

结构力学

下册

华东水利学院结构力学教研组编



水利电力出版社

结 构 力 学

下 册

华东水利学院结构力学教研组编

水利电力出版社

内 容 提 要

本书为高等工科院校力学专业教材，也可作工科土建、水利类专业多学时类型结构力学课程的试用教材或教学参考书，还可供工程技术人员参考。

本书上册分为十二章，内容包括：绪论、杆件体系的几何组成分析、静定结构的内力计算、虚功原理与结构位移的计算、超静定结构的一般概念、力法、位移法、力矩分配法、超静定拱、弹性支座连续梁、影响线及其应用、结构极限荷载的计算等。

下册分为六章，内容包括：能量原理、矩阵位移法、基础梁、结构的动力计算、结构的稳定计算，以及结构型式、计算简图和计算方法的讨论。各章末附有思考题与习题。书末并附有若干计算用表和部分习题答案。

结 构 力 学

下 册

华东水利学院结构力学教研组编

*

水利电力出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 20.25印张 461千字

1983年6月第一版 1983年6月北京第一次印刷

印数00001—14130册 定价2.10元

书号15143·5117

目 录

第十三章 能 量 原 理

§ 13-1	概述	1
§ 13-2	应变能与应变余能	1
§ 13-3	结构的势能和余能	9
§ 13-4	势能驻值原理、最小势能原理与卡氏第一定理	13
§ 13-5	余能驻值原理、最小余能原理与卡氏第二定理	19
§ 13-6	混合能量原理	24
§ 13-7	瑞利-李兹法	27

第十四章 矩 阵 位 移 法

§ 14-1	概述	36
§ 14-2	单元的劲度矩阵	36
§ 14-3	结点平衡方程与结构整体劲度矩阵	45
§ 14-4	结构矩阵分析举例	52
§ 14-5	缩减未知量的方法	61
§ 14-6	子结构法	64

第十五章 基 础 梁

§ 15-1	计算假设	72
§ 15-2	连杆法的原理	75
§ 15-3	地基的沉陷和悬臂梁的挠度	78
§ 15-4	用连杆法解平面问题	81
§ 15-5	用连杆法解空间问题	85
§ 15-6	文克勒假设下用连杆法计算基础梁	86
§ 15-7	边荷载、邻近梁和变温的影响	87
§ 15-8	对称梁的简化计算	89
§ 15-9	基础梁的基本方程及其解	95
§ 15-10	中厚度土层上的基础梁	104
§ 15-11	基础梁计算理论和计算方法的若干讨论	107

第十六章 结构的动力计算

§ 16-1	结构动力计算的基本概念	112
--------	-------------------	-----

§ 16-2	单自由度体系振动的基础知识	115
§ 16-3	关于阻尼的补充知识	124
§ 16-4	单自由度体系受一般荷载的反应	129
§ 16-5	多自由度体系的自由振动	136
§ 16-6	主振型的正交性、主坐标与正则坐标	144
§ 16-7	多自由度体系的受迫振动	150
§ 16-8	无限自由度体系的自由振动	160
§ 16-9	无限自由度体系的受迫振动	167
§ 16-10	用迭代法求自振频率和振型	178
§ 16-11	用能量法计算自振频率	185
§ 16-12	子空间迭代法求频率和振型	191
§ 16-13	非线性动力计算的逐步积分法	197
§ 16-14	地震荷载的计算	201

第十七章 结构的稳定计算

§ 17-1	结构稳定计算的基本概念	212
§ 17-2	确定临界荷载的静力法和能量法	214
§ 17-3	具有弹性约束端直杆的稳定	218
§ 17-4	弹性介质中压杆的稳定	221
§ 17-5	剪力对临界荷载的影响	223
§ 17-6	压杆大挠度的计算	227
§ 17-7	矩阵位移法计算刚架稳定	230
§ 17-8	圆环和圆拱的稳定	238
§ 17-9	窄条梁平面弯曲形式的稳定	247

第十八章 结构型式、计算简图和计算方法的讨论

§ 18-1	结构型式的选择	254
§ 18-2	计算简图的讨论	255
§ 18-3	计算方法的回顾和讨论	263
§ 18-4	结构力学与结构设计研究的几个新问题	269
附录一	基础梁计算表	275
	第一部分 梁上受荷载作用的基础梁计算表(郭氏表)	275
	第二部分 边荷载作用下基础梁计算表	296
	第三部分 文克勒假设下基础梁计算表	306
附录二	克雷洛夫函数数值表	314
附录三	各章部分习题答案	316

第十三章 能量原理

§ 13-1 概 述

在上册的结构分析中,介绍了静力法和能量法两类解法。静力法根据力的平衡和位移谐调两个基本条件来求解结构的内力和位移。通过下面的讨论,将会看出,能量法是用虚功原理导出的能量原理来求解结构的内力和位移。

在虚功原理中曾指出,虚位移原理与结构的平衡条件等价,虚力原理与结构的位移条件等价。由此可见,能量法与静力法是相互呼应的两个基本解法。

对于弹性体、板和壳等较复杂的结构,当用静力法求解有困难时,采用能量法来求其近似解往往是有效的。本书的后面,在做结构稳定计算求临界荷载和动力计算求自振频率时都用到了能量法。

能量原理有势能驻值原理、最小势能原理、余能驻值原理最小余能原理和混合能量原理等,它们分别与静力法中的位移法、力法和混合法相对应。这些能量原理都可从虚功原理导出。

§ 13-2 应变能与应变余能

一、应变能

设变形体在受到外力作用过程中没有能量损失,则外力所做的功将全部转化为储存于变形体内的**应变能**。在材料力学中我们就知道应变能可以用外力做的功来度量,也可以由内力来计算。

设有长度为 ds ,横截面面积为 dA 的单向受力微段(图13-1a),其材料的应力应变关系如图13-1(b)所示,力 σdA 经过变形位移 $d\epsilon ds$ 做的功为

$$(\sigma dA)(d\epsilon ds) = \sigma d\epsilon dv$$

其中 dv 是微段的体积。在应力从零增加到 σ_0 和相应的应变从零增加到 ϵ_0 的过程中,微段的应变能为

$$dU = \left(\int_0^{\epsilon_0} \sigma d\epsilon \right) dv \quad (13-1)$$

括号内的积分表示单位体积的应变能,称为**应变能密度**,它等于应力应变曲线与横坐标轴之间的面积,如图13-1(b)中的阴影所示。如令 u 表示应变能密度,则

$$u = \frac{dU}{dv} = \int_0^{\epsilon_0} \sigma d\epsilon \quad (13-2)$$

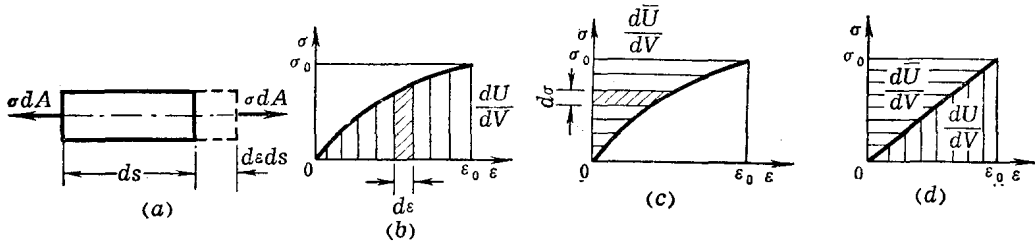


图 13-1

由应变能密度可以求得整个体积的应变能，即

$$U = \int_V u dv = \int_V \left[\int_0^{\epsilon_0} \sigma d\epsilon \right] dv \quad (13-3)$$

根据上述应变能的概念，可以得出线性弹性和非线性弹性杆在各种基本变形状态下的应变能计算式如下：

(1) 线弹性等截面直杆的应变能 因截面 A 为常量， $\sigma = E\epsilon$ 从式 (13-3) 可得拉伸或压缩应变能：

$$U = \int_s \frac{EA}{2} \epsilon^2 ds = \frac{EA}{2l} \Delta l^2 = \frac{1}{2} P \Delta l \quad (a)$$

式中 P —— 杆件两端截面上的外力；

Δl —— 杆件的伸长或缩短， $\Delta l = \epsilon l = Pl/(EA)$ ；

EA —— 截面抗拉（压）刚度；

l —— 杆长。

式 (a) 第二个等号右边各式表示轴力为常数时的应变能。

因 $\sigma = E\epsilon$ ， $\epsilon = \frac{y}{\rho}$ ， $I = \int_A y^2 dA$ ，从式 (13-3) 得弯曲应变能：

$$U = \int_s \frac{EI}{2} \left(\frac{1}{\rho} \right)^2 ds = \frac{EI}{2l} \theta^2 = \frac{1}{2} M \theta \quad (b)$$

式中 M —— 杆件两端截面上的弯矩；

θ —— 杆端截面的相对转角， $\theta = \frac{1}{\rho} l = \frac{Ml}{EI}$ ；

EI —— 截面的抗弯刚度；

$\frac{1}{\rho}$ —— 弯曲曲率；

y —— 离开截面中性层的距离。

式 (b) 第二个等号右边各式表示弯矩为常数时的应变能。

因 $\tau = G\gamma$ ， $\tau = \frac{Qs}{bI}$ ， $\gamma = \frac{1}{G} \frac{Qs}{bI}$ ， $\gamma_0 = \lambda \frac{Q}{GA}$ ，从式 (13-3) 得剪切应变能：

$$U = \int_s \frac{GA}{2\lambda} \gamma_0^2 ds = \frac{GA}{2\lambda} l \gamma_0^2 = \frac{GA}{2\lambda l} \Delta^2 = \frac{1}{2} Q \Delta \quad (c)$$

式中 Q —— 杆件两端截面的剪力;

Δ —— 杆件两端截面的相对滑移, $\Delta = \gamma_0 l$;

γ_0 —— 平均剪应变;

$\frac{GA}{\lambda}$ —— 截面抗剪刚度;

λ —— 与截面剪应力分布有关的截面修正系数, $\lambda = \frac{A}{I^2} \int_A (s^2/b^2) dA$

式 (c) 用来计算弯曲杆的剪切应变能。式中第二个等号右边各式表示剪力为常数时的应变能。

因 $\tau = G\gamma$, $\gamma = \frac{z}{\rho_t}$, $I_J = \int z^2 dA$, 从式 (13-3) 得圆轴扭转应变能:

$$U = \int_s \frac{GI_J}{2} \left(\frac{1}{\rho_t} \right)^2 ds = \frac{GI_J}{2l} \varphi^2 = \frac{1}{2} T\varphi \quad (d)$$

式中 T —— 杆件两端截面的扭矩;

φ —— 杆件两端截面的相对扭转角, $\varphi = \frac{1}{\rho_t} l = \frac{Tl}{GI_J}$;

GI_J —— 圆截面的抗扭刚度;

$\frac{1}{\rho_t}$ —— 扭曲曲率;

z —— 离开截面形心点的距离。

(2) 非线性弹性等截面直杆的应变能 非线性弹性材料的应力和应变不服从虎克定律, 但从式 (13-3) 可得各种基本变形状态下等截面直杆的应变能。

因 $\int_A \sigma dA = N$, 从式 (13-3) 得拉伸或压缩应变能:

$$U = \int_v u dv = \int_v \left[\int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \right] dv = \int_s \left[\int_0^{\varepsilon} N d\varepsilon \right] ds \quad (e)$$

因 $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$, $\int_A \sigma y dA = M$, 从式 (13-3) 得

弯曲应变能:

$$U = \int_v u dv = \int_s \int_A \left[\int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \right] dA ds = \int_s M d \left(\frac{1}{\rho} \right) ds \quad (f)$$

二、应变余能

与应变能相对偶的一个能量称为应变余能, 或称应力能, 用 \bar{U} 表示。单位体积的应变余能称为应变余能密度, 用 \bar{u} 表示。仿照应变能密度的定义, 将应变余能密度定义为

$$\bar{u} = \frac{d\bar{U}}{dv} = \int_0^{\sigma} \varepsilon d\sigma \quad (13-4)$$

它代表图13-1(c)应力应变曲线与纵坐标轴之间所示阴影的面积。由图13-1(b)和(c)可知面积 \bar{u} 恰好与面积 u 合成面积 $\sigma_0 \varepsilon_0$, 即

$$u + \bar{u} = \sigma_0 \varepsilon_0 \quad (13-5)$$

可见 \bar{u} 是面积 $\sigma_0 \varepsilon_0$ 去掉 u 剩下的余数, 故定义为应变余能密度。

由 \bar{u} 可求出整个体积的应变余能

$$\bar{U} = \int_v \bar{u} dv = \int_v \left[\int_0^{\sigma_0} \varepsilon d\sigma \right] dv \quad (13-6)$$

(1) 线性弹性等截面直杆的应变余能 由图13-1(d)可知线性弹性体的应变余能等于应变能, 故由应变能可得线性弹性体的应变余能。

因 $\varepsilon = \frac{N}{EA}$, $N = P$, 从式(13-6)得

拉伸或压缩应变余能:

$$\bar{U} = U = \int_s \frac{EA}{2} \varepsilon^2 ds = \int_s \frac{1}{2EA} N^2 ds = \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{1}{2} P \Delta l \quad (g)$$

因 $\int_A y^2 dA = I$, $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$, 及 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$, 从式(13-6)得

弯曲应变余能:

$$\bar{U} = U = \int_s \frac{EI}{2} \left(\frac{1}{\rho} \right)^2 ds = \int_s \frac{1}{2EI} M^2 ds = \frac{M^2 l}{2EI} = \frac{1}{2} M \theta \quad (h)$$

(2) 非线性弹性等截面直杆的应变余能 因 $\int \sigma dA = N$, 从式(13-6)得

拉伸或压缩应变余能:

$$\bar{U} = \int_v \bar{u} dv = \iiint_{s,A} \left[\int_0^{\sigma_0} \varepsilon d\sigma \right] dA ds = \iint_s \left[\int_0^N \varepsilon dN \right] ds \quad (i)$$

因 $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$, $\int_A \sigma y dA = M$, 从式(13-6)得

弯曲应变余能:

$$\bar{U} = \int_v \bar{u} dv = \iiint_{s,A} \left[\int_0^{\sigma_0} \varepsilon d\sigma \right] dA ds = \iint_s \left[\int_0^M \frac{1}{\rho} dM \right] ds \quad (j)$$

三、例题计算

例 13-1 图13-2所示桁架在荷载 $P_1 = P_2 = P$ 作用下的实际位置处于平衡, 试计算在平衡位置的应变能和应变余能。已知各杆的 EA 相同, $l_1 = 2\sqrt{3}l/3$, $l_2 = \sqrt{2}l$, 并设: ①材料为线性弹性, $\sigma = E\varepsilon$, $N = EA\Delta l/l$, $\Delta l = \varepsilon l$; ②材料为非线性弹性, $\sigma = B\sqrt{|\varepsilon|}$, $N = BA\sqrt{|\varepsilon|} = BA\sqrt{|\Delta l|}/\sqrt{l}$, $\Delta l = \varepsilon l$ 。

解: 1. 计算各杆轴力

取结点A作示力图, 由平衡条件得

$$N_1 = 1.4641P, \quad N_2 = -0.3789P$$

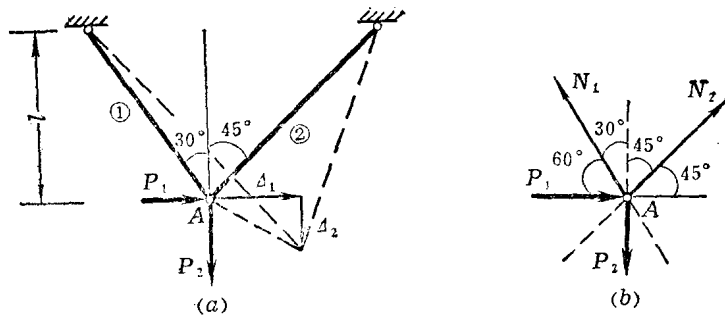


图 13-2

2. 计算各杆的变形和结点位移

对于线性弹性情况:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} = 1.6906 \frac{Pl}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA} = -0.5358 \frac{Pl}{EA}$$

再按一般结构位移计算方法求得结点位移为

$$\Delta_1 = 0.9603 \frac{Pl}{EA}, \quad \Delta_2 = 1.7181 \frac{Pl}{EA}$$

非线性弹性情况: 因 $\varepsilon_1 = \frac{N_1^2}{B^2 A^2}$, $\varepsilon_2 = \frac{N_2^2}{B^2 A^2}$, 故

$$\Delta l_1 = \varepsilon_1 l_1 = \frac{N_1^2 l_1}{B^2 A^2} = 2.4752 \frac{P^2 l}{B^2 A^2}$$

$$\Delta l_2 = \varepsilon_2 l_2 = \frac{N_2^2 l_2}{B^2 A^2} = 0.2030 \frac{P^2 l}{B^2 A^2}$$

再按这里的非线性假设情况, 由位移计算公式 $\Delta_{k,p} = \frac{\sum N_k N_p l}{B^2 A^2}$ 求得结点位移为

$$\Delta_1 = 1.6301 \frac{P^2 l}{B^2 A^2}, \quad \Delta_2 = 1.9172 \frac{P^2 l}{B^2 A^2}$$

3. 计算结构的应变能与应变余能

线性弹性情况的应变能与应变余能相等, 由式 (a) 得

$$U = \bar{U} = \sum_{i=1}^2 \frac{EA_i}{2l_i} \Delta l_i^2 = \frac{EA}{2l_1} \Delta l_1^2 + \frac{EA}{2l_2} \Delta l_2^2 = 1.3391 \frac{P^2 l}{EA}$$

或由式 (g) 得

$$U = \bar{U} = \sum_{i=1}^2 \frac{N_i^2 l_i}{2EA_i} = \frac{N_1^2 l_1}{2EA} + \frac{N_2^2 l_2}{2EA} = 1.3391 \frac{P^2 l}{EA}$$

或由结点位移得

$$U = \bar{U} = \frac{1}{2} P_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \Delta_2 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} P = 1.3392 \frac{P^2 l}{EA}$$

略去微小的计算误差则所得的结果是相同的。

非线性弹性情况的应变能由式 (e) 计算

$$U = \sum \int_0^l \left[\int_0^{\varepsilon} N d\varepsilon \right] ds = \int_0^{l_1} \left[\int_0^{\varepsilon_1} N_1 d\varepsilon_1 \right] ds + \int_0^{l_2} \left[\int_0^{\varepsilon_2} N_2 d\varepsilon_2 \right] ds$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{l_1} \left[\int_0^{\varepsilon_1} BA\varepsilon_1^{\frac{1}{2}} d\varepsilon_1 \right] ds + \int_0^{l_2} \left[\int_0^{\varepsilon_2} BA\varepsilon_2^{\frac{1}{2}} d\varepsilon_2 \right] ds = \frac{2}{3} BAl_1\varepsilon_1^{\frac{3}{2}} \\
 &+ \frac{2}{3} BAl_2\varepsilon_2^{\frac{3}{2}} = \frac{2l_1}{3B^2A^2} N_1^3 + \frac{2l_2}{3B^2A^2} N_2^3 = 2.3646 \frac{P^3l}{B^2A^2}
 \end{aligned}$$

我们还可以用荷载作功来计算应变能, 此时

$$d\Delta_1 = \frac{1.6301}{B^2A^2} 2PdP, \quad d\Delta_2 = \frac{1.9172}{B^2A^2} 2PdP$$

于是

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^{\Delta_1} P_1 d\Delta_1 + \int_0^{\Delta_2} P_2 d\Delta_2 = \frac{2 \times 1.6301}{B^2A^2} \int_0^P P^2 dP + \frac{2 \times 1.9172}{B^2A^2} \int_0^P P^2 dP \\
 &= \frac{2(1.6301 + 1.9172)}{3B^2A^2} P^3l = \frac{2.3649}{B^2A^2} P^3l
 \end{aligned}$$

应变余能由式 (i) 计算

$$\begin{aligned}
 \bar{U} &= \sum \int_s^N \left[\int_0^{\varepsilon} \varepsilon dN \right] ds = \int_0^{l_1} \left[\int_0^{N_1} \varepsilon_1 dN_1 \right] ds + \int_0^{l_2} \left[\int_0^{N_2} \varepsilon_2 dN_2 \right] ds \\
 &= \int_0^{l_1} \left[\int_0^{N_1} \frac{N_1^2}{B^2A^2} dN_1 \right] ds + \int_0^{l_2} \left[\int_0^{N_2} \frac{N_2^2}{B^2A^2} dN_2 \right] ds \\
 &= \frac{l_1}{3B^2A^2} N_1^3 + \frac{l_2}{3B^2A^2} N_2^3 = \frac{1.1823}{B^2A^2} P^3l
 \end{aligned}$$

上述计算结果看出: 在线性弹性情况下, 应变能与应变余能相等。它们可由变形来计算, 可由内力来计算, 也可由外荷载作功来计算, 其结果都是一样, 且都是荷载 P 的二次式; 在非线弹性且 $\sigma = B\sqrt{|\varepsilon|}$ 的条件下, 应变能是应变余能的两倍, 它们可由变形或内力来计算, 也可由外荷载作功来计算, 其结果都是一样, 且都是荷载 P 的三次式。由式 (13-5) 可得关系式

$$\begin{aligned}
 U + \bar{U} = \sum(\sigma A)(\varepsilon l) = \sum N \Delta l &= \frac{\sum N^2 l_i}{EA} \quad (\text{线性弹性}) \\
 &= \frac{\sum N^2 l_i}{B^2 A^2} \quad (\text{非线性弹性})
 \end{aligned}$$

这就为我们提供一个校核条件。

例 13-2 求图13-3所示矩形等截面悬臂刚架在荷载 P 作用下实际平衡位置的应变能和应变余能。设①材料为线性弹性, 已知 $\sigma = E\varepsilon$, $G = \frac{3}{8}E$, $\lambda = \frac{6}{5}$, $\frac{I}{A} = \frac{h^2}{12}$; ②材料为非线性弹性, 已知 $\sigma = B\sqrt[3]{\varepsilon}$ 。计算中只考虑弯矩项的影响。

解: 1. 列出各杆的内力方程

CB杆: $N_1 = 0$, $Q = P$, $M_1 = Px$; BA杆: $N_2 =$

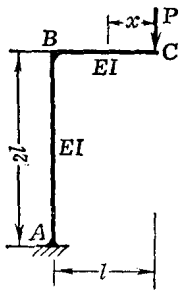


图 13-3

$$-P, Q_2 = 0, M_2 = Pl$$

2. 计算结构的应变能和应变余能

线性弹性情况下, $\lambda = \frac{6}{5}, G = \frac{3}{8}E, \frac{I}{A} = \frac{h^2}{12}$, 由式 (a) (b) (c) 得

$$\begin{aligned} U = \bar{U} &= \Sigma \left[\int_0^l \frac{N^2}{2EA} ds + \int_0^l \frac{\lambda Q^2}{2GA} ds + \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \right] \\ &= 0 + \int_0^l \frac{\lambda P^2}{2GA} dx + \int_0^l \frac{P^2}{2EI} x^2 dx + \int_0^l \frac{P^2}{2EA} dx \\ &\quad + 0 + \int_0^l \frac{P^2 l^2}{2EI} dx = \frac{\lambda P^2 l}{2GA} + \frac{P^2 l^3}{6EI} + \frac{P^2 l}{EA} + \frac{P^2 l^3}{EI} \\ &= \frac{.8P^2 l}{5EA} + \frac{P^2 l}{EA} + \frac{7P^2 l^3}{6EI} \\ &= \frac{P^2 l^3}{EI} \left[\frac{1.6}{12} \left(\frac{h}{l} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{l} \right)^2 + \frac{7}{6} \right] \end{aligned}$$

上式右边方括号内第一项为剪切变形的影响, 第二项为轴向变形的影响, 第三项为弯曲变形的影响。当 $h/l = 1/15 \sim 1/10$ 时, 剪切变形是弯曲变形的 0.76~1.14%, 而轴向变形是弯曲变形的 0.48~0.71%。故在一般情况下只考虑弯曲变形的影响是足够精确的。

非线性弹性情况下分别由式 (f) 和式 (j) 得

$$U = \Sigma \int_0^l \left[\int_0^{\frac{1}{\rho}} M d \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] ds, \quad \bar{U} = \Sigma \int_0^l \left[\int_0^M \frac{1}{\rho} dM \right] ds$$

已知 $\sigma = B\sqrt[3]{\varepsilon}$, $\varepsilon = y/\rho$, 则应力 $\sigma = B\sqrt[3]{y/\rho}$, 截面弯矩

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma y b dy = Bb\sqrt[3]{1/\rho} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^{\frac{4}{3}} dy = \frac{3Bb}{14\sqrt[3]{2}} h^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{1/\rho}$$

从而得曲率

$$\frac{1}{\rho} = \frac{14^3 \times 2}{3^3 B^3 b^3 h^7} M^3$$

于是, 结构的应变能为

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \left[\int_0^{\frac{1}{\rho}} M_1 d \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] ds + \int_0^l \left[\int_0^{\frac{1}{\rho}} M_2 d \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] ds \\ &= \int_0^l \left[\int_0^{\frac{1}{\rho}} \frac{3}{14\sqrt[3]{2}} Bbh \frac{7}{3} \left(\frac{1}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} d \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] dx \\ &\quad + \int_0^l \left[\int_0^{\frac{1}{\rho}} \frac{3}{14\sqrt[3]{2}} Bbh^{\frac{7}{3}} \left(\frac{1}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} d \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] dx \end{aligned}$$

$$= \frac{152.25}{B^3 b^3 h^7} \left[\int_0^l M_1^4 dx + \int_0^{2l} M_2^4 dx \right] = 335.1 \frac{P^4 l^5}{B^3 b^3 h^7}$$

应变余能为

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \int_0^l \left[\int_0^{M_1} \frac{1}{\rho} dM \right] ds + \int_0^{2l} \left[\int_0^{M_2} \frac{1}{\rho} dM \right] ds \\ &= \int_0^l \left[\int_0^{M_1} \frac{14^3 \times 2}{3^3 B^3 b^3 h^7} M_1^3 dM \right] dx + \int_0^{2l} \left[\int_0^{M_2} \frac{14^3 \times 2}{3^3 B^3 b^3 h^7} M_2^3 dM \right] dx \\ &= \frac{203.3}{4 B^3 b^3 h^7} \left[\int_0^l P^4 x^4 dx + \int_0^{2l} P^4 l^4 dx \right] = 111.8 \frac{P^4 l^5}{B^3 b^3 h^7} \end{aligned}$$

计算结果表明：在 $\sigma = B \sqrt[3]{\varepsilon}$ 的条件下，结构应变能是应变余能的三倍，并且它们都是荷载的四次式。

例 13-3 图13-4(a)为一线性弹性平面等截面直杆，线性刚度为 $i = EI/l$ ，两端角位移由零逐渐增加到 φ_1 和 φ_2 ，右端并有相对线位移 Δ ，两端相应的杆端力为 M_1 、 M_2 和 Q ，求杆件在任意平衡位置的应变能和应变余能。

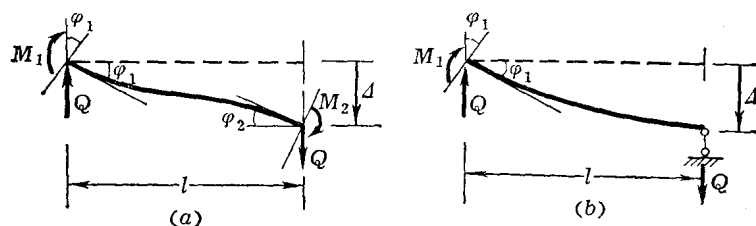


图 13-4

解：线性弹性杆件的应变能和应变余能相等，由杆端力和杆端位移来计算较为简单。

即

$$U = \bar{U} = \frac{1}{2} M_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} M_2 \varphi_2 + \frac{1}{2} Q \Delta$$

利用公式

$$M_1 = 4i\varphi_1 + 2i\varphi_2 - 6i \frac{\Delta}{l}$$

$$M_2 = 2i\varphi_1 + 4i\varphi_2 - 6i \frac{\Delta}{l}$$

$$Q = -\frac{6i}{l} \varphi_1 - \frac{6i}{l} \varphi_2 + 12i \frac{\Delta}{l^2}$$

可得

$$U = \bar{U} = 2i \left[\varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2 - 3(\varphi_1 + \varphi_2) \frac{\Delta}{l} + 3 \left(\frac{\Delta}{l} \right)^2 \right] \quad (13-7)$$

我们也可以利用平衡条件求出

$$Q = -\frac{M_1 + M_2}{l}, \quad M_x = M_1 - \frac{M_1 + M_2}{l} x$$

再代入式(13-4)或式(13-10): $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

$$U = \bar{U} = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l M_x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(M_1 - \frac{M_1 + M_2}{l} x \right)^2 dx$$

积分后再利用式(a)可得同样的结果。

设 φ_1 、 M_1 和 Q 为已知, 则杆件的挠曲方程为

$$v(x) = \varphi_1 x - \frac{M_1}{2EI} x^2 - \frac{Q}{6EI} x^3$$

而

$$v''(x) = \left(\frac{1}{\rho}\right) = -\left(\frac{M_1}{EI} + \frac{Q}{EI} x\right)$$

再代入

$$U = \bar{U} = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2}\right)^2 dx$$

也得同样的结果。

同理可得图13-4(b)的应变能和应变余能

$$U = \bar{U} = \frac{3}{2} i \left[\varphi_1^2 - 2\varphi_1 \frac{\Delta}{l} + \left(\frac{\Delta}{l}\right)^2 \right] \quad (13-8)$$

通过上述算例可知: ①应变能和应变余能在线性弹性情况下都是位移或力的二次式, 故一般而论叠加原理是不适用的。②在线性弹性情况下, 应变能与应变余能相等。在计算时, 可根据所给条件沿最方便的途径来计算。但在下面的势能驻值原理中, 要求结构的势能用结点位移来表示; 在余能驻值原理中, 则结构的余能要求用多余约束力来表示。

§ 13-3 结构的势能和余能

一、结构的势能

结构在外力 P_1, P_2, \dots, P_n 作用下将发生位移, 则外力将随结构位置的变化而使势能发生变化。如果取结构未受力的原始状态作为势能的参考状态, 则结构在此变形状态下外力的势能为

$$-P_1 \Delta_1 - P_2 \Delta_2 - \dots - P_p \Delta_p = -\sum_{i=1}^p P_i \Delta_i$$

由于在后面讨论的势能驻值原理中已知支座位移是不变的, 即其增量为零, 故支座反力的势能就不计入了。结构的外力势能与应变能的总和称为结构的总势能(Π), 或简称为结构的势能, 它可表为

$$\Pi = U - \sum_{i=1}^p P_i \Delta_i \quad (13-9)$$

二、结构的余能

结构的余能是与结构的势能对偶的一种能量。由于在后面讨论的余能驻值原理中外荷载是不变的，即其增量为零，故外荷载项就不计入了。结构的余能 ($\bar{\Pi}$) 可表为

$$\bar{\Pi} = \bar{U} - \sum_{j=1}^r R_j C_j \quad (13-10)$$

式中 \bar{U} —— 结构的应变余能；

$-\sum_{j=1}^r R_j C_j$ —— 已知支座位移的支座反力的余能。 C_j 为第 j 支座的已知支座位移， R_j 为

第 j 支座的支座反力， $\sum_{j=1}^r R_j C_j$ 就是支座反力在已知支座位移上所做的功。

若支座位移为零，则结构的余能就等于结构的应变余能。即

$$\bar{\Pi} = \bar{U} \quad (13-11)$$

三、例题计算

例 13-4 设图13-2的桁架在荷载 $P_1 = P_2 = P$ 作用下处于平衡，试求在平衡位置的结构势能和余能。

解： 1. 线性弹性情况 ($\sigma = E\varepsilon$)

结构的势能：由例13-1中求得结构的应变能和结点位移可得

$$\begin{aligned} U &= \frac{1.3392}{EA} P^2 l \\ -\sum_{i=1}^2 P_i \Delta_i &= -P_1 \Delta_1 - P_2 \Delta_2 = -P \left(\frac{0.9603}{EA} Pl + \frac{1.7181}{EA} Pl \right) \\ &= -\frac{2.6784}{EA} P^2 l \end{aligned}$$

将它们代入式(13-9)得结构的势能

$$\Pi = U - \sum_{i=1}^2 P_i \Delta_i = \frac{1.3392}{EA} P^2 l - \frac{2.6784}{EA} P^2 l = -\frac{1.3392}{EA} P^2 l$$

可见：

$$\Pi = -U$$

即结构的势能等于结构的应变能的负值，这是线性弹性体所固有的特征。因为结构的应变能等于 $\frac{1}{2} P \Delta$ ，而荷载的势能等于 $-P \Delta$ ，所以结构的势能 $\Pi = \frac{1}{2} P \Delta - P \Delta = -\frac{1}{2} P \Delta = -U$ 。

结构的余能：因为结构的支座没有已知位移，故结构的余能等于结构的应变余能。即

$$\bar{\Pi} = \bar{U} = U = \frac{1.3392}{EA} P^2 l$$

2. 非线性弹性情况 ($\sigma = B\sqrt{|\varepsilon|}$)

结构的势能：由例13-1中求得结构的应变能和结点位移可得

$$U = -\frac{2.3646}{B^2 A^2} P^3 l$$

$$-\sum_{i=1}^2 P_i \Delta_i = -P_1 \Delta_1 - P_2 \Delta_2 = -\frac{1.6301}{B^2 A^2} P^3 l - \frac{1.9172}{B^2 A^2} P^3 l = -\frac{3.5473}{B^2 A^2} P^3 l$$

将它们代入式(13-9)得结构的势能为

$$\Pi = U - \sum_{i=1}^2 P_i \Delta_i = \frac{2.3646}{B^2 A^2} P^3 l - \frac{3.5473}{B^2 A^2} P^3 l = -\frac{1.1827}{B^2 A^2} P^3 l$$

结构的余能：在支座无已知位移情况下，结构的余能就等于结构应变余能

$$\bar{\Pi} = \bar{U} = \frac{1.1827}{B^2 A^2} P^3 l$$

例 13-5 图13-5所示超静定桁架, $l_1 = 2\sqrt{3}l/3$, $l_2 = l$, $l_3 = \sqrt{2}l$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $EA = \text{常数}$, 设在 P_1 、 P_2 及 C_d 作用下的任意位置处于平衡, 考虑线性弹性 ($\sigma = E\varepsilon$) 和非线性弹性 ($\sigma = B\sqrt{|\varepsilon|}$) 两种情况, 试求: ①图(a)用结点位移表示的结构势能; ②图(b)用多余约束力 X_1 表示的结构余能。

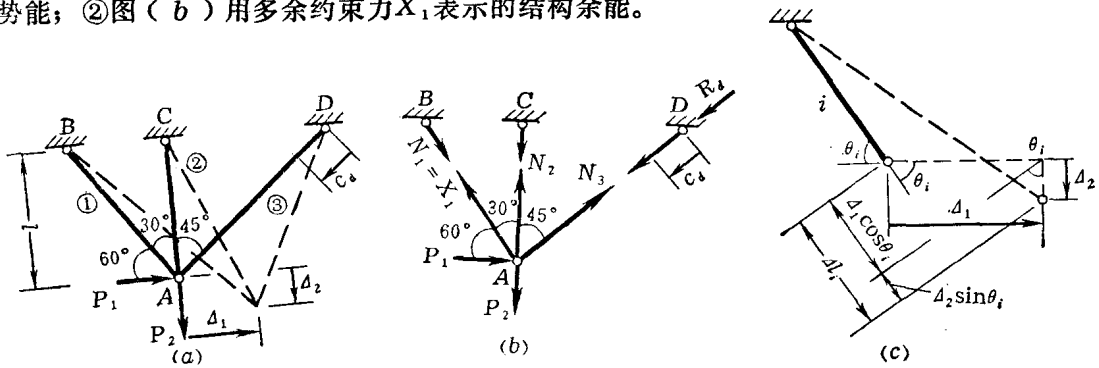


图 13-5

解: 1. 线性弹性情况 ($\sigma = E\varepsilon$)

图(a)的势能: 设图(a)结点A的水平位移分量为 Δ_1 , 铅直位移分量为 Δ_2 , 则由图(c)所示的几何关系可得第 i 杆件的伸长为

$$\Delta l_i = \Delta_1 \cos \theta_i + \Delta_2 \sin \theta_i$$

分别令 $\theta = 60^\circ$ 、 90° 、 135° 可得各杆的伸长

$$\Delta l_1 = \frac{1}{2} \Delta_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta_2, \quad \Delta l_2 = \Delta_2, \quad \Delta l_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\Delta_2 - \Delta_1)$$

代入式(a)得

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^3 \int \frac{EA}{2} \varepsilon^2 ds = \sum_{i=1}^3 \frac{EA_i}{2l_i} \Delta l_i^2 \\ &= \frac{EA}{2} \left[\frac{1}{l_1} \Delta l_1^2 + \frac{1}{l_2} \Delta l_2^2 + \frac{1}{l_3} \Delta l_3^2 \right] \\ &= \frac{EA}{2l} [0.571 \Delta_1^2 + 0.043 \Delta_1 \Delta_2 + 2.004 \Delta_2^2] \end{aligned}$$

结构的势能为

$$\Pi = U - (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2)$$

$$= \frac{AE}{2l} [0.571\Delta_1^2 + 0.043\Delta_1\Delta_2 + 2.004\Delta_2^2] - (P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2)$$

图 (b) 的余能: 令杆 1 的轴力为多余的约束力 $N_1 = X_1$, 则由结点 A 的平衡条件可得 N_2 、 N_3 为

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0, \quad N_3 &= 0.707X_1 - 1.414P_1 \\ \Sigma Y = 0, \quad N_2 &= P_1 + P_2 - 1.366X_1 \end{aligned}$$

支座 D 的反力

$$R_d = -N_3 = -(0.707X_1 - 1.414P_1)$$

代入式 (g) 相应项得

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \sum_{i=1}^3 \int \frac{N_i^2}{2EA_i} ds = \sum_{i=1}^3 \frac{N_i^2 l_i}{2EA_i} = \frac{1}{2EA} [N_1^2 l_1 + N_2^2 l_2 + N_3^2 l_3] \\ &= \frac{l}{2EA} [1.155X_1^2 + (P_1 + P_2 - 1.366X_1)^2 + 1.414(0.707X_1 - 1.414P_1)^2] \end{aligned}$$

结构的余能为

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= \bar{U} - R_d C_d \\ &= \frac{l}{2EA} [1.155X_1^2 + (P_1 + P_2 - 1.366X_1)^2 + 1.414(0.707X_1 - 1.414P_1)^2] \\ &\quad + (0.707X_1 - 1.414P_1) C_d \end{aligned}$$

2. 非线性弹性情况 ($\sigma = B\sqrt{|\varepsilon|}$)

图 (a) 的势能: 由几何关系确定的各杆的伸长不变。代入式 (e) 得

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^3 \int_0^{\varepsilon_i} [N d\varepsilon] ds = \frac{2}{3} B A \sum_{i=1}^3 l_i \varepsilon_i^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} B A \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{l_i}} \Delta l_i^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} B A \left[\frac{1}{\sqrt{l_1}} \left(\frac{\Delta_1}{2} + \frac{\sqrt{3}\Delta_2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{l_2}} \Delta_2^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{l_3}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right. \\ &\quad \left. \times (\Delta_2 - \Delta_1)^{\frac{3}{2}} \right] \end{aligned}$$

结构的势能为

$$\begin{aligned} \Pi &= U - (P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2) \\ &= \frac{2BA}{3\sqrt{l}} \left[0.329(\Delta_1 + \sqrt{3}\Delta_2)^{\frac{3}{2}} + \Delta_2^{\frac{3}{2}} + 0.500(\Delta_2 - \Delta_1)^{\frac{3}{2}} \right] \\ &\quad - (P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2) \end{aligned}$$

图 (b) 的余能: 将上面由平衡条件确定的轴力代入式 (i) 相应项得

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \sum_{i=1}^3 \int_0^N [\varepsilon dN] ds = \frac{1}{3B^2 A^2} \sum_{i=1}^3 l_i N_i^3 \\ &= \frac{1}{3B^2 A^2} [l_1 X_1^3 + l_2 (P_1 + P_2 - 1.366X_1)^3 + l_3 (0.707X_1 - 1.414P_1)^3] \end{aligned}$$

故结构的余能为

$$\bar{\Pi} = \bar{U} - R_d C_d$$