微分幾何學

W. C. Graustein著
楊善基譯

商務印書館出版

㊥(352824)

微分幾何學

Differential Geometry

原著者　W. C. Graustein

譯述者　楊　　善　　基

出版者　商　務　印　書　館
上海河南中路二一一號

三聯 中華 商務 開明 聯營聯合組設
發行者　中國圖書發行公司
北京絨線胡同六十六號

發行所　三聯書店　中華書局
商務印書館　開明書店
聯營書店　各地分店

印刷者　商務印書館印刷廠

1951年12月初版　定價人民幣18,000元

(滬)1-3000

譯者序

這本譯稿,是十年前——抗戰期間——在重慶所完成的,由香港商務印書館承印。後來太平洋戰爭發生,香港淪陷,因此未能付印。

解放後,大學教材,務須以我們自己編著或譯述爲原則,所以此書譯本,仍不失爲大學微分幾何課程教本之一。至於原著筆法的清晰明瞭,及取材的適當,凡讀過此書的人,都能知道,不必贅言。商務印書館本提倡學術的立場,不計營業的得失,願意提出付印,譯者表示衷心的謝忱。

脫稿的時候,曾承友人陳傳璋、李先正二先生對於名詞及字句多多指正,譯者特在此地表示十分感謝。但錯誤恐怕仍然不免,讀者的指正,那是極所歡迎的。

一九五一年四月序於南昌

原　序

本書以矢量記法敍說歐氏三維空間之曲線與曲面之度量微分幾何學(metric differential geometry)之概要。其取材乃包括作者爲一般學生及欲專門研究微分幾何學者所講述之半學年初等課程之內容也。

首九章爲此種理論之連貫闡明,並附簡單實例。其所討論者,在曲線與曲面基本性質外,並論及曲面之變換與一曲面上之絕對幾何學。在一曲面上絕對幾何學中,並介紹羅非奇非塔氏(Levi-Civita)之平行論以作研究黎曼幾何學(Riemannian geometry)及其擴充理論之過程。

第十章,即最末一章,論及此種理論對於數種重要曲面之應用。

讀者除須具有微積分之基本知識,包括偏微分法,及立體解析幾何之要素外,無須他種專門知識。但此並非言他種工具一概不用。質言之,著一微分幾何學而不利用微分方程式之理論實不可能也;且作者如欲使其討論得臻於嚴密,則函數論中之定理亦有時須要。

但本書對於假定之事實,恆作明確之聲明,使讀者在探求本書之重要思想時不致中斷而發生困難也。

在應用矢量解析以研究一問題時,常發生對矢量解析之討論超越問題本身而有反客爲主之危險。此處特別謹慎使本書之着重點爲幾何學,而僅令矢量解析在適當地位中爲一工具而已。質言之,本書之所須要僅普通所謂矢量解析學中之小部分。卽本書僅須用矢量代數學,故十頁之緒言卽足給讀者對於此一部分應知之知識矣。

在矢量代數學中有三種矢量配合(combinations)爲其基本:二矢量之矢積,二矢量之數積及三矢量之外積或行列式。此三種積爲一重要關係所連貫之。設α,β,γ爲三矢量,則其分量之行列式$|\alpha,\beta,\gamma|$可等於矢量α與矢量β與γ矢積之內積。

自論理學之觀點似極宜對於此三種積之記法第一應當顧及一行列式之通常記號$|\alpha\beta\gamma|$,第二應當顧及此三積之基本關係。自後者之考慮將規定二矢量數積之記法與一行列式之記法相似。苦斯馬氏(Grassmann)之記法實合乎此種條件。伊書α,β,γ之行列式爲$[\alpha\beta\gamma]$又用$[\alpha|\beta]$以表示二矢量α與β之數積。

以此二種記號表示之,則此三積之基本關係可書爲$[\alpha\beta\gamma]=[\alpha\mid\beta\gamma]$,僅須$\beta$與$\gamma$之矢積以$\beta\gamma$表示之。於是自$[\alpha\beta\gamma]$至$[\alpha\mid\beta\gamma]$之變換或其反變換可自加入一直道或删去一直道而得之,且因是基本關係將成爲形式上無足輕重之關係矣。

矢積之記法$\beta\gamma$雖假定其不引起困難之點,仍須相當潤飾。當然此種潤飾不爲括弧之形式,因爲括弧已用爲表示數積矣。且似宜使此種潤飾法重於二矢量實已組合爲一新矢量之事實。斯達得氏(Study)想像如是之潤飾爲一"頂蓋"之形式。其矢積原來記號爲$\beta\gamma$而此種記號漸演變爲$\overgroup{\beta\gamma}$。

斯達得氏又用普通括弧以替代苦斯馬氏之方括弧。於是伊用記號$(\alpha\beta\gamma)$,$(\alpha\mid\beta)$,與$\overgroup{\alpha\beta}$以表示此三積,因是可書此三積間之基本關係爲$(\alpha\beta\gamma)=(\alpha\mid\overgroup{\beta\gamma})$之形式。

余在布恩(Bonn)大學爲學生時,已用斯達得氏記法,在本書中亦沿用之。在述明此種記法之源起,余唯一目的在將余個人沿用之理由略述其梗概。此外尚有其他各種記法亦完全可以適用者。設讀者已習知其中之一種,則自余個人之經驗余可擔保伊可毫無困

難將斯達得氏之記法譯成其本人之記法,且用此方法可使伊對於矢量代數學之認識無疑的更為加強矣.

對於麥客米倫公司(The Macmillan Company)予余以有效之合作與便利,余極感快慰而表示余之謝忱.

W. C. G.

麻省, 劍橋

一九三四年,十二月.

目　　錄

微分幾何學

第一章　緒論

1. 微分幾何學之性質　粗淺言之,微分幾何學乃應用微積分以研究普通曲線及曲面之幾何學。與之對立者則有代數幾何學,其最大工具爲代數學,且其所討論之對象僅限於範圍較窄之各種曲線與曲面。例如讀者在解析幾何中所習見之二次曲線與曲面是屬於代數幾何學,至於論及普通曲線之曲率及普通曲面之切面,則屬於微分幾何學之境域矣。

一種幾何圖形約有兩種性質,其一屬於圖形之全體,其他則僅爲圖形之小部分所具有者。如平面代數學曲線之階——即此曲線爲一直線所交之點數——,乃此曲線全體之性質也。自另一方面言之,曲線在一點之曲率,僅與此點附近之曲線形狀有關。總括言之,代數幾何學注意於一圖形全體性質,至於微分幾何學則討論性質之僅限於此圖形之一部分者。代數幾何

學實乃一全體幾何學或大境域幾何學 (geometry in the large),微分幾何學則爲小境域幾何學 (geometry in the small)。

歐几里得幾何學(Euclidean geometry)無論如中學之綜合方式或大學之解析方式皆爲代數幾何學。或爲讀者所習見之普通射影幾何學(projective geometry)亦爲代數幾何學。但此兩種幾何學之內容實不相同。歐几里得幾何學討論圖形性質爲剛性運動所不改變者,例如距離角度及面積等。射影幾何學則僅討論圖形性質爲射影所不改變者,例如點在一線上之性質或數線相交於一點之性質。前者爲定量或度量(metric)幾何學,後者則論及與量長短無關之地位性質。

在代數幾何學中,此種度量與射影幾何學之分別,亦可應用於微分幾何學中。故有度量或歐氏微分幾何學及射影微分幾何學二種。在此書中吾人僅論及度量微分幾何學。換言之吾人將用微積分方法以研究爲剛性運動所不改變之曲線及曲面之性質。

吾人先以非嚴謹態度回憶立體解析幾何中幾種事實。

2. 定向線段 矢量 吾人選擇右旋(right-handed)

坐標系爲空間直角坐標之基本,如圖 1 所示,並以(x_1, x_2, x_3)表明對此坐標系一點之坐標。

設$\overline{PP'}$爲連 P 點(x_1, x_2, x_3)至 P' 點$(x_1', x_2', x_3',)$之定向線段。又設 a_1, a_2, a_3 爲$\overline{PP'}$射影於 x_1, x_2, x_3 各坐標軸之量,則

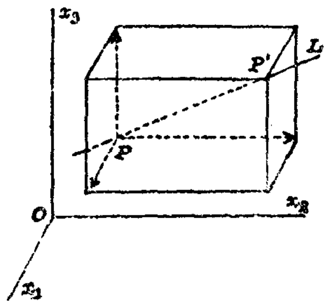

圖 1

(1) $$a_1 = x_1' - x_1,$$

$$a_2 = x_2' - x_2,$$

$$a_3 = x_3' - x_3,$$

$\overline{PP'}$之長度 a 如用 a_1, a_2, a_3 表明之,則

(2) $$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}。$$

最後設令 A_1, A_2, A_3 爲$\overline{PP'}$與正坐標軸 x_1, x_2, x_3 所成之角(角在 0 與 π 之間亦可爲 0 或 π),則

(3) $$a_1 = a\cos A_1, \quad a_2 = a\cos A_2, \quad a_3 = a\cos A_3。$$

依定義言,$\cos A_1, \cos A_2, \cos A_3$ 爲$\overline{PP'}$所在之 L 線之方向餘弦(direction cosines),當 L 之指向(sense)與$\overline{PP'}$相同時。故 a_1, a_2, a_3 爲 L 之方向分量(direction components),吾人將稱之爲定向線段$\overline{PP'}$之方向分量(direction components),或簡稱爲其分量(components)。

當 $a=1$ 時卽$\overline{PP'}$爲單位長時,則 a_1, a_2, a_3 卽成定向

線 L 之方向餘弦或稱之爲單位定向線段 $\overline{PP'}$ 之方向餘弦。

矢量。二定向線段如在一線上或在二平行線上，且具有同一指向(sense)與同一長短，則自幾何觀點顯知此二線段有同一分量(components)。逆言之，設 a_1, a_2, a_3 爲不全爲零之三數，則有無窮多之線段以 a_1, a_2, a_3 爲其在坐標軸之射影量(projections)，質言之，即從空間之每一點皆可引出此種線段。此種線段中每二線段有同一方向(direction)，同一指向(sense)與同一長短(length)。

因此可知如欲定一定向線段 $\overline{PP'}$ 在空間之位置，吾人不僅必須知其分量 a_1, a_2, a_3 且須知其出發點 P 之坐標 x_1, x_2, x_3。設僅知其分量，則此定向線段可在空間自由行動，僅須當其行動時，保留原始方向及指向。此種定向線段稱之爲矢量(vector)。換言之，一定向線段有地位，方向，指向與長短；至於一矢量則僅有方向，指向與長短也。故須用六個數量 $x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, a_3$ 去定一定向線段，但僅須三個數量 a_1, a_2, a_3 (非皆爲零) 去定一矢量。

吾人將稱 a_1, a_2, a_3 爲矢量之方向分量或簡稱爲其分量，a 爲其長度 $\cos A_1, \cos A_2, \cos A_3$ 爲其方向餘弦。簡

言之,卽吾人前所用於定向線段之名詞皆可應用於矢量。

如欲使每一三元數(number triple) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 皆可爲一矢量之分量,吾人可稱以 0, 0, 0 爲分量之矢量爲零矢量(null vector)。吾人將稱零矢量以外其他之矢量爲眞矢量(proper vectors),以資區別。

以上所討論之眞矢量與零矢量,皆爲自由矢量(free vectors)。在此以外,吾人有時用及定矢量,或稱爲地方矢量(localized vectors)。地方矢量乃有一定始點之矢量卽一定向線段也。設此定始點爲 P,吾人稱此矢量定於 P 點,或簡稱爲在 P 點之一矢量。

3. 平行與垂直矢量 設有諸矢量 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$,其分量爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; \cdots\cdots$,此諸矢量或皆爲自由矢量,或皆爲定於同一點之矢量。

吾人稱二矢量有同一方向者爲平行,但此二矢量須皆爲眞矢量。設有一矢量爲零矢量,則此定義不能適用,因零矢量無方向也。欲彌補此種缺點,吾人可推廣此定義,而假設零矢量與每一矢量皆平行。

設 α 爲一眞矢量,β 爲與 α 平行之矢量,則 β 之分量爲 α 之分量之倍數: