問的形式方面顯的有所不同，但人們給予此二函數的**名稱**究竟是有分別的。函數 $y=\sin\ x$（弳），$y=\cos\ x$（弳），$y=tg\,x$（弳）及 $y=ctg\ x$（弳）都叫做**三角函數**，這一點各位早就知道了。至於與其對應之函數，如 $x=arc\ \sin\ y$ 等等，則稱爲

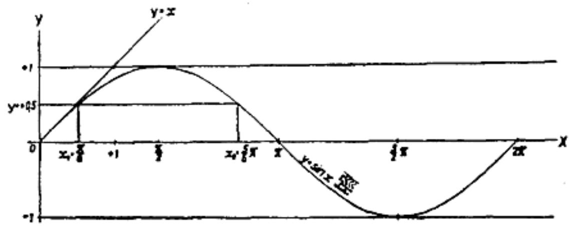
圓函數 (*arcus-Funktion*) 或**輪換函數** (*zyklometrische Funktion*)

就圖示而言，在三角函數中我們是要使線段比例相等；但在圓函數中我們却要使圓弧或圓心角之量度數相等。“輪換”一詞在德文爲 *zyklometrisch*，與圓的量度有關；參閱第十五册〔103〕節所講之循環代換 (*zyklische Vertauschung*)一詞！

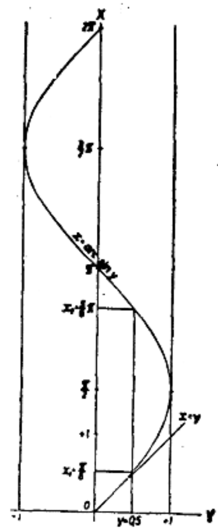
281 對應函數之圖解

$y=\sin\ x$（弳）及 $x=arc\ \sin\ y$ 這兩個對應函數可在〔280a〕圖中同時被人讀出，這是上文已經講到過的。但我們也要把對應函數的第二種圖示法從頭到底拿來說明一下，這種圖示法我們在〔279〕節中已經學習過了：

如上所述，我們將複寫紙放在繪圖紙下面之後，便可在$x=0$



281 a



281 b

與 $x=2\pi$之間，好比將正弦曲線 $y=sin\ x$（弳）描繪出來。用此方法，我們可依$y=x$這個軸將〔281a〕圖作 180° 之翻轉後，求得與正弦曲線$y=sin\ x$（弳）相應而對稱之曲線 $x=arc\ sin\ y$。在〔281a〕及〔281b〕二圖中，我們曾將 y 值($+0.5$)特別表明出來，它一方面是屬於三角等式 $y=sin\ x_1$(弳) $=sin\frac{\pi}{6}$（弳），另方面是屬於輪換等式$\frac{\pi}{6}=arc\ sin\ y=arc\ sin\ 0.5$的。

（各位未能由上述圖解讀出此二等式乃屬理所當然之前，不要向前多移半步！以上二圖都是以X軸代表角的量度數，以Y軸代表正弦值的。）

於此，各位也許已經看出，在〔281a〕圖中只有**一個**正弦值（即 $y=+0.5$）是屬於已知角 $x=\frac{\pi}{6}$（弳）的。可是爲 $y=+0.5$ 所屬者，不僅是角之量度數 $x_1=\frac{\pi}{6}$，而且還有$x_2=\frac{5\pi}{6}$；不但此也，我們如果將正弦曲線 $y=sin\ x$(弳)及其鏡影 $x=arc\ sin\ y$

任意加以延長的話，那末，屬於 $y=+0.5$ 的 x 值甚至可以達到無窮多之程度。參看第十五册中之〔80a〕圖！

結果：在三角函數 $y=\sin x$（逕）之中，屬于一個已知角或所求之角 x 者，只有一個正弦值y；可是在輪換函數 $x=\operatorname{arc}\sin y$ 之中，却有無窮多的角 (x) 係爲一個已知的或所求的正弦值 (y) 所屬有。這是三角函數與輪換函數之間的一個重要區別，我們在這裡算是認識清楚了。

爲了避免討論對象失之過于廣泛起見，以下各節中只擬考慮 $x=0$（逕）和$x=\frac{\pi}{2}$（逕）之間的這一範圍，假如所涉及者是正角的話；或只考慮 $x=-\frac{\pi}{2}$（逕）與 $x=+\frac{\pi}{2}$（逕）之間的這一範圍，假如所涉及者，除了正角以外還包括負角的話。

習　題：1）試在 $x=-\frac{\pi}{2}$（逕）與 $x=+\frac{\pi}{2}$（逕）之間，畫一正弦曲線以及與其對應之 $x=\operatorname{arc}\sin y$曲線！請各位特別註明 $y=-0.5$之位置！作一略圖就够了。

2）試將其他三角函數 $y=\cos x$（逕），$y=\operatorname{tg} x$（逕）及$y=\operatorname{ctg} x$（逕）所屬之輪換函數，亦用圖解法表示出來！（畫略圖就行。）

282 c) **對應函數之微分係數**

現在，我們要來對兩個對應函數 $y=f(x)$及 $x=\varphi(y)$進行微分（前者就 x，後者就 y），並將求得之微分係數互作比較了。玆設仍以〔279a〕圖及〔279c〕圖所示之二對應函數爲已知：

$$\{y=2x\}\wedge\{x=\frac{1}{2}y\}\text{；一般寫成：}$$

$$\{y=f(x)\}\wedge\{x=\varphi(y)\}$$

如欲對於等式 $x=\varphi(y)=\frac{1}{2}y$ 就 y 加以微分，各位也許會提出異議來說：這種微分我們還沒有學習過呀！的確，到目前爲止，在大多數情形之下，我們爲函數 $y=f(x)$所構成的微分係數

均只限于 $y'=f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$；也就是說，我們只**就x對y進行過微分工作**。但有的時候我們也採用過其他不同於 y 及 x 之符號，例如在第十四册〔61〕節中所計算的即爲函數　$F=f(a)$ 之微分係數：$F'=f'(a)=\dfrac{dF}{da}$。那裡的自變數並不是x，而是a；因變數亦非 y，而是 F；所以我們是**就 a 來對 F 進行微分的**。雖然如此，但我們倘不以 F 却以 x 來代替 y，也不以 a 却以 y 來代替 x，〔意即倘就 y 來微分函數 $x=\varphi(y)$〕也是不會有任何新奇方法產生出來的：

例如由　$y=f(x)=\dfrac{x}{2}$ 既可求得微分係數 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{1}{2}$，亦可由　$x=\varphi(y)=\dfrac{y}{2}$ 求得微分係數 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d\varphi(y)}{dy}=\dfrac{1}{2}$；

或由　$y=f(x)=x^2+4$ 既可求得微分係數 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{df(x)}{dx}=2x$，亦可由　$x=\varphi(y)=y^2+4$ 求得微分係數 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d\varphi(y)}{dy}=2y$，是其明證。

在這些情形之下，其關鍵只在名稱之變換而已。但我們在字母右上角加書一撇〔如 $f'(x)$；y'〕作爲微分係數的記號時，必須加以小心才行，蓋就 y 進行微分時，是不需要加書此一撇的。因此，當我們在這種聯帶關係中就 y 對 x 進行微分之時，是用 $\dfrac{dx}{dy}$，而不用 x' 來表示 x 之微分係數的。

在我們按照上述思想路線繼續討論下去之前，讓我們舉幾個例題來就 y 進行微分，以資練習：

習　題：　試就 y 微分下列各函數：

1) $x=3y+4$；　2) $x=y^3$；　3) $x=3y^3+4y^5$；

4) $x=\sqrt{y}$；　5) $x=\sqrt[3]{0.5y}$；6) $x=ay+b$；

7) $x=\dfrac{y}{b}-a^2$；　8) $x=m\cdot y^n$

現在，我們要回過頭來討論上面提到過的兩個對應函數了：

$$\{y=2x\}\wedge\{x=\frac{1}{2}y\}$$

先就 x 微分左邊的第一函數，然後再就 y 微分右邊的第二函數，乃得：

$$\frac{dy}{dx}=2\,; \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}$$

各位很快就可發現：假如我們微分這兩個函數，即就 x 微分 $y=2x$，又就 y 微分其對應函數 $x=\frac{1}{2}y$，則所求得之微分係數亦必成為彼此對應之函數：

$$\left\{\frac{dy}{dx}=2\right\}\wedge\left\{\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}\right\}$$

但在我們同意各位的“發現”，並且進而同意各位將其一般化之前，尚有值得考慮之一點，不得不提出來說明一下：這裡有兩個彼此對應而表達同一內容之二等式，各位一定是如此去“證明”的，即對該二等式中之每一式例如先求得 $dy=2\cdot dx$（或先求得 $dx=\frac{dy}{2}$）；但如此做法是違反我們在第十四册〔59〕節中所提之警告的，因為在這種情形下，各位是將 $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{dx}{dy}$ 分解為 dy 及 dx 二成分了，就如同它們是一個分數之分子和分母似的。實則 $\frac{dx}{dy}$ 和 $\frac{dy}{dx}$ 顯然不是一個商數，却是商的極限值！有了此一說明，上面所謂值得考慮之點很快就可被排除掉了；蓋對增量比而言，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$ 這種寫法毫無疑問是適用的。換言之：這兩個與同一計算內容有關的商數 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 及 $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ 乃是第二册〔190〕節所講之倒數；亦即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y}=1$。這一結論，當我們進而求此倒數之極限值，並且注意到 Δy 也會跟着 Δx 趨近於0之時，亦屬有效的。簡而言之：