WOLIUFENXI

牛津大学电机与电子工程专著之一

涡流分析

[英] R·L·斯托尔 著

史乃 王译 汤蕴璆 校

黑龙江科学技术出版社

涡 流 分 析

〔英〕 R.L.斯托尔 著

史乃 主译　汤蕴璆 校

黑龙江科学技术出版社

一九八三年·哈尔滨

本书主要介绍时变磁场在导体中所感应的涡流及其计算方法，叙述简明扼要。全书共分八章，包括时变电磁场的基本方程和边界条件、一维和二维涡流问题的解析解法，铁磁物质非线性的影响，以及非线性一维及二维涡流问题的有限差分解法等。除理论分析外，书中还列举了许多实例。本书可供电机和电力方面的工程技术人员，高等院校教师、大学高年级学生和研究生参考之用。

R. L. Stoll

The Analysis of Eddy Currents

Oxford University Press 1971

涡 流 分 析

〔英〕 R.L. 斯托尔 著

史乃 主译 汤蕴璆 校

黑龙江科学技术出版社出版

（哈尔滨市南岗区分部街28号）

哈尔滨电工学院印刷厂印刷 黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米 1/32 · 印张6.2/16 · 字数122千

1983年8月第一版 1983年3月第一次印刷

印数1—3,400册

书号：15217·001 定价：0.86元

致中文版读者

我以十分喜悦的心情将这本书介绍给中文版的读者。这本书英文初版本的手稿写于1972年。因此，在过去的八年中，我已经注意到有些遗漏和不足之处。例如，近年来有限元法已日渐推广应用，但在本书初版中写得过于简略。虽然存在着这些不足之处，但我相信，这本书对于那些想要了解涡流并将它应用于设计和改进电工设备的读者，是有一定帮助的。最后，对于中国的所有读者，致以我的良好祝愿。

R. L. 斯托尔

一九八一年二月

译　序

本书为英国牛津大学出版社出版的“电机与电子工程丛书”中的一本。内容主要研究时变磁场在导体中所感应的涡流及其计算方法。由于涡流是各种电机和电力设备中的一个重要问题，而比较系统地研究这个问题的专著又很少见，所以斯托尔博士这本著作十分可贵。

本书作者除了简明扼要地对涡流进行了理论分析之外，还通过许多实际例子介绍了涡流问题的解析解法。在第六、第八两章中，详细介绍了非线性一维问题和线性二维问题的有限差分解法。在计算技术得到飞速发展的今天，特别是对于包含具有非线性磁化特性的钢材的问题，采用有限差分解法（或有限单元法）才有可能使问题得以成功地解出。

作者在第七章中介绍了因次分析的应用。对于介于电阻限制性和电感限制性涡流这两种极限情况之间的问题，采用因次分析和数值解法的综合方法，将是一个可行的方案。

我们相信，本书对电机、电器和电力行业的工程技术人员、高等学校教师、大学高年级学生和研究生都是有用的，对于其他领域的科技人员也有一定的参考价值。

参与本书翻译工作的还有黄士鹏、谢德馨二位同志。全部译文由汤蕴璆同志校阅。译文中有错误或不妥之处，请读者批评指正。

译　者

1981年元月于哈尔滨

前　言

本书有选择地研究了时变磁场在磁性和非磁性导电材料中感生的涡流（或称为傅科电流）。虽然从金属部件的非破坏性试验，直到旋转电机的损耗等问题已有许多专论，但是在电磁学的教科书中，对涡流这个题目却很少具有相称的论述。一个工程师在面临设备效率低或者温升高的课题，或者寻求很好地利用涡流时，可能会感到缺乏有关的基础知识，因而需要一座桥梁，以便通向阅读所感兴趣的领域中的专门论文，并且很有可能他将亲自进行这一研究工作。本书试图为这些工程师和攻读电磁学的四年级大学生，或从事这方面工作的专家阐明涡流的性质，并简要地介绍一些数学分析方法。本书把相当多的注意力放在数值解法上，这是因为对于某些问题，特别是对于包含具有非线性磁化特性的钢材的问题，只有采用这种方法，才能成功地获得解答。

本书是在假定读者已经熟悉向量分析的基本概念，并且已经掌握电磁学初级教程内容的前提下编写的。

这里，我要向南安普敦大学的 P.Hammond 教授表示感谢，他不仅仔细地阅读了本书的手稿，而且对作者进行了鼓励和多年教导；还要感谢 Y.K.L.Yu Wai Man 先生为本书提供了表 3 和图 6－1 中的计算结果；也要感谢我妻子的耐心和理解，以及为手稿细心打字的G.Lott 小姐。

R.L. 斯托尔

1973年 3 月于南安普敦

主要符号表

A 向量磁位

a, b Frohlich 方程〔式(1—5)〕的系数

B 磁通密度

b 金属板或叠片的一半厚度

d 磁性饱和钢板的一半厚度

E 电场强度

E **E** 的复数形式

f 频 率

g 绕组的极距

H 磁场强度

H **H** 的复数形式

h 有限差分网格长度

I 导体电流的最大值

i, j 表示有限差分节点空间位置的整数

J 电流密度（安/米^2）

K 电流的线密度（安/米）

k 表示有限差分节点时间位置的整数

M, N 分别为 i 和 j 的最大值

n 表面的单位法向向量

P_e 单位表面积或单位长度的涡流损耗

p 涡流参数 $\left(=\frac{\sqrt{2}g}{\pi\delta}\right)$ 或有限差分时间步长

p_m, q_n 分离常数

q 等于 $\dfrac{\pi}{g}$

R 绕组电阻

R_{ac}, R_{dc} 分别为导体单位长度的交流和直流电阻

r 有限差分参数 $\left(=\dfrac{p}{\beta h^2}\right)$

r, ψ, z 圆柱坐标（用作下标时表示向量的分量）

$\mathbf{s}$ 坡印亭向量（$\mathbf{E}\times\mathbf{H}$）

S $\mathbf{s}$ 的复数形式

s 面 积

T_0 周 期

t 时 间

V 标量电位

v 体 积

X_i 导体每单位长度的内电抗

x, y, z 直角坐标（用作下标时表示向量的各个分量）

Z_i 导体每单位长度的内阻抗

α 涡流参数 $\left(=\dfrac{1+j}{\delta}\right)$ 或逐次超松弛加速因子

β 扩散系数 $\left(=\sigma\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}H}\right)$

δ 涡流集肤深度 $\left(=\sqrt{\dfrac{2}{\omega\sigma\mu}}\right)$

δ_{ij} 节点 i, j 的位移

μ_0　自由空间的磁导率

μ_r　相对磁导率

μ　等于 $\mu_0\mu_r$，或是一个变量

Φ　金属板单位宽度内的磁通量

ρ　电阻率

σ　电导率

ω　角频率

目　　录

致中文版读者……………………………………………… 1
译　序………………………………………………………… 2
前　言………………………………………………………… 3
主要符号表…………………………………………………… 7

第一章　绪　论

1—1　铁磁材料……………………………………… 2
1—2　电磁场方程…………………………………… 5
1—3　坡印亭定理…………………………………… 9
1—4　边界条件……………………………………… 10

第二章　一维涡流

2—1　非磁性或线性磁性材料金属板的通解……13
2—2　受到与其表面平行的均匀外加磁场作用时的金属板或叠片……………………………17
2—3　反射阻抗和复数磁导率……………………19
2—4　磁滞效应的近似计入………………………21
2—5　扁平载流母线…………………………………23
2—6　母线的阻抗……………………………………27
2—7　涡流集肤效应…………………………………29
2—8　圆形截面的导体………………………………31
2—9　涡流屏蔽………………………………………35

第三章 阶跃函数磁化特性

3—1 受到正弦表面磁场作用的厚金属板的解答……38

3—2 评　述……43

3—3 饱和磁通密度 B_s ……45

第四章 线性导体的二维解析法

4—1 二维直角坐标系中的分离变量法……49

4—2 边界条件……51

4—3 矩形长导条中的涡流……53

4—4 有限傅里叶变换法……56

4—5 涡流的模式——等效电路法……59

4—6 矩形截面的孤立载流导体……63

4—7 槽内的矩形和T形导体……68

4—8 受到行波磁场作用的扁平金属板……80

4—9 厚金属板内的涡流损耗……86

4—10 用镜象法来计算切向表面磁场……89

4—11 线电流作为激励源……90

4—12 用于孤立导体的一种积分解……98

第五章 幂级数法

5—1 应用到一张叠片…… 102

5—2 参考磁场或电流…… 105

5—3 平行于电流片的半无限大厚板…… 106

第六章 非线性一维问题的有限差分解法

6—1 有限差分方程…… 110

6—2　Crank-Nicolson 方程 …………………… 114
6—3　Crank-Nicolson法在非线性问题中的应用 …………………………………… 115
6—4　跳格格式 …………………………………… 117
6—5　跳格法在非线性问题中的应用 ………… 120
6—6　饱和钢板的处理 ………………………… 122
6—7　计及磁滞的情况 ………………………… 128

第七章　因次分析的应用

7—1　饱和钢板问题的因次分析 …………………… 132
7—2　在横向磁场内的非磁性导体 ……………… 136

第八章　线性二维问题的有限差分解法

8—1　有限差分网格 …………………………… 138
8—2　有限差分方程 …………………………… 140
8—3　模型问题 ………………………………… 146
8—4　逐次超松弛法（SOR法）………………… 148
8—5　隐式交替方向法（ADI法）……………… 152
8—6　强隐式迭代法 …………………………… 158
8—7　有限差分方程的精度 …………………… 163
8—8　边界条件 ………………………………… 165
8—9　收敛性的改进 …………………………… 166
8—10　均匀横向磁场中的矩形导体 …………… 168
8—11　电机槽内空心导体中的涡流 …………… 171

结　论 ……………………………………………… 173

参考文献 …………………………………………… 175

第一章 绪　论

受到时变电磁场作用的任何导体中，都会产生涡流。因而，从感应电动机的鼠笼到波导的管壁，各种型式的电力设备里都会有涡流出现。人们常常可以有效地利用涡流，众所周知的感应式电炉就是一例。在感应式电炉里，涡流在金属炉料中流动，产生的电阻损耗足以使金属熔化。在另外一些场合，人们可能不得不采取措施，以减小涡流的影响。为了减小变压器和旋转电机铁心中的涡流损耗，并使铁心能通过所需要的磁通量，通常采用叠片铁心；否则，铁心中的磁通将受到涡流反应场的完全抵制。

以上这些例子足以说明，涡流有三种表现：

(1) 发热；

(2) 产生反应磁场；

(3) 由感应场和反应场相互作用所引起的力。

不论是有利还是有害，在设计每台电力设备时，都必须预先估计涡流的影响。这意味着采取以下的某个步骤，即：

(1) 从已有的同类设备出发，对该设备作出估计；

(2) 对该设备的缩小模型进行测量；

(3) 对模拟模型进行测量；

(4) 对数学模型进行计算。

第一个步骤是设计的正常部分，但当设计有重大改变或尺寸显著增加时，这一步骤有明显的不足。采用缩小的模型有时具有一些优点，但是除了要花一点费用之外，定标往往

有困难。例如一个非线性磁性导体的定标问题就是这样。从实验的观点看，采用模拟模型往往更为可取（Brailsford和Burgess，1961年，Roberts，1962年；Silvester，1967年）。Oberretl（1969年）提出的一种模拟模型特别引人感兴趣，这一模型采用了电阻、电容网络并以齐纳二极管作为非线性元件。该模型具有这样的优点：它比缩小的模型更为通用，并且整个装置内部的离散点都能展示于实验观察。某些用数字计算机进行的数值解法，亦具有同样的逐点求解性，甚至具有更大的通用性，因而随着计算机容量的增大以及速度的提高，这一方法可能成为将来最有希望的研究方向。

本书仅限于研究如何使用数学模型。第一部分将说明某些常用的解析方法。从数学观点不太严格地说，解析法得到的是一个代数解，在解答中问题的参数作为变量出现。解析解的优点是，改变一个参数时，其影响能够较容易地判断出来。尽管如此，由于数学模型往往过于复杂，以至无法用解析法求解，而不得不改用数值法求解。数值法的应用范围更为广泛，但是也有缺点，即此时参数隐含在由一组给定的数据所算出的数值结果中。通过因次分析，可以减少多组数据的过多的计算。本书的后面部分将涉及一些数值解法。

本章的其余部分，将介绍几个初步的概念和论题。

1—1 铁磁材料

由于铁磁材料对感应磁场将产生非线性的反作用和有关的磁滞现象，因而求解包括铁磁材料在内的场的问题，是比

较复杂的。在实践中，我们需要一个恰当的数学函数，来表示磁通密度 **B** 与磁场强度 **H** 之间的关系。

磁通密度定义为

$$\mathbf{B} = \mu_0 \ (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{1-1}$$

式中磁化向量 **M** 一般来说是 **H** 的函数。除了特别适合于用作变压器铁心叠片的冷轧定向晶格硅钢片以外，用于电力设备的多数普通磁性材料，都近似为各向同性。因而 **B** 与 **H** 之间的函数关系与 **H** 的方向无关。尽管如此，由于磁滞的关系，**M** 可以不是 **H** 的单值函数。在第二章里，我们将提出一些证据，说明在电工钢片和低碳钢中，磁滞对涡流损耗的影响相对来说是次要的；因而在本书的多数分析中，假定磁性材料的性质完全由连接对称的磁滞回线族的各个顶点的单值曲线所确定，这一曲线通常称为磁化特性曲线，或 B/H曲线。

假设 **B** 和 **H** 之间为一线性关系，则数学分析将得到简化。如果

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H},$$

式中 χ_m 为磁化率，则式（1—1）就变成

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}. \tag{1—2}$$

式（1—2）在文献中被广泛使用，部分原因是由于数学上的需要，同时也是因为利用该式可对涡流作出较为简单的定量研究，而不受由于非线性所引起的复杂性的阻碍。在开始研究时，我们将以式（1—2）为基础。

另一方面，合理而精确的定量研究，要求有一个可靠的非线性表达式。表达式的选择取决于求解方法。如果采用数值解法，可以把 B/H 的实验曲线作为点的集合，贮存于数

字计算机中，并由线性插值法求出所需要的 **B** 或 **H** 值。然而这将花费很多的计算时间。因此通常用一个数学方程来表示更方便些，特别是如果在所求磁场强度的全部范围内能用一个方程来表达时，更是这样。Widger (1969年) 提出的有理分式近似，就是一例：

$$\mathbf{B} = \frac{a_0 + a_1 H + a_2 H^2 + \cdots\cdots + a_n H^n}{1 + b_1 H + b_2 H^2 + \cdots\cdots + b_n H^n} \mathbf{H}, \quad (1\text{—}3)$$

式中 a_0, a_1, $\cdots a_n$, b_1, b_2, $\cdots b_n$ 是一些常数，可由给定的磁化特性确定。通常取 $n=2$ 就能获得很好的逼近，此时有

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{H_i - H_i'}{H_i} \right)^2 < \varepsilon,$$

式中 ε 是一个小数，例如0.1；H_i 是实验曲线上的点，H_i' 是计算曲线上的点。应当说明，过高的精度并无必要，因为不同的钢片样品，可能会有高达10%的变化。

如果要得到场方程的解析解，则式 (1—3) 就过于复杂。事实上，只有很少的函数适合于求解。众所周知的阶跃函数

$$\mathbf{B} = (H\text{的符号})\ \mathbf{B}_s \quad (1\text{—}4)$$

式中 $\mathbf{B}_s$ 为饱和磁通密度，可以用以分析一维问题，并得到解析解（Agarwal，1959年）。这个简单的方程式，虽然在饱和程度很高时是一个合理的近似，但是不能与磁化特性很好地吻合。正如我们可以预料到的，为使计算简化，将付出吻合"优良程度"较差的代价；或者，另一种办法是必须严格地限制 H 的范围。Fischer 与 Moser (1956年) 考察了很多方程式，Trutt，Erdelyi 和 Hopkins (1968年)

亦研究了一些方程，并用确定的品质函数来进行衡量。其中 Frohlich 曲线

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{a+bH} \tag{1—5}$$

是在精度与简便程度两者之间的一个较好的折衷方案。式（1—5）不能使场方程得到精确解，但它便于进行因次分析，而因次分析是数值计算的很有用的前置步骤（这点将在第七章中说明）。

1—2 电磁场方程

包含有电磁场和电流的问题，是用微分方程或积分方程来表达的。微分方程通过各点的源电流密度（若有的话）来描述空间该点的磁场，或某些相关量的性质。在给定的区域内求解微分方程，该区域以外的源的影响，通过边界条件反映到解答内。另一方面，积分方程通过全部的源电流密度来表示场，把各个源的作用加以总和，即可导出合成场。表面看来，这是一种比用微分方程求解更好的途径；但是，实际上积分方程求解起来往往更为困难。其中原因之一是，磁场随时间变化时将产生附加源，即涡流，因而场量还将出现在被积函数中。

不考虑位移电流时（它在导体中可以忽略不计），电磁场的基本方程为

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{dB}{dH}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{1—6}$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{1—7}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{1—8}$$